Algèbre linéaire : systèmes, matrices et espaces vectoriels

Fiche d'exercices — L1 maths

Difficulté : ★ application directe · ★★ standard · ★★★ approfondissement · ★★★★ défi.

Un conseil : cherchez d'abord, le corrigé ensuite — c'est là que ça progresse.

Exercice 1 ★ Trois systèmes, trois issues

Notions : Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauss

On considère les trois systèmes suivants, d'inconnues réelles x, y, z.

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$(S_3) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

1. Résoudre chacun des trois systèmes par la méthode du pivot de Gauss. À chaque étape, noter l'opération effectuée sur les lignes. Écrire l'ensemble des solutions sous la forme d'un ensemble, paramétré s'il le faut.

2. Pour (S_1) et (S_2), vérifier le résultat en reportant la solution trouvée dans le système de départ (pour (S_2), la vérification se fait pour toute valeur du paramètre).

3. Pour (S_3), repérer sur les équations de départ la relation entre les premiers membres qui explique le résultat.

4. Chaque équation d'un de ces systèmes est l'équation d'un plan de l'espace rapporté à un repère. Interpréter géométriquement, en une phrase, chacun des trois résultats.

Exercice 2 ★★ Un système à paramètre

Notions : Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauss

Soit m un réel. On considère le système, d'inconnues réelles x, y, z,

$$(S_m) \quad \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

1. Échelonner (S_m) par la méthode du pivot, en prenant la première équation comme ligne pivot et **sans diviser** par une expression qui dépend de m. Noter chaque opération, et factoriser les coefficients obtenus.

2. Résoudre (S_m) selon les valeurs de m. On donnera dans chaque cas l'ensemble des solutions, et l'on vérifiera la solution obtenue dans le cas général.

3. Sur une copie, on lit la rédaction suivante.

> « D'après l'échelonnement, la deuxième équation s'écrit $(m-1)y-(m-1)z = 0$; en divisant par $m-1$, on obtient $y = z$. La troisième s'écrit $(1-m)(m+2)z = 1-m$; en divisant par $1-m$, on obtient $(m+2)z = 1$. Donc, si $m \neq -2$, le système a pour unique solution $\frac{1}{m+2}(1,1,1)$, et si $m = -2$, il n'a pas de solution. »

Quelle étape est fautive ? Montrer, par un exemple numérique explicite et vérifié, que la conclusion de la copie est fausse pour une valeur de m.

4. Retrouver le cas $m = -2$ sans pivot, en additionnant les trois équations.

Exercice 3 ★★ Équilibrer une réaction chimique

Notions : Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauss

Équilibrer une équation de réaction chimique, c'est choisir des coefficients entiers strictement positifs tels que chaque élément chimique apparaisse avec le même nombre d'atomes de part et d'autre de la flèche : au cours de la réaction, aucun atome n'est créé ni détruit. Par exemple, dans H_2O il y a 2 atomes d'hydrogène et 1 atome d'oxygène, donc $d\,H_2O$ en apporte $2d$ et d.

1. La combustion du propane.

$$a\,C_3H_8 + b\,O_2 \longrightarrow c\,CO_2 + d\,H_2O$$

a. Pour chacun des éléments carbone (C), hydrogène (H) et oxygène (O), écrire l'équation qui traduit sa conservation. On obtient un système linéaire homogène d'inconnues a, b, c, d.

b. Résoudre ce système par la méthode du pivot, et montrer que l'ensemble de ses solutions réelles est une droite de $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire un ensemble de la forme $\{\,\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\,\}$ avec v un vecteur non nul.

c. En déduire les plus petits coefficients entiers strictement positifs qui équilibrent la réaction, en justifiant qu'il n'y en a pas de plus petits.

2. Le permanganate de potassium et l'acide chlorhydrique.

$$a\,KMnO_4 + b\,HCl \longrightarrow c\,KCl + d\,MnCl_2 + e\,Cl_2 + f\,H_2O$$

Reprendre les questions **a**, **b** et **c** avec les cinq éléments potassium (K), manganèse (Mn), oxygène (O), hydrogène (H) et chlore (Cl), et les six inconnues a, b, c, d, e, f. Vérifier le résultat en comptant les atomes de chaque élément des deux côtés.

3. Expliquer pourquoi, dans les deux cas, on pouvait affirmer **avant tout calcul** que le système avait une infinité de solutions.

Exercice 4 ★ Le calcul matriciel n'est pas le calcul des nombres

Notions : Calcul matriciel : somme, produit, transposée, puissances, Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques

Plusieurs règles du calcul sur les nombres réels deviennent fausses pour les matrices carrées. Pour réfuter une affirmation de la forme « pour toutes matrices… », un **contre-exemple** suffit, à condition de l'écrire explicitement et de le vérifier par le calcul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA. Que peut-on en conclure sur l'affirmation « pour toutes matrices $M, P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $MP = PM$ » ?

2. Calculer CD et DC. Quelle règle des nombres réels est mise en défaut ? L'égalité $MP = 0_2$ entraîne-t-elle $PM = 0_2$?

3. On pose $N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer N^2. Déterminer ensuite toutes les matrices triangulaires supérieures $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ telles que $T^2 = 0_2$.

4. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Développer $(M+P)^2$ pour deux matrices carrées quelconques de même taille, et en déduire à quelle condition l'identité $(M+P)^2 = M^2+2MP+P^2$ est vraie.

5. On pose

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Calculer $(EF)^\top$ et $F^\top E^\top$, et constater qu'elles sont égales. Le produit $E^\top F^\top$ a-t-il un sens, et peut-il être égal à $(EF)^\top$?

6. Démontrer que pour toutes matrices $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a $(MP)^\top = P^\top M^\top$. Pourquoi la vérification de la question 5 ne suffisait-elle pas ?

Exercice 5 ★★ Puissances par la formule du binôme

Notions : Calcul matriciel : somme, produit, transposée, puissances

On rappelle la formule du binôme pour les matrices : si M et P sont deux matrices carrées de même taille **qui commutent** ($MP = PM$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(M+P)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^{n-k} P^k,$$

avec la convention $M^0 = P^0 = I$.

1. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N = A - 2I_3.$$

a. Écrire N, puis calculer N^2 et N^3. Que valent les N^k pour $k \geqslant 3$?

b. Justifier que $2I_3$ et N commutent.

c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'expression de A^n comme combinaison de I_3, N et N^2, puis la matrice A^n coefficient par coefficient. La formule obtenue vaut-elle aussi pour $n = 0$ et $n = 1$?

d. Contrôler le résultat pour $n = 2$ en calculant A^2 directement.

2. On pose

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = D + U.$$

a. Calculer U^2, DU et UD.

b. Quelle expression de B^n obtiendrait-on en appliquant, sans précaution, la formule du binôme à D et U ?

c. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Conclure.

3. Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les neuf coefficients valent 1.

a. Montrer que $J^2 = 3J$, puis que $J^k = 3^{k-1} J$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $(I_3 + J)^n$ sous la forme $I_3 + c_n J$ avec c_n réel à déterminer. Contrôler pour $n = 2$.

Exercice 6 ★ Inverser par le pivot de Gauss-Jordan

Notions : Matrices inversibles et calcul de l'inverse

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Par la méthode de Gauss-Jordan appliquée à la matrice augmentée $(A \mid I_3)$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. Noter chaque opération sur les lignes. Vérifier le résultat en calculant AA^{-1}.

2. Appliquer la méthode du pivot à B. Montrer que B n'est pas inversible, en exhibant une colonne $X \neq 0$ telle que $BX = 0$ et en expliquant pourquoi cela empêche l'inversibilité.

3. On rappelle le critère du cours pour les matrices de taille 2 : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et dans ce cas

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Dire si les matrices $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ sont inversibles, et calculer l'inverse le cas échéant, avec vérification.

Exercice 7 ★★ Une relation qui donne l'inverse

Notions : Matrices inversibles et calcul de l'inverse, Calcul matriciel : somme, produit, transposée, puissances

1. Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, et

$$A = J - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer J^2. En déduire, sans calculer A^2 coefficient par coefficient, que $A^2 = A + 2I_3$. Contrôler ensuite par le calcul direct de A^2.

b. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - I_3)$, sans utiliser la méthode du pivot. Écrire A^{-1} et vérifier.

c. Exprimer A^3 et A^4 comme combinaisons de A et de I_3.

2. Pour tout réel a, on pose

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

a. Échelonner $M(a)$ par la méthode du pivot, en notant les opérations.

b. Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels $M(a)$ est inversible.

c. Pour chaque valeur de a où $M(a)$ n'est pas inversible, donner une colonne $X \neq 0$ telle que $M(a)X = 0$, et la vérifier.

Exercice 8 ★★ Vrai ou faux sur les matrices

Notions : Calcul matriciel : somme, produit, transposée, puissances, Matrices inversibles et calcul de l'inverse

Dans cet exercice, n désigne un entier au moins égal à 1, et A, B, C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une affirmation est **vraie** si elle est vraie pour toute taille n et pour toutes matrices vérifiant ses hypothèses ; elle est **fausse** s'il existe une taille n et des matrices qui vérifient les hypothèses sans vérifier la conclusion.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer ; si elle est fausse, donner un contre-exemple explicite et le vérifier par le calcul.

1. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

2. Si $A^2 = I_n$, alors $A = I_n$ ou $A = -I_n$.

3. Si A est inversible et si $AB = AC$, alors $B = C$.

4. Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ est inversible.

5. Si $AB = 0_n$, alors $A = 0_n$ ou $B = 0_n$.

6. Si A est inversible, alors $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Exercice 9 ★ Sous-espace ou pas

Notions : Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré, Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Pour chacun des huit ensembles suivants, dire s'il est un sous-espace vectoriel de l'espace indiqué.

- Pour une réponse **oui**, rédiger une démonstration complète.
- Pour une réponse **non**, donner un contre-exemple explicite, avec des valeurs numériques, et le vérifier.

a. $P = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\,\}$, dans $\mathbb{R}^3$.

b. $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\,\}$, dans $\mathbb{R}^2$.

c. $X = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\,\}$, dans $\mathbb{R}^2$.

d. $Y = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\,\}$, dans $\mathbb{R}^2$.

e. $F_1 = \{\,f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\,\}$, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

f. $F_2 = \{\,f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\,\}$, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

g. $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \{\,M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^\top = M\,\}$, l'ensemble des matrices symétriques, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

h. $\mathcal{C} = \{\,u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ converge}\,\}$, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 10 ★★★ Les suites de Fibonacci forment un plan

Notions : Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré, Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes, Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles, muni de l'addition terme à terme et de la multiplication d'une suite par un réel. On considère l'ensemble

$$S = \{\, u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \,\}.$$

La **suite de Fibonacci** est la suite F de S définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

On ne se sert dans cet exercice d'aucune méthode de résolution des récurrences : le but est au contraire de la retrouver par l'algèbre linéaire.

1. a. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b. L'ensemble T des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

2. On considère l'application $\varphi : S \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto (u_0, u_1)$.

a. Montrer que φ est linéaire.

b. Montrer que φ est injective, puis qu'elle est surjective.

c. On note σ et τ les suites de S telles que $\varphi(\sigma) = (1, 0)$ et $\varphi(\tau) = (0, 1)$. Écrire les six premiers termes de chacune. Montrer que (σ, τ) est une base de S, donner les coordonnées d'une suite $u \in S$ dans cette base, et en déduire la dimension de S.

3. Pour un réel q, on note g_q la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec la convention $q^0 = 1$. Montrer que $g_q \in S$ si et seulement si $q^2 = q + 1$, puis déterminer les deux réels $\alpha > \beta$ qui conviennent.

4. Montrer que (g_α, g_β) est une base de S. Qu'en déduit-on pour une suite quelconque de S ?

5. a. Déterminer les coordonnées de F dans la base (g_α, g_β), en déduire une expression de F_n en fonction de n, et la vérifier pour $n = 2$ et $n = 3$.

b. Quelle est la suite L de S dont les coordonnées dans la base (g_α, g_β) sont $(1, 1)$? Donner ses six premiers termes. Que remarque-t-on ?

Exercice 11 ★★ Des équations à Vect, et retour

Notions : Familles génératrices, Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré

Un sous-espace vectoriel se décrit de deux manières : par des **équations** que vérifient ses vecteurs, ou comme **sous-espace engendré** par une famille. L'exercice fait passer de l'une à l'autre dans les deux sens.

1. On pose $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer qu'un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ appartient à F si et seulement si $x - y + z = 0$.

b. Le vecteur $(1, 0, 0)$ appartient-il à F ? La famille (u_1, u_2) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?

2. On considère

$$G = \{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \ \text{ et } \ x + 2y + t = 0 \,\}.$$

a. Déterminer deux vecteurs g_1, g_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $G = \mathrm{Vect}(g_1, g_2)$. En déduire que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b. Vérifier que le vecteur $(3, -2, 1, 1)$ appartient à G, et l'écrire comme combinaison linéaire de g_1 et g_2.

3. On pose $D = \mathrm{Vect}((1, 2, 1), (2, 4, 2))$. Montrer que D est une droite vectorielle, en donner un vecteur directeur, et la décrire par un système de deux équations.

4. On pose $w = (1, 2, 1)$.

a. Montrer que la famille (u_1, u_2, w) engendre F.

b. Cette famille est-elle libre ?

c. La droite D de la question 3 est-elle contenue dans F ?

Exercice 12 ★ La liberté se teste par un système

Notions : Familles libres et familles liées, Rang d'une famille de vecteurs et rang d'une matrice

Pour chacune des familles suivantes, dire si elle est libre ou liée en résolvant un système par la méthode du pivot. Lorsqu'elle est liée, donner une relation de dépendance linéaire explicite et la vérifier. Donner enfin le rang de chaque famille.

1. Dans $\mathbb{R}^3$:

a. $\mathcal{F}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$;

b. $\mathcal{F}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (0, 1, -1)$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$:

a. $\mathcal{F}_3 = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ avec $w_1 = (1, 1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 1)$ et $w_4 = (1, 0, 0, 1)$;

b. $\mathcal{F}_4 = (w_1, w_2, w_3)$ avec $w_1 = (1, 0, 1, 2)$, $w_2 = (0, 1, 1, 1)$, $w_3 = (1, 1, 0, 0)$. Cette famille peut-elle engendrer $\mathbb{R}^4$?

3. Soit m un réel. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{G}_m = (a, b, c_m)$ avec

$$a = (1, 1, 1), \qquad b = (1, 2, 4), \qquad c_m = (1, 3, m).$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{G}_m$ est liée, donner dans ce cas une relation de dépendance, et le rang de $\mathcal{G}_m$ selon m.

Exercice 13 ★★ Familles de fonctions

Notions : Familles libres et familles liées, Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques

On note E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel. Son vecteur nul 0_E est la fonction nulle, et l'on note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1.

1. Soient a, b deux réels. Écrire, avec un quantificateur, ce que signifie l'égalité $a\cos + b\sin = 0_E$. Démontrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre, en rédigeant la démonstration complète.

2. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on note f_k la fonction $x \mapsto e^{kx}$. Démontrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre, en étudiant une limite en $+\infty$.

3. La famille $(\mathbf{1}, \cos^2, \sin^2)$ est-elle libre ?

4. On note g la fonction $x \mapsto |x|$ et id la fonction $x \mapsto x$.

a. La famille (g, id) est-elle libre dans E ?

b. Même question dans l'espace des fonctions de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, pour les restrictions de g et de id à $[0, +\infty[$.

5. On note h la fonction $x \mapsto \cos(x + 1)$. La famille $(\cos, \sin, h)$ est-elle libre ?

Exercice 14 ★★ Fabriquer des familles à partir d'une famille libre

Notions : Familles libres et familles liées, Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques

Soit E un espace vectoriel réel, et soit (u, v, w) une famille **libre** de trois vecteurs de E. On ne sait rien d'autre de ces vecteurs : les démonstrations ne doivent utiliser que la liberté de (u, v, w).

1. Montrer que la famille $(u,\ u+v,\ u+v+w)$ est libre.

2. a. Montrer que la famille $(u-v,\ v-w,\ w-u)$ est liée.

b. Montrer que ses vecteurs sont pourtant deux à deux non colinéaires, et que la famille $(u-v,\ v-w)$ est libre.

3. Soit a un réel. Montrer que la famille

$$(u+av,\ v+aw,\ w+au)$$

est libre si et seulement si $a \neq -1$. Que se passe-t-il pour $a = -1$?

4. Montrer par un exemple dans $\mathbb{R}^2$ que la conclusion de la question 1 peut être fausse si l'on ne suppose plus (u, v, w) libre.

Exercice 15 ★★ Degrés échelonnés et coordonnées dans R3[X]

Notions : Familles libres et familles liées, Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète

On rappelle que $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, est un espace vectoriel de dimension 4, dont la base canonique est $(1, X, X^2, X^3)$. Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre. On raisonnera par l'absurde, en considérant le plus grand indice d'un coefficient non nul.

2. En déduire que la famille $\mathcal{B} = (1,\ X-1,\ (X-1)^2,\ (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Soit $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$, en écrivant $X = (X-1) + 1$. Contrôler le résultat.

4. On considère la famille $\mathcal{C} = (1+X,\ X+X^2,\ X^2+X^3,\ X^3)$.

a. Les degrés de ses polynômes sont-ils échelonnés ? La question 1 s'applique-t-elle ?

b. La famille $\mathcal{C}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

c. Le cas échéant, déterminer les coordonnées du polynôme constant 1, puis celles de P, dans $\mathcal{C}$.

Exercice 16 ★★★ Cinq démonstrations fausses à corriger

Notions : Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques, Familles libres et familles liées, Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré, Théorème du rang et ses conséquences

Les cinq textes ci-dessous sont des démonstrations rédigées, telles qu'on les lit sur une copie. Chacune est fausse ou incomplète. Pour chacune, répondre aux quatre questions suivantes.

— La conclusion annoncée est-elle vraie ?
— Quelle ligne exactement est fautive ?
— De quel type d'erreur s'agit-il ?
— Écrire la rédaction correcte si la conclusion est vraie, ou donner un contre-exemple si elle est fausse.

(a) Affirmation : dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u, v, w) formée de $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 2)$ est libre.

1. Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires : un multiple de u a sa deuxième coordonnée nulle, ce qui n'est pas le cas de v, et un multiple de v a sa première coordonnée nulle, ce qui n'est pas le cas de u.
2. De la même façon, u et w ne sont pas colinéaires, et v et w ne sont pas colinéaires.
3. Les trois vecteurs u, v, w sont donc deux à deux non colinéaires.
4. Une famille de vecteurs deux à deux non colinéaires est libre, donc (u, v, w) est libre.

(b) Affirmation : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

1. Comme F est un sous-espace vectoriel, $0_E \in F$, donc $0_E \in F \cup G$.
2. Soient $x, y \in F \cup G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $x + \lambda y \in F \cup G$.
3. Premier cas : x et y appartiennent à F. Comme F est un sous-espace vectoriel, $x + \lambda y \in F$, donc $x + \lambda y \in F \cup G$.
4. Second cas : x et y appartiennent à G. De même, $x + \lambda y \in G$, donc $x + \lambda y \in F \cup G$.
5. Dans tous les cas, $x + \lambda y \in F \cup G$: la partie $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Affirmation : la famille (u, v, w) formée de $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (u, v, w) est formée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
2. L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.
3. Une famille de trois vecteurs d'un espace de dimension 3 engendre cet espace.
4. Donc (u, v, w) engendre $\mathbb{R}^3$.

(d) Affirmation : l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x,\ y,\ x + y)$ est surjective.

1. L'application f est linéaire, car chacune de ses coordonnées est une combinaison linéaire de x et de y.
2. Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker} f$. Alors $(x,\ y,\ x + y) = (0, 0, 0)$, donc $x = 0$ et $y = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, et f est injective.
3. D'après le théorème du rang, une application linéaire injective est surjective.
4. Donc f est surjective.

(e) Affirmation : dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u, v) formée de $u = (1, 2, 0)$ et $v = (0, 1, 3)$ est libre.

1. La famille (u, v) est libre lorsque la combinaison $au + bv$ ne peut être nulle que si $a = b = 0$.
2. Prenons $a = 0$ et $b = 0$.
3. Alors $au + bv = 0 \cdot (1, 2, 0) + 0 \cdot (0, 1, 3) = (0, 0, 0)$.
4. Les coefficients nuls donnent bien la combinaison nulle, donc la famille (u, v) est libre.

Exercice 17 ★ Base et dimension d'un sous-espace de R4

Notions : Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète

On considère

$$F = \{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0 \ \text{ et } \ y - z + t = 0 \,\},$$

et l'on note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en déterminer une base (f_1, f_2) et donner sa dimension.

2. Vérifier que $w = (-3, -1, 1, 2)$ appartient à F, et donner ses coordonnées dans la base (f_1, f_2).

3. a. Le vecteur $u = (-1, 0, 1, 1)$ peut-il servir à compléter (f_1, f_2) en une famille libre de trois vecteurs ?

b. Compléter (f_1, f_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide de vecteurs de la base canonique, en vérifiant la liberté de la famille obtenue.

4. Déterminer les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3, 4)$ dans la base de $\mathbb{R}^4$ obtenue.

Exercice 18 ★★ Matrices symétriques, antisymétriques, triangulaires

Notions : Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète, Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les trois ensembles suivants :

- S_3, l'ensemble des matrices **symétriques**, c'est-à-dire telles que $M^\top = M$;
- A_3, l'ensemble des matrices **antisymétriques**, c'est-à-dire telles que $M^\top = -M$;
- T_3^+, l'ensemble des matrices **triangulaires supérieures**, c'est-à-dire dont tous les coefficients situés sous la diagonale sont nuls.

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1. On rappelle que la famille des neuf matrices E_{ij} est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension 9.

1. Montrer que S_3, A_3 et T_3^+ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Écrire la forme générale d'une matrice de S_3. En déduire une base de S_3 et sa dimension.

3. Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. En déduire une base de A_3 et sa dimension.

4. Donner une base de T_3^+ et sa dimension.

5. Montrer que $S_3 \cap A_3 = \{0_3\}$.

6. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $M_s = \dfrac{1}{2}(M + M^\top)$ et $M_a = \dfrac{1}{2}(M - M^\top)$, puis vérifier que $M_s \in S_3$, que $M_a \in A_3$ et que $M_s + M_a = M$.

7. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ s'écrit **d'une seule manière** comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Comparer $\dim S_3 + \dim A_3$ et $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

8. Déterminer $S_3 \cap T_3^+$ et sa dimension.

Exercice 19 ★★★ Les carrés magiques d'ordre 3

Notions : Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète, Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauss

On dit qu'une matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est un **carré magique** s'il existe un réel s, appelé **somme magique** de M, tel que les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales de M aient toutes pour somme s :

$$\begin{aligned} s &= a+b+c = d+e+f = g+h+i = a+d+g \\ &= b+e+h = c+f+i = a+e+i = c+e+g. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des carrés magiques. Le plus ancien connu est le carré de Lo Shu, de somme magique 15 :

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si ses neuf coefficients vérifient un système linéaire homogène de sept équations, que l'on écrira.

3. Résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss, en ordonnant les inconnues $b, d, f, g, h, i, a, c, e$ (on pourra garder a, c et e au second membre). En déduire que $\mathcal{C}$ est de dimension 3, et en donner une base (P, Q, R). Vérifier que chacune des trois matrices obtenues est un carré magique et que la famille est libre.

4. Montrer que le coefficient central d'un carré magique vaut le tiers de sa somme magique. En déduire que les carrés magiques de somme magique nulle forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$, dont on donnera une base et la dimension.

5. Écrire le carré de Lo Shu comme combinaison linéaire de P, Q et R. On note J la matrice dont les neuf coefficients valent 1 : montrer que (P, Q, J) est aussi une base de $\mathcal{C}$, et y donner les coordonnées de L.

Exercice 20 ★★ Rang d'une famille, rang d'une matrice

Notions : Rang d'une famille de vecteurs et rang d'une matrice

> **Remarque**
>
> **Selon les facs.** Le calcul du rang d'une matrice par opérations élémentaires sur les lignes est vu dans ce chapitre dans certaines maquettes, et en L2 dans d'autres. Il est traité ici, avec la justification de son invariance.

On rappelle que le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace qu'elle engendre, et que le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes.

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ et $\mathcal{G} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, où

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,0,2), & v_2 &= (0,1,1,1),\\ v_3 &= (2,3,1,5), & v_4 &= (1,0,1,0),\\ u_1 &= (1,2,0,1), & u_2 &= (2,1,1,0),\\ u_3 &= (1,-1,1,-1), & u_4 &= (0,3,-1,2). \end{aligned}$$

Déterminer le rang de chacune par la méthode du pivot, en donner une base du sous-espace engendré, et écrire explicitement les relations de liaison obtenues. Deux vecteurs de $\mathcal{G}$ sont-ils colinéaires ?

2. Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & m+2 & m^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

a. Justifier qu'une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice ne change pas son rang, puis que le rang d'une matrice échelonnée est son nombre de lignes non nulles.

b. Déterminer le rang de A_m selon les valeurs de m. Pour quelles valeurs de m les colonnes de A_m engendrent-elles $\mathbb{R}^3$?

3. On prend $m = 1$. On note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A_1 et R_1, R_2, R_3 ses lignes.

a. Exprimer C_3 et C_4 en fonction de C_1 et C_2, et donner une base de $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

b. Déterminer le rang de la famille (R_1, R_2, R_3) de $\mathbb{R}^4$ et le comparer à $\operatorname{rg} A_1$.

Exercice 21 ★ Linéaire ou pas

Notions : Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes

1. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $f(0_E) = 0_F$.

2. Pour chacune des huit applications suivantes, dire si elle est linéaire. Si oui, le démontrer ; sinon, donner un contre-exemple explicite et le vérifier par le calcul.

a. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x)$.

b. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, x)$.

c. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$.

d. $f_4 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$.

e. $f_5 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P^2$.

f. $f_6 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^\top$.

g. $f_7 : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$, où $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

h. $f_8 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Parmi les applications linéaires trouvées, lesquelles sont des endomorphismes ? des formes linéaires ? Le critère de la question 1 permet-il d'écarter toutes les applications non linéaires ?

Exercice 22 ★★ Noyau et image d'une application de R4 dans R3

Notions : Noyau, image, injectivité et surjectivité, Théorème du rang et ses conséquences, Rang d'une famille de vecteurs et rang d'une matrice

On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t,\ x - y + z - t,\ 2x + 2z).$$

On admet que f est linéaire (la vérification est celle de l'exercice 21). On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et sa dimension.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ et le rang de f. Vérifier le théorème du rang.

3. Donner une équation de $\mathrm{Im} f$ dans $\mathbb{R}^3$.

4. L'application f est-elle injective ? surjective ?

5. On pose $b = (4, 2, 6)$.

a. Vérifier que $b \in \mathrm{Im} f$, et trouver un vecteur v_0 tel que $f(v_0) = b$.

b. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(v) = b$, d'inconnue $v \in \mathbb{R}^4$, est $\{\, v_0 + w \mid w \in \mathrm{Ker} f \,\}$. L'écrire sous forme paramétrée et vérifier le résultat par le calcul.

c. L'équation $f(v) = (1, 0, 0)$ a-t-elle des solutions ?

Exercice 23 ★★ La dérivation dans R3[X]

Notions : Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes, Noyau, image, injectivité et surjectivité, Matrice d'une application linéaire dans des bases

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et D l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe son polynôme dérivé P'.

1. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} D$ et $\operatorname{Im} D$, en donnant une base de chacun. L'endomorphisme D est-il injectif ? surjectif ?

3. Écrire la matrice $N = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(D)$. Calculer N^2, N^3 et N^4. En déduire que $D^4 = 0$ et que $D^3 \neq 0$, et interpréter.

4. On pose $\varphi = \mathrm{id} + D$, c'est-à-dire $\varphi(P) = P + P'$, et $\psi = \mathrm{id} - D + D^2 - D^3$.

a. Montrer que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa réciproque.

b. Écrire les matrices de φ et de ψ dans la base $\mathcal{B}$ et vérifier le résultat de la question a par un produit matriciel.

5. Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P + P' = X^3$, et le vérifier.

Exercice 24 ★★★ Ce que le théorème du rang interdit

Notions : Théorème du rang et ses conséquences

On rappelle le théorème du rang : si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}f$ est de dimension finie et

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rg} f.$$

1. Montrer qu'il n'existe aucune application linéaire injective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, montrer que si E et F sont de dimension finie et s'il existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ injective, alors $\dim E \leqslant \dim F$.

2. Montrer qu'il n'existe aucune application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Énoncer et démontrer la généralisation.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \text{ injectif} \iff f \text{ surjectif} \iff f \text{ bijectif}.$$

4. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les endomorphismes $D : P \mapsto P'$ et $M : P \mapsto XP$.

a. Montrer que D est surjectif mais pas injectif.

b. Montrer que M est linéaire, injectif, mais pas surjectif.

c. Pourquoi ces deux exemples ne contredisent-ils pas la question 3 ?

5. Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

a. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}\, g$.

b. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}f)$, puis que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg} f$. On appliquera le théorème du rang à la restriction de g à $\mathrm{Im}f$.

c. Montrer par un exemple dans $\mathbb{R}^2$ que l'inégalité $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg} f, \mathrm{rg}\, g)$ peut être stricte.

6. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ n'est jamais inversible. Vérifier sur

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et montrer que, pour ces matrices, BA est inversible.

Exercice 25 ★★★ Noyau égal à l'image

Notions : Théorème du rang et ses conséquences, Noyau, image, injectivité et surjectivité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$.

1. On suppose que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

a. Montrer que n est pair, et que $\mathrm{rg} f = \dfrac{n}{2}$.

b. Montrer que $f^2 = 0$.

c. En déduire qu'il n'existe aucun endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), on pose $f(x, y, z, t) = (z, t, 0, 0)$.

a. Écrire la matrice A de f dans la base canonique et calculer A^2.

b. Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$, et vérifier que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

3. Même question pour l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ de matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique : calculer B^2, puis déterminer $\mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g$.

4. On étudie la réciproque de la question 1b.

a. Montrer que si $f^2 = 0$, alors $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.

b. Montrer par un contre-exemple dans $\mathbb{R}^4$ que $f^2 = 0$ n'entraîne pas $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

c. Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$ si et seulement si $f^2 = 0$ et $\mathrm{rg} f = \dfrac{n}{2}$.

Exercice 26 ★★★★ Noyaux et images itérés

Notions : Noyau, image, injectivité et surjectivité, Théorème du rang et ses conséquences

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^0 = \mathrm{id}_E$ et $f^{k+1} = f \circ f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et l'on note, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$N_k = \operatorname{Ker} f^k, \qquad I_k = \operatorname{Im} f^k.$$

En particulier $N_0 = \{0_E\}$ et $I_0 = E$. On admet que $f^j \circ f^l = f^{j+l}$ pour tous entiers j, l.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.

2. On suppose qu'il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$. Montrer que $N_{k+1} = N_{k+2}$, puis que $N_m = N_k$ pour tout entier $m \geqslant k$.

3. On suppose dans cette question que E est de dimension finie n.

a. Montrer qu'il existe un entier $k \leqslant n$ tel que $N_k = N_{k+1}$. On note p le plus petit d'entre eux.

b. Montrer que la suite (N_k) est strictement croissante jusqu'au rang p, puis constante, et qu'il en est de même, dans l'ordre décroissant, de la suite (I_k), avec le même rang p.

4. On revient à un espace E quelconque. Montrer que

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2.$$

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

a. Calculer A^2 et A^3, puis A^k pour tout $k \geqslant 2$.

b. Déterminer $\operatorname{Ker} u^k$ et $\operatorname{Im} u^k$ pour $k = 1, 2, 3$, avec leurs dimensions. Quel est l'entier p de la question 3 ?

c. Vérifier sur cet exemple le résultat de la question 4, pour u puis pour u^2.

Exercice 27 ★ Écrire la matrice d'une application linéaire

Notions : Matrice d'une application linéaire dans des bases

Les trois parties sont indépendantes. Elles demandent le même geste dans trois espaces différents.

1. Une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ 3x - y + 4z).$$

a. Écrire la matrice F de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa taille ?

b. Calculer $f(2, 1, -1)$ par un produit matriciel, puis contrôler avec la formule de f.

2. Une application définie sur des polynômes. On considère

$$\psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(P) = (P(0),\ P(1),\ P'(0)).$$

a. Montrer que ψ est linéaire.

b. Écrire la matrice Ψ de ψ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Calculer $\psi(2 - 3X + 5X^2)$ par un produit matriciel, et contrôler par un calcul direct.

d. Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\psi(Q) = (1, 0, 2)$. Est-il unique ?

3. La transposition. On considère $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $T(M) = M^\top$, et la base $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où E_{ij} est la matrice dont le seul coefficient non nul vaut 1 et se trouve en ligne i, colonne j.

a. Justifier que T est linéaire, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$.

b. Calculer le carré de cette matrice. Était-ce prévisible ?

c. Retrouver la transposée de $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par un produit matriciel.

Exercice 28 ★★ Une application définie sur une base

Notions : Matrice d'une application linéaire dans des bases, Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(e_1) = (1,0,1), \qquad f(e_2) = (0,1,1), \qquad f(e_3) = (1,1,2).$$

a. Pourquoi ces trois conditions définissent-elles une application linéaire, et une seule ? Écrire sa matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

b. Calculer $f(2,-1,3)$, puis $f(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque.

c. Déterminer une base du noyau de f. L'application f est-elle injective ? Quel est son rang ?

2. On pose $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. En déduire qu'il existe une unique application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$g(u_1) = (1,1,0), \qquad g(u_2) = (2,1,1), \qquad g(u_3) = (2,2,2).$$

c. Exprimer e_1, e_2, e_3 à l'aide de u_1, u_2, u_3, et en déduire la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont $g(u_1)$, $g(u_2)$, $g(u_3)$ est-elle la matrice de g dans la base canonique ?

3. Calculer la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{C}$ et vérifier le résultat sur le vecteur $(2,-1,3)$. Calculer aussi AB : que représente ce produit ?

Exercice 29 ★★ Changer de base pour calculer des puissances

Notions : Matrice de passage et formules de changement de base, Matrice d'une application linéaire dans des bases

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$. On pose

$$u_1 = (1, 0, 1), \qquad u_2 = (1, 1, 1), \qquad u_3 = (0, 1, 1).$$

1. Écrire la matrice P dont les colonnes sont les coordonnées de u_1, u_2, u_3 dans $\mathcal{C}$. Montrer par la méthode de Gauss-Jordan que P est inversible et calculer P^{-1}. En déduire que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et que $P = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}'}$.

2. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$, et en déduire, sans autre calcul, la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Vérifier ce résultat en calculant $P^{-1}AP$.

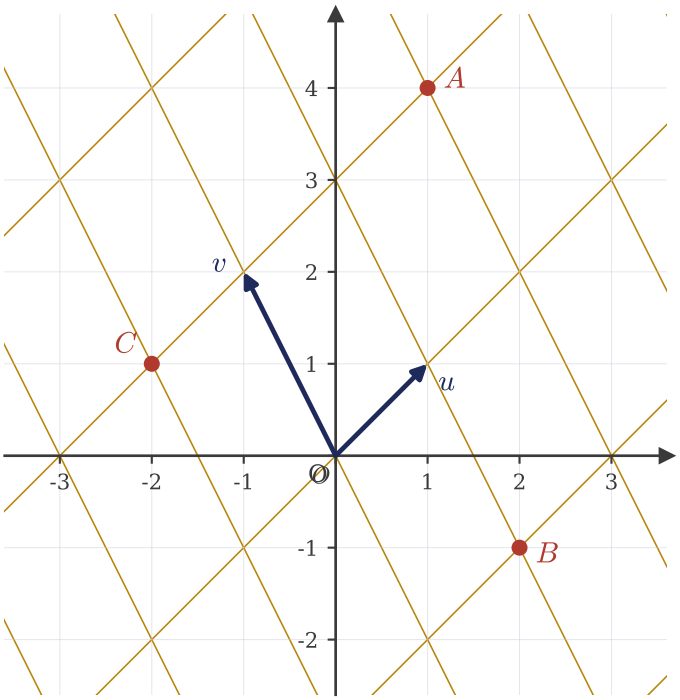
3. Montrer que $A = PA'P^{-1}$, puis que $A^n = PA'^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

4. En déduire l'expression explicite de A^n en fonction de n. Contrôler le résultat pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, en calculant A^2 directement.

Exercice 30 ★ Coordonnées dans deux bases

Notions : Matrice de passage et formules de changement de base, Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète

Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$, on considère les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (-1, 2)$. La figure représente, tracés depuis l'origine O, les vecteurs u et v, la grille oblique formée par les droites $O + su + tv$ où s ou t est entier, et en fond très clair la grille canonique. Trois points A, B, C y sont placés.



1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Lire sur la grille oblique les coordonnées de A, B et C dans la base $\mathcal{B}'$ (on identifie un point M au vecteur $\overrightarrow{OM}$).

3. Écrire la matrice de passage $P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}'}$. En déduire, par la formule $X = PX'$, les coordonnées canoniques de A, B et C, et contrôler sur la grille canonique.

4. On considère le point $W = (3, 0)$, qui n'est pas tracé. Calculer P^{-1}, puis les coordonnées de W dans $\mathcal{B}'$. Vérifier le résultat, puis placer W sur la figure.

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 0)$, $\varepsilon_2 = (1, 0, 1)$ et $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$, et $\mathcal{B}'' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

a. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre par le pivot le système qui donne les réels α, β, γ tels que $(a, b, c) = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3$. En déduire que $\mathcal{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire $Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}''}$ et Q^{-1}.

b. Le vecteur x a pour coordonnées $(2, -1, 3)$ dans $\mathcal{B}''$. Quelles sont ses composantes ?

c. Quelles sont les coordonnées de $(5, 3, 4)$ dans $\mathcal{B}''$?

Exercice 31 ★★ Somme directe et projection dans l'espace

Notions : Somme directe, supplémentaires, projecteurs et symétries

Selon les facs, la somme directe, les sous-espaces supplémentaires et les projecteurs sont vus en L1 ou repoussés en L2 ; ils sont traités dans ce chapitre.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan Π d'équation $x + y + z = 0$ et la droite $D = \mathrm{Vect}(d)$, où $d = (1, 2, 3)$.

1. Donner une base de Π. Le vecteur d appartient-il à Π ?

2. Soit $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique couple $(w_\Pi, w_D) \in \Pi \times D$ tel que $w = w_\Pi + w_D$, et donner w_Π et w_D en fonction de a, b, c. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$. Retrouver ce résultat à l'aide des dimensions.

3. Décomposer le vecteur $w_0 = (1, 0, 5)$.

4. On note p la projection sur Π parallèlement à D, c'est-à-dire l'application $w \mapsto w_\Pi$. Écrire la matrice M_p de p dans la base canonique et vérifier que $M_p^2 = M_p$. Que valent $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$?

5. On note s la symétrie par rapport à Π parallèlement à D, définie par $s(w) = w_\Pi - w_D$. Exprimer s à l'aide de p, écrire sa matrice M_s dans la base canonique, vérifier que $M_s^2 = I_3$ et calculer $s(w_0)$.

6. Écrire les matrices de p et de s dans une base de $\mathbb{R}^3$ formée d'une base de Π suivie de d. Pourquoi ces matrices s'obtiennent-elles sans calcul ?

7. On remplace D par la droite $D' = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 0)\big)$, qui est aussi un supplémentaire de Π. Calculer le projeté de w_0 sur Π parallèlement à D'. Que peut-on en conclure ?

Exercice 32 ★★★ Un projecteur se reconnaît à son carré

Notions : Somme directe, supplémentaires, projecteurs et symétries, Noyau, image, injectivité et surjectivité

Selon les facs, la somme directe et les projecteurs sont vus en L1 ou en L2 ; ils sont traités dans ce chapitre.

Rappel. Si $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, et la **projection sur F parallèlement à G** est l'application $x \mapsto x_F$. Elle est linéaire et vérifie $p \circ p = p$. Cet exercice démontre la réciproque.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie ou non, et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$: un vecteur est dans l'image de p si et seulement si p le laisse fixe.

2. Montrer que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0_E\}$.

3. Montrer que tout $x \in E$ s'écrit $x = (x - p(x)) + p(x)$ avec $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $p(x) \in \operatorname{Im} p$. En déduire que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

4. Conclure que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

5. *Application.* Soit $n \geqslant 1$ et $q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $q(M) = \dfrac{1}{2}(M + M^\top)$. Montrer que q est linéaire et que $q \circ q = q$. Déterminer $\operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker} q$, et en déduire une décomposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en somme directe. Décomposer $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

6. *Une matrice.* On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice, dans la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2. En déduire que f est une projection, dont on précisera le plan sur lequel elle projette (par une équation et une base) et la direction parallèlement à laquelle elle projette. Décomposer le vecteur $(1, 2, 3)$ selon ces deux sous-espaces.

Exercice 33 ★★★ Un endomorphisme des matrices carrées d'ordre 2

Notions : Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes, Noyau, image, injectivité et surjectivité, Matrice d'une application linéaire dans des bases, Théorème du rang et ses conséquences

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = AM - MA.$$

On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où E_{ij} a un seul coefficient non nul, égal à 1, en ligne i et colonne j.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculer $\varphi(M)$. En déduire la matrice $\Phi = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

3. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \mathrm{Vect}(I_2, A)$. Que représente ce noyau ?

4. En déduire le rang de φ, puis une base de $\operatorname{Im}\varphi$. Décrire les matrices de $\operatorname{Im}\varphi$.

5. Existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AM - MA = I_2$?

6. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ n'est pas réduit à la matrice nulle, alors que $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = 4$. Le théorème du rang l'interdisait-il ?

Exercice 34 ★★★★ Endomorphismes de carré nul

Notions : Théorème du rang et ses conséquences, Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète, Matrice d'une application linéaire dans des bases, Matrice de passage et formules de changement de base

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$, et 0 l'application nulle de E dans E.

1. Montrer que $f^2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.

2. On suppose $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg} f \leqslant \dfrac{n}{2}$.

3. Dans cette question et la suivante, $n = 3$, $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Montrer que $\mathrm{rg} f = 1$ et $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.

4. *Une base adaptée.*

a. Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0_E$, et montrer que $f(x) \in \mathrm{Ker} f$.

b. Justifier qu'il existe $y \in \mathrm{Ker} f$ tel que $(f(x), y)$ soit une base de $\mathrm{Ker} f$.

c. Montrer que $\mathcal{B}' = (f(x), y, x)$ est une base de E.

d. Écrire la matrice $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Combien a-t-elle de coefficients non nuls ?

5. *Application.* On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier que $A^2 = 0_3$ et déterminer le rang de A.

b. Appliquer la construction de la question 4 avec $x = e_1$: donner $f(x)$, une équation de $\mathrm{Ker} f$, un vecteur y convenable, et la matrice de passage $P = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}'}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

c. Vérifier que $AP = PN$, et en déduire une expression de A à l'aide de P, N et P^{-1}.