Algèbre linéaire : systèmes, matrices et espaces vectoriels

Fiche d'exercices corrigés — L1 maths

Difficulté : ★ application directe · ★★ standard · ★★★ approfondissement · ★★★★ défi.

Un conseil : cherchez d'abord, le corrigé ensuite — c'est là que ça progresse.

Exercice 1 ★ Trois systèmes, trois issues

Notions : Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauss

On considère les trois systèmes suivants, d'inconnues réelles x, y, z.

$$(S_1)\quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$$

$$(S_2)\quad \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+z=5 \\ x+2y+2z=4 \end{cases}$$

$$(S_3)\quad \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+3z=4 \\ 3x+y+4z=2 \end{cases}$$

1. Résoudre chacun des trois systèmes par la méthode du pivot de Gauss. À chaque étape, noter l'opération effectuée sur les lignes. Écrire l'ensemble des solutions sous la forme d'un ensemble, paramétré s'il le faut.

2. Pour (S_1) et (S_2), vérifier le résultat en reportant la solution trouvée dans le système de départ (pour (S_2), la vérification se fait pour toute valeur du paramètre).

3. Pour (S_3), repérer sur les équations de départ la relation entre les premiers membres qui explique le résultat.

4. Chaque équation d'un de ces systèmes est l'équation d'un plan de l'espace rapporté à un repère. Interpréter géométriquement, en une phrase, chacun des trois résultats.

Corrigé

Le principe, commun aux trois. La méthode du pivot remplace le système par un système **équivalent** (mêmes solutions) et **échelonné**, c'est-à-dire où chaque ligne commence par strictement plus d'inconnues absentes que la précédente. On n'utilise que des opérations qu'on peut défaire : échanger deux lignes, multiplier une ligne par un réel **non nul**, ajouter à une ligne un multiple d'une **autre** ligne. Une fois le système échelonné, on lit le nombre de solutions, puis on remonte de la dernière équation vers la première.

1. Le système (S_1) : une solution unique

On prend la première équation comme ligne pivot, et son coefficient 1 devant x comme pivot. On élimine x des lignes 2 et 3 :

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \\ -y-3z=-11 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ -2y+z=-1 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

Le détail de la deuxième ligne : $(2x+y-z)-2(x+y+z)=-y-3z$ et $1-2\times 6=-11$. Celui de la troisième : $(x-y+2z)-(x+y+z)=-2y+z$ et $5-6=-1$.
On prend ensuite le coefficient -1 de y dans la ligne 2 comme pivot, et on élimine y de la ligne 3 :

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -y-3z=-11 \\ \qquad 7z=21 \qquad L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$

En effet $(-2y+z)-2(-y-3z)=7z$ et $-1-2\times(-11)=21$.
Le système est échelonné, et chacune des trois inconnues porte un pivot non nul : il a donc une solution et une seule. On la trouve en **remontant**.

— La ligne 3 donne $z=\dfrac{21}{7}=3$.
— La ligne 2 donne $-y=-11+3z=-11+9=-2$, donc $y=2$.
— La ligne 1 donne $x=6-y-z=6-2-3=1$.

L'ensemble des solutions de (S_1) est

$$\mathcal{S}_1=\{(1,2,3)\}.$$

1. Le système (S_2) : une infinité de solutions

Mêmes premières opérations, avec la ligne 1 comme pivot :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ \quad y+3z=3 \qquad L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \quad y+3z=3 \qquad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

Détail : $(2x+3y+z)-2(x+y-z)=y+3z$ et $5-2=3$; $(x+2y+2z)-(x+y-z)=y+3z$ et $4-1=3$. Les lignes 2 et 3 sont identiques, et l'opération $L_3 \leftarrow L_3-L_2$ donne

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ \quad y+3z=3 \\ \qquad 0=0 \qquad L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

La ligne $0=0$ est toujours vraie : elle n'impose rien et l'on peut l'effacer. Le système est équivalent au système échelonné de deux équations

$$x+y-z=1, \qquad y+3z=3.$$

Les pivots portent sur x et y ; l'inconnue z ne porte aucun pivot, elle est **libre** : on la prend comme paramètre. Posons $z=t$, avec $t\in\mathbb{R}$ quelconque, et remontons.

— La ligne 2 donne $y=3-3z=3-3t$.
— La ligne 1 donne $x=1-y+z=1-(3-3t)+t=-2+4t$.

L'ensemble des solutions de (S_2) est

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2 &= \{\,(-2+4t,\ 3-3t,\ t)\mid t\in\mathbb{R}\,\} \\ &= \{\,(-2,3,0)+t\,(4,-3,1)\mid t\in\mathbb{R}\,\}.\end{aligned}$$

Chaque valeur de t donne une solution, et deux valeurs distinctes de t donnent deux solutions distinctes (leurs troisièmes coordonnées diffèrent) : le système a une **infinité** de solutions, décrites par **un** paramètre. Par exemple $t=0$ donne $(-2,3,0)$ et $t=1$ donne $(2,0,1)$.
Attention. La ligne $0=0$ ne signifie ni « pas de solution » ni « le calcul est raté ». Elle signale qu'une des équations de départ était conséquence des autres, et c'est le nombre d'inconnues sans pivot qui compte les paramètres. D'autre part le paramétrage n'est pas unique : en prenant y comme paramètre, on décrirait le même ensemble avec d'autres formules. Deux étudiants peuvent avoir deux écritures différentes et tous deux raison ; on le contrôle en vérifiant que chaque solution de l'un satisfait le système.

1. Le système (S_3) : aucune solution

Avec la ligne 1 comme pivot :

$$\begin{cases} x+2y+z=1 & \\ \quad -5y+z=2 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \quad -5y+z=-1 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases}$$

Détail : $(2x-y+3z)-2(x+2y+z)=-5y+z$ et $4-2=2$; $(3x+y+4z)-3(x+2y+z)=-5y+z$ et $2-3=-1$. Puis :

$$\begin{cases} x+2y+z=1 & \\ \quad -5y+z=2 & \\ \qquad\quad 0=-3 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

La dernière ligne, $0=-3$, est fausse quelles que soient les valeurs de x, y, z. Comme le système obtenu est équivalent au système de départ, aucun triplet ne vérifie (S_3) :

$$\mathcal{S}_3=\emptyset.$$

Attention. Une ligne $0=-3$ n'est pas une erreur de calcul à corriger en recommençant : c'est la réponse. Le système est **incompatible**. On vérifie seulement que les opérations étaient justes (c'est l'objet de la question 3).

2. Vérifications

Pour (S_1), avec $(x,y,z)=(1,2,3)$:

$$1+2+3=6, \qquad 2\times 1+2-3=1, \qquad 1-2+2\times 3=5.$$

Les trois équations sont satisfaites.
Pour (S_2), avec $(x,y,z)=(-2+4t,3-3t,t)$ et t réel quelconque :

$$\begin{aligned} x+y-z&=(-2+4t)+(3-3t)-t=1,\\ 2x+3y+z&=(-4+8t)+(9-9t)+t=5,\\ x+2y+2z&=(-2+4t)+(6-6t)+2t=4. \end{aligned}$$

Les trois équations sont satisfaites pour **tout** t : les termes en t se compensent exactement. Vérifier pour t quelconque est plus sûr que vérifier une seule solution particulière, qui ne contrôlerait pas le vecteur $(4,-3,1)$.

3. L'origine de l'incompatibilité de (S_3)

Ajoutons les deux premières équations membre à membre :

$$(x+2y+z)+(2x-y+3z)=3x+y+4z.$$

Le premier membre de la troisième équation est donc la somme des deux premiers. Si un triplet vérifiait les deux premières équations, il vérifierait $3x+y+4z=1+4=5$, alors que la troisième exige $3x+y+4z=2$. Comme $5\neq 2$, c'est impossible, et l'on retrouve l'écart : $2-5=-3$, le second membre de la ligne $0=-3$.
Par contraste, dans (S_2), le premier membre de la troisième équation est la différence des deux premiers, $(2x+3y+z)-(x+y-z)=x+2y+2z$, et les seconds membres suivent la même relation, $5-1=4$: la troisième équation est alors une conséquence des deux autres, d'où la ligne $0=0$.

4. Interprétation géométrique

Résoudre un système de trois équations à trois inconnues, c'est chercher les points communs à trois plans.

- Pour (S_1) : les trois plans se coupent en **un seul point**, le point de coordonnées $(1, 2, 3)$.
- Pour (S_2) : les trois plans contiennent **une même droite**, celle qui passe par le point $(-2, 3, 0)$ et qui est dirigée par le vecteur $(4, -3, 1)$; le troisième plan contient la droite d'intersection des deux premiers.
- Pour (S_3) : les trois plans n'ont **aucun point commun**. Ils ne sont pourtant pas parallèles deux à deux : les premiers membres $(1, 2, 1)$, $(2, -1, 3)$, $(3, 1, 4)$ ne sont pas proportionnels deux à deux, donc deux quelconques de ces plans se coupent selon une droite. Les trois droites obtenues sont parallèles (toutes dirigées par $(-7, 1, 5)$, qui annule les trois premiers membres : $-7+2+5 = 0$, $-14-1+15 = 0$, $-21+1+20 = 0$) et distinctes (si deux d'entre elles étaient confondues, cette droite serait contenue dans les trois plans, qui auraient alors des points communs) : les trois plans forment comme les trois faces latérales d'un prisme.

Commentaire

Le système échelonné se lit comme un diagnostic. Si chaque inconnue porte un pivot et qu'aucune ligne $0 = c$ avec $c \neq 0$ n'apparaît, la solution est unique ; si une inconnue au moins est sans pivot et qu'aucune ligne n'est incompatible, il y a une infinité de solutions, avec autant de paramètres que d'inconnues sans pivot ; si une ligne $0 = c$ avec $c \neq 0$ apparaît, il n'y en a aucune. Les trois systèmes se ressemblaient à l'œil et se distinguaient seulement à l'échelonnement : c'est pourquoi on n'essaie pas de deviner, on échelonne.

Exercice 2 ★★ Un système à paramètre

Notions : Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauss

Soit m un réel. On considère le système, d'inconnues réelles x, y, z,

$$(S_m) \quad \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

1. Échelonner (S_m) par la méthode du pivot, en prenant la première équation comme ligne pivot et **sans diviser** par une expression qui dépend de m. Noter chaque opération, et factoriser les coefficients obtenus.

2. Résoudre (S_m) selon les valeurs de m. On donnera dans chaque cas l'ensemble des solutions, et l'on vérifiera la solution obtenue dans le cas général.

3. Sur une copie, on lit la rédaction suivante.

> « D'après l'échelonnement, la deuxième équation s'écrit $(m-1)y-(m-1)z=0$; en divisant par $m-1$, on obtient $y=z$. La troisième s'écrit $(1-m)(m+2)z=1-m$; en divisant par $1-m$, on obtient $(m+2)z=1$. Donc, si $m \neq -2$, le système a pour unique solution $\frac{1}{m+2}(1,1,1)$, et si $m=-2$, il n'a pas de solution. »

Quelle étape est fautive ? Montrer, par un exemple numérique explicite et vérifié, que la conclusion de la copie est fausse pour une valeur de m.

4. Retrouver le cas $m=-2$ sans pivot, en additionnant les trois équations.

Corrigé

1. Échelonnement

Le coefficient de x dans la première équation vaut 1, qui n'est jamais nul : c'est un pivot valable pour toutes les valeurs de m. On élimine x des lignes 2 et 3.

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 & \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-m)y + (1-m^2)z = 1-m & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{cases}$$

Détail de la ligne 2 : $(x+my+z)-(x+y+mz) = (m-1)y+(1-m)z$, et $1-1=0$. Détail de la ligne 3 : $(mx+y+z)-m(x+y+mz) = (1-m)y+(1-m^2)z$, et $1-m\times 1 = 1-m$. Pour éliminer y de la ligne 3 **sans diviser**, on remarque que son coefficient $1-m$ est l'opposé de celui de la ligne 2 : il suffit d'additionner.

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 & \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 & \\ (1-m)(m+2)z = 1-m & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

En effet les termes en y s'annulent, et le coefficient de z vaut

$$(1-m^2)+(1-m) = (1-m)(1+m)+(1-m) = (1-m)(1+m+1) = (1-m)(m+2).$$

Pourquoi ce système est équivalent à (S_m) pour toute valeur de m. Les trois opérations utilisées sont du type « ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne ». Une telle opération

se défait toujours (par $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + mL_1$, etc.), même quand le multiple dépend de m et même quand il est nul. C'est l'opération « multiplier une ligne par un nombre » qui demande une précaution : elle ne se défait que si ce nombre est **non nul**. Voilà pourquoi la consigne interdisait de diviser à ce stade.
On écrit enfin le système sous forme factorisée :

$$(S_m) \iff \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ (m-1)(y-z) = 0 \\ (1-m)(m+2)z = 1-m \end{cases}$$

2. Discussion

Les coefficients qui peuvent s'annuler sont $m-1$ et $m+2$. On distingue donc trois cas, et l'on commence par les valeurs **particulières**.
Cas $m = 1$. Les lignes 2 et 3 deviennent $0 = 0$ (tous leurs coefficients et seconds membres sont nuls). Le système se réduit à la seule équation $x + y + z = 1$, ce qui se voit aussi directement : pour $m = 1$, les trois équations de départ sont identiques. L'inconnue x porte le pivot, y et z sont libres. En posant $y = s$ et $z = t$,

$$\mathcal{S} = \{\, (1 - s - t,\ s,\ t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\}.$$

C'est un ensemble décrit par **deux** paramètres : géométriquement, les trois plans sont confondus, et l'ensemble des solutions est ce plan.
Cas $m \neq 1$. Alors $m - 1 \neq 0$ et $1 - m \neq 0$, et l'on a le droit de diviser :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 & \\ y - z = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{m-1} L_2 \\ (m+2)z = 1 & L_3 \leftarrow \frac{1}{1-m} L_3 \end{cases}$$

Sous-cas $m = -2$. La troisième ligne devient $0 \times z = 1$, c'est-à-dire $0 = 1$: le système est incompatible, $\mathcal{S} = \emptyset$.
Sous-cas $m \neq 1$ et $m \neq -2$. Le coefficient $m + 2$ est non nul, les trois inconnues portent un pivot, la solution est unique. On remonte :

- la ligne 3 donne $z = \dfrac{1}{m+2}$;
- la ligne 2 donne $y = z = \dfrac{1}{m+2}$;
- la ligne 1 donne

$$x = 1 - y - mz = 1 - \frac{1+m}{m+2} = \frac{(m+2) - (1+m)}{m+2} = \frac{1}{m+2}.$$

Donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{m+2}\,(1,1,1) \right\}.$$

Vérification. Chacune des trois équations de départ a pour coefficients 1, 1 et m, dans un certain ordre. En y reportant $x = y = z = \dfrac{1}{m+2}$, on obtient dans les trois cas

$$\frac{1+1+m}{m+2} = \frac{m+2}{m+2} = 1,$$

ce qui est bien le second membre.
Bilan.

Valeur de m	Ensemble des solutions
$m = 1$	le plan $\{\,(1-s-t,s,t) \mid (s,t)\in\mathbb{R}^2\,\}$
$m = -2$	$\emptyset$
$m \notin \{1,-2\}$	$\left\{\frac{1}{m+2}(1,1,1)\right\}$

3. La division par $m-1$

L'étape fautive est la première division, « en divisant par $m-1$, on obtient $y=z$ ». Diviser par $m-1$ suppose $m-1\neq 0$, c'est-à-dire $m\neq 1$, et la copie ne l'a pas supposé. La même faute se répète à la division par $1-m$. À partir de là, tout ce qui suit n'est établi que pour $m\neq 1$, alors que la conclusion est énoncée pour tout $m\neq -2$, donc en particulier pour $m=1$.
Type d'erreur : division par une quantité qui peut être nulle. Ce n'est pas une imprécision de détail : diviser par $m-1$, c'est ajouter en silence l'hypothèse $m\neq 1$, et l'on perd exactement le cas où le comportement du système change.
Le contre-exemple. Prenons $m=1$. La copie affirme que l'unique solution est $\frac{1}{3}(1,1,1)$. Or le triplet $(x,y,z)=(1,0,0)$ est lui aussi solution de (S_m) pour $m=1$: pour $m=1$, les trois équations s'écrivent $x+y+z=1$, et

$$1+0+0=1.$$

Comme $(1,0,0)\neq\frac{1}{3}(1,1,1)$, la solution n'est pas unique, et la conclusion de la copie est fausse pour $m=1$. On remarque d'ailleurs que $(1,0,0)$ ne vérifie pas $y=z$: la relation « $y=z$ » obtenue par la division est fausse pour cette valeur de m.
Le triplet $\frac{1}{3}(1,1,1)$ est bien une solution pour $m=1$; ce qui est faux, c'est le mot « unique ». La copie a trouvé une solution parmi une infinité.
La rédaction correcte consiste à séparer les cas **avant** de diviser : « si $m=1$, la ligne 2 est $0=0$ et … ; si $m\neq 1$, on peut diviser la ligne 2 par $m-1\neq 0$, ce qui donne $y=z$ ». C'est exactement la discussion de la question 2.

4. Le cas $m=-2$ par la somme des équations

Additionnons les trois équations de (S_m). Chaque inconnue apparaît avec les coefficients 1, 1 et m, d'où

$$(m+2)x+(m+2)y+(m+2)z=3, \qquad \text{soit} \qquad (m+2)(x+y+z)=3.$$

Pour $m=-2$, cette égalité devient $0=3$, ce qui est impossible : un triplet solution de (S_m) pour $m=-2$ vérifierait cette égalité, donc il n'en existe aucun. On retrouve $\mathcal{S}=\emptyset$.
Attention. L'équation obtenue par somme est une **conséquence** du système, pas un système équivalent : elle fournit une condition nécessaire. Elle suffit pour prouver une incompatibilité, mais ne permet pas de résoudre. Pour $m\neq -2$, elle donne seulement $x+y+z=\dfrac{3}{m+2}$, ce que la solution trouvée vérifie bien : $3\times\dfrac{1}{m+2}=\dfrac{3}{m+2}$.

Commentaire

Une discussion de système à paramètre se mène toujours dans le même ordre : échelonner sans diviser, repérer les coefficients en m qui peuvent s'annuler, traiter **d'abord** les valeurs où ils s'annulent, puis le cas général où l'on peut diviser. Les valeurs particulières, ici $m=1$ et $m=-2$, sont celles où un pivot disparaît ; ce sont précisément les valeurs où le système cesse d'avoir une solution unique, dans un sens (infinité de solutions) ou dans l'autre (aucune).

Exercice 3 ★★ Équilibrer une réaction chimique

Notions : Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauss

Équilibrer une équation de réaction chimique, c'est choisir des coefficients entiers strictement positifs tels que chaque élément chimique apparaisse avec le même nombre d'atomes de part et d'autre de la flèche : au cours de la réaction, aucun atome n'est créé ni détruit. Par exemple, dans H_2O il y a 2 atomes d'hydrogène et 1 atome d'oxygène, donc $d\,H_2O$ en apporte $2d$ et d.

1. La combustion du propane.

$$a\,C_3H_8 + b\,O_2 \longrightarrow c\,CO_2 + d\,H_2O$$

a. Pour chacun des éléments carbone (C), hydrogène (H) et oxygène (O), écrire l'équation qui traduit sa conservation. On obtient un système linéaire homogène d'inconnues a, b, c, d.

b. Résoudre ce système par la méthode du pivot, et montrer que l'ensemble de ses solutions réelles est une droite de $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire un ensemble de la forme $\{\,\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\,\}$ avec v un vecteur non nul.

c. En déduire les plus petits coefficients entiers strictement positifs qui équilibrent la réaction, en justifiant qu'il n'y en a pas de plus petits.

2. Le permanganate de potassium et l'acide chlorhydrique.

$$a\,KMnO_4 + b\,HCl \longrightarrow c\,KCl + d\,MnCl_2 + e\,Cl_2 + f\,H_2O$$

Reprendre les questions **a**, **b** et **c** avec les cinq éléments potassium (K), manganèse (Mn), oxygène (O), hydrogène (H) et chlore (Cl), et les six inconnues a, b, c, d, e, f. Vérifier le résultat en comptant les atomes de chaque élément des deux côtés.

3. Expliquer pourquoi, dans les deux cas, on pouvait affirmer **avant tout calcul** que le système avait une infinité de solutions.

Corrigé

1.a. Mise en équations

On compte, pour chaque élément, les atomes à gauche et à droite de la flèche, et l'on écrit qu'ils sont en même nombre.

- **Carbone.** À gauche, a molécules de C_3H_8 contiennent $3a$ atomes de carbone ; à droite, c molécules de CO_2 en contiennent c. D'où $3a = c$.
- **Hydrogène.** À gauche $8a$ (huit atomes par molécule de propane), à droite $2d$. D'où $8a = 2d$.
- **Oxygène.** À gauche $2b$, à droite $2c + d$ (deux par CO_2, un par H_2O). D'où $2b = 2c + d$.

En passant tout dans le premier membre, on obtient un système **homogène** (tous les seconds membres sont nuls) de trois équations à quatre inconnues.

1.b. Résolution par le pivot

L'ordre dans lequel on range les inconnues est libre. On choisit l'ordre (b, c, d, a), qui place en dernier l'inconnue a dont on va se servir comme paramètre, et l'on range les équations de façon à commencer par celle qui contient b :

$$\begin{cases} 2b - 2c - d = 0 & \text{(O)} \\ c - 3a = 0 & \text{(C)} \\ 2d - 8a = 0 & \text{(H)} \end{cases}$$

Le système est déjà échelonné : la ligne 1 commence par b, la ligne 2 par c, la ligne 3 par d. On simplifie la dernière ligne :

$$d - 4a = 0 \qquad L_3 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_3.$$

Les pivots portent sur b, c, d ; l'inconnue a est libre. On remonte, a étant un réel quelconque :

- la ligne 3 donne $d = 4a$;
- la ligne 2 donne $c = 3a$;
- la ligne 1 donne $2b = 2c + d = 6a + 4a = 10a$, donc $b = 5a$.

L'ensemble des solutions réelles est

$$\{\, (a, 5a, 3a, 4a) \mid a \in \mathbb{R} \,\} = \{\, a\,(1, 5, 3, 4) \mid a \in \mathbb{R} \,\}.$$

C'est l'ensemble des multiples du vecteur non nul $v = (1, 5, 3, 4)$: une droite de $\mathbb{R}^4$.

1.c. Les plus petits entiers

Les solutions sont les $a\,(1, 5, 3, 4)$. Pour qu'elles conviennent chimiquement, les quatre coefficients doivent être des entiers strictement positifs. Le premier coefficient est a lui-même : il faut donc que a soit un entier strictement positif. Réciproquement, si $a \in \mathbb{N}^*$, les quatre nombres a, $5a$, $3a$, $4a$ sont des entiers strictement positifs.
Les solutions acceptables sont donc exactement les $a\,(1, 5, 3, 4)$ avec $a \in \mathbb{N}^*$. Chacun des quatre coefficients est une fonction croissante de a, donc ils sont **tous** minimaux pour la plus petite valeur permise, $a = 1$:

$$\mathrm{C_3H_8} + 5\,\mathrm{O_2} \longrightarrow 3\,\mathrm{CO_2} + 4\,\mathrm{H_2O}.$$

Vérification. Carbone : $3 = 3$. Hydrogène : $8 = 4 \times 2$. Oxygène : $5 \times 2 = 10$ et $3 \times 2 + 4 = 10$.

2.a. Mise en équations

On lit la composition de chaque molécule : $\mathrm{KMnO_4}$ contient 1 potassium, 1 manganèse, 4 oxygènes ; HCl contient 1 hydrogène et 1 chlore ; KCl, 1 potassium et 1 chlore ; $\mathrm{MnCl_2}$, 1 manganèse et 2 chlores ; $\mathrm{Cl_2}$, 2 chlores ; $\mathrm{H_2O}$, 2 hydrogènes et 1 oxygène.

Élément	Atomes à gauche	Atomes à droite	Équation
K	a	c	$a = c$
Mn	a	d	$a = d$
O	$4a$	f	$4a = f$
H	b	$2f$	$b = 2f$
Cl	b	$c + 2d + 2e$	$b = c + 2d + 2e$

On obtient un système homogène de cinq équations à six inconnues.

2.b. Résolution par le pivot

On range les inconnues dans l'ordre (b, c, d, e, f, a), l'inconnue a en dernier comme paramètre, et l'on écrit les équations dans l'ordre H, K, Mn, Cl, O :

$$\begin{cases} b - 2f = 0 & L_1 \text{ (H)} \\ c - a = 0 & L_2 \text{ (K)} \\ d - a = 0 & L_3 \text{ (Mn)} \\ b - c - 2d - 2e = 0 & L_4 \text{ (Cl)} \\ f - 4a = 0 & L_5 \text{ (O)} \end{cases}$$

Seule la ligne 4 n'est pas à sa place dans un système échelonné : elle contient b, c et d, qui sont les pivots des lignes 1, 2 et 3. On les élimine un par un.

$$\begin{aligned} L_4 \leftarrow L_4 - L_1 : &\quad -c - 2d - 2e + 2f = 0,\\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 : &\quad -2d - 2e + 2f - a = 0,\\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 : &\quad -2e + 2f - 3a = 0. \end{aligned}$$

Le système est maintenant échelonné :

$$\begin{cases} b - 2f = 0 \\ c - a = 0 \\ d - a = 0 \\ -2e + 2f - 3a = 0 \\ f - 4a = 0 \end{cases}$$

Les pivots portent sur b, c, d, e, f (premières inconnues des lignes 1 à 5), et a est libre. On remonte :

- la ligne 5 donne $f = 4a$;
- la ligne 4 donne $2e = 2f - 3a = 8a - 3a = 5a$, donc $e = \dfrac{5a}{2}$;
- la ligne 3 donne $d = a$, la ligne 2 donne $c = a$;
- la ligne 1 donne $b = 2f = 8a$.

L'ensemble des solutions réelles est

$$\begin{aligned} &\{\, a\left(1, 8, 1, 1, \tfrac{5}{2}, 4\right) \mid a \in \mathbb{R} \,\} \\ &\qquad = \{\, \lambda\,(2, 16, 2, 2, 5, 8) \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\}, \end{aligned}$$

l'égalité des deux ensembles venant du changement de paramètre $\lambda = \dfrac{a}{2}$, qui décrit $\mathbb{R}$ quand a décrit $\mathbb{R}$. C'est une droite de $\mathbb{R}^6$, dirigée par $(2, 16, 2, 2, 5, 8)$.

2.c. Les plus petits entiers

Une solution $a\left(1, 8, 1, 1, \tfrac{5}{2}, 4\right)$ est acceptable si ses six coefficients sont des entiers strictement positifs. Il faut d'abord $a \in \mathbb{N}^*$, puisque a est l'un d'eux. Il faut ensuite que $e = \dfrac{5a}{2}$ soit entier, c'est-à-dire que $5a$ soit pair. Si a était impair, $5a$ serait impair (produit de deux impairs) ; donc a est pair : $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Réciproquement, pour $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, la solution vaut $k\,(2, 16, 2, 2, 5, 8)$, dont les six coefficients sont des entiers strictement positifs.
Les solutions acceptables sont donc les $k\,(2, 16, 2, 2, 5, 8)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, et tous les coefficients sont minimaux pour $k = 1$:

$$2\,\mathrm{KMnO_4} + 16\,\mathrm{HCl} \longrightarrow 2\,\mathrm{KCl} + 2\,\mathrm{MnCl_2} + 5\,\mathrm{Cl_2} + 8\,\mathrm{H_2O}.$$

Attention. Prendre $a = 1$, comme dans la question 1, donnerait $e = \frac{5}{2}$, qui n'est pas entier. Il ne suffit donc pas de donner à a sa plus petite valeur entière : le bon raisonnement part de l'ensemble des solutions et cherche, parmi elles, celles dont **tous** les coefficients sont entiers.
Vérification, en comptant les atomes avec $(a, b, c, d, e, f) = (2, 16, 2, 2, 5, 8)$:

Élément	À gauche	À droite
K	2	2
Mn	2	2
O	$2 \times 4 = 8$	8
H	16	$8 \times 2 = 16$
Cl	16	$2 + 2 \times 2 + 5 \times 2 = 16$

Chaque élément est conservé.

3. Pourquoi il y avait forcément une infinité de solutions

Un système homogène a toujours au moins une solution : le vecteur nul, puisque tous les seconds membres sont nuls. Cette solution ne sert à rien en chimie (aucune molécule), mais elle garantit que le système n'est pas incompatible : l'échelonnement ne peut jamais produire de ligne $0 = c$ avec $c \neq 0$.
Par ailleurs, un système échelonné a au plus un pivot par ligne, donc au plus autant de pivots que d'équations : 3 dans la question 1, 5 dans la question 2. Comme il y a 4 inconnues dans le premier cas et 6 dans le second, au moins une inconnue reste sans pivot. Elle est libre, et chaque valeur qu'on lui donne fournit une solution différente : il y a une infinité de solutions.

Commentaire

L'exercice montre ce que la méthode du pivot apporte hors des mathématiques : la règle chimique « rien ne se perd » se traduit élément par élément en une équation linéaire, et la résolution donne d'un coup **toutes** les façons d'équilibrer la réaction. Qu'elles forment une droite signifie que l'équation équilibrée est unique à un facteur près, ce qui est conforme à l'usage des chimistes. Le seul travail non linéaire est le dernier : passer de la droite des solutions réelles aux plus petits entiers, ce qui demande de regarder toutes les coordonnées à la fois et pas seulement la première.

Exercice 4 ★ Le calcul matriciel n'est pas le calcul des nombres

Notions : Calcul matriciel : somme, produit, transposée, puissances, Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques

Plusieurs règles du calcul sur les nombres réels deviennent fausses pour les matrices carrées. Pour réfuter une affirmation de la forme « pour toutes matrices… », un **contre-exemple** suffit, à condition de l'écrire explicitement et de le vérifier par le calcul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA. Que peut-on en conclure sur l'affirmation « pour toutes matrices $M, P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $MP = PM$ » ?

2. Calculer CD et DC. Quelle règle des nombres réels est mise en défaut ? L'égalité $MP = 0_2$ entraîne-t-elle $PM = 0_2$?

3. On pose $N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer N^2. Déterminer ensuite toutes les matrices triangulaires supérieures $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ telles que $T^2 = 0_2$.

4. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Développer $(M+P)^2$ pour deux matrices carrées quelconques de même taille, et en déduire à quelle condition l'identité $(M+P)^2 = M^2+2MP+P^2$ est vraie.

5. On pose

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Calculer $(EF)^\top$ et $F^\top E^\top$, et constater qu'elles sont égales. Le produit $E^\top F^\top$ a-t-il un sens, et peut-il être égal à $(EF)^\top$?

6. Démontrer que pour toutes matrices $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a $(MP)^\top = P^\top M^\top$. Pourquoi la vérification de la question 5 ne suffisait-elle pas ?

Corrigé

Le rappel utile. Le coefficient d'indice (i, j) du produit MP est obtenu en multipliant la ligne i de M par la colonne j de P : $(MP)_{ij} = \sum_k m_{ik}\, p_{kj}$. Tous les calculs ci-dessous se font ainsi, coefficient par coefficient.

1. Deux matrices qui ne commutent pas

$$AB = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 1 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 0\times 1 + 1\times 1 & 0\times 0 + 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 0 & 1\times 2 + 0\times 1 \\ 1\times 1 + 1\times 0 & 1\times 2 + 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients d'indice $(1,1)$ diffèrent $(3 \neq 1)$, donc $AB \neq BA$.
Conclusion rédigée. L'affirmation « pour toutes matrices $M, P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $MP = PM$ » est **fausse** : le couple (A, B) est un contre-exemple, puisque $AB \neq BA$. Le produit matriciel n'est pas commutatif.
Remarquons qu'il suffit d'**un** coefficient différent pour conclure : on n'a pas à comparer les quatre. En revanche, il faut avoir effectivement calculé ce coefficient, et non affirmé « en général

ça ne commute pas ».

2. Un produit nul de deux matrices non nulles

$$CD = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times(-1) & 1\times(-4) + 2\times 2 \\ 2\times 2 + 4\times(-1) & 2\times(-4) + 4\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2,$$

$$DC = \begin{pmatrix} 2\times 1 + (-4)\times 2 & 2\times 2 + (-4)\times 4 \\ (-1)\times 1 + 2\times 2 & (-1)\times 2 + 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Les matrices C et D sont non nulles (elles ont des coefficients non nuls), et pourtant $CD = 0_2$. La règle des réels mise en défaut est la suivante : **un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul**. Pour les matrices, l'affirmation « $MP = 0_2 \Rightarrow M = 0_2$ ou $P = 0_2$ » est fausse, et (C, D) en est un contre-exemple.
Le calcul de DC répond à la seconde question : $CD = 0_2$, mais $DC \neq 0_2$ (son coefficient $(1,1)$ vaut -6). L'égalité $MP = 0_2$ n'entraîne donc pas $PM = 0_2$.
Une conséquence pratique. On ne peut pas « simplifier » par une matrice non nulle : on a $CD = C \times 0_2$, puisque les deux valent 0_2, et pourtant $D \neq 0_2$. Simplifier par C exigera une hypothèse plus forte que $C \neq 0_2$ (ce sera l'inversibilité, vue plus loin dans le chapitre).

3. Une matrice non nulle de carré nul

$$N^2 = \begin{pmatrix} 2\times 2 + (-4)\times 1 & 2\times(-4) + (-4)\times(-2) \\ 1\times 2 + (-2)\times 1 & 1\times(-4) + (-2)\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $N^2 = 0_2$ alors que $N \neq 0_2$. Chez les réels, $x^2 = 0$ entraîne $x = 0$; chez les matrices, c'est faux, et N est un contre-exemple. Tous les coefficients de N sont non nuls : la nullité du carré ne se voit pas sur la matrice.
Les matrices triangulaires supérieures de carré nul. Pour $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$,

$$T^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b\times 0 & ab + bc \\ 0\times a + c\times 0 & 0\times b + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Raisonnons par équivalences. $T^2 = 0_2$ équivaut à $a^2 = 0$, $c^2 = 0$ et $b(a+c) = 0$. Les deux premières conditions, qui portent sur des **réels**, donnent $a = 0$ et $c = 0$; la troisième devient alors $b \times 0 = 0$, vraie pour tout b. Les matrices cherchées sont donc exactement

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque $b \neq 0$, on obtient une matrice non nulle de carré nul : il y en a une infinité.

4. L'identité remarquable

Le calcul sur l'exemple. On a $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, donc

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2\times 2 + 2\times 1 & 2\times 2 + 2\times 2 \\ 1\times 2 + 2\times 1 & 1\times 2 + 2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 2AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}8&8\\4&4\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}6&8\\4&6\end{pmatrix}=(A+B)^2.$$

L'identité remarquable des réels est fausse pour ce couple de matrices.
Le développement général. Soient M et P deux matrices carrées de même taille. Par distributivité du produit sur la somme, en prenant garde à l'ordre des facteurs :

$$(M+P)^2=(M+P)(M+P)=M^2+MP+PM+P^2.$$

Par conséquent

$$(M+P)^2=M^2+2MP+P^2\iff MP+PM=2MP\iff PM=MP.$$

L'identité remarquable est vraie **si et seulement si** M et P commutent. Sur l'exemple, l'écart devait donc valoir $BA-AB$, et c'est bien le cas :

$$(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix},$$

$$BA-AB=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

Attention. Le terme $2MP$ de l'identité remarquable vient du regroupement $MP+PM=2MP$, qui n'est permis que si $MP=PM$. Écrire $(M+P)^2=M^2+2MP+P^2$ sans avoir vérifié la commutation est la faute la plus fréquente du calcul matriciel. Il en va de même pour $(M+P)(M-P)=M^2-P^2$, qui demande aussi $MP=PM$.

5. La transposée d'un produit, sur un exemple

Le produit EF a un sens car E a 3 colonnes et F a 3 lignes ; il appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$EF=\begin{pmatrix}1\times2+0\times0+2\times1&1\times1+0\times(-1)+2\times4\\(-1)\times2+3\times0+1\times1&(-1)\times1+3\times(-1)+1\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&9\\-1&0\end{pmatrix},$$

donc

$$(EF)^\top=\begin{pmatrix}4&-1\\9&0\end{pmatrix}.$$

Les transposées s'obtiennent en échangeant lignes et colonnes :

$$F^\top=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&-1&4\end{pmatrix},\qquad E^\top=\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\\2&1\end{pmatrix}.$$

Le produit $F^\top E^\top$ a un sens (2×3 fois 3×2) et vaut

$$F^\top E^\top=\begin{pmatrix}2+0+2&-2+0+1\\1+0+8&-1-3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\9&0\end{pmatrix}=(EF)^\top.$$

Le produit $E^\top F^\top$ a lui aussi un sens, puisque $E^\top$ a 2 colonnes et $F^\top$ a 2 lignes, mais c'est une matrice de taille 3×3. Le calcul donne

$$E^\top F^\top=\begin{pmatrix}1&1&-3\\3&-3&12\\5&-1&6\end{pmatrix},$$

et une matrice 3×3 ne peut pas être égale à la matrice 2×2 $(EF)^\top$. L'ordre « naturel » $E^\top F^\top$ n'est pas seulement faux : il ne produit même pas une matrice de la bonne taille.

6. La démonstration générale

Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Le produit MP appartient à $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, donc $(MP)^\top$ appartient à $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$; de même $P^\top \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $M^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, donc $P^\top M^\top \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$. Les deux matrices ont la même taille. Comparons leurs coefficients : soient $i \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. Par définition de la transposée, puis du produit,

$$\begin{aligned}\big((MP)^\top\big)_{ij} = (MP)_{ji} &= \sum_{k=1}^{p} m_{jk}\, p_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{p} p_{ki}\, m_{jk} = \sum_{k=1}^{p} (P^\top)_{ik}\, (M^\top)_{kj} = (P^\top M^\top)_{ij}.\end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième ligne utilise seulement la commutativité du produit des **réels** m_{jk} et p_{ki}. Les deux matrices ayant mêmes coefficients, $(MP)^\top = P^\top M^\top$. □

Pourquoi la question 5 ne suffisait pas. Une vérification sur un exemple ne démontre pas un énoncé universel : elle montre seulement qu'il est vrai pour ce couple-là. C'est l'asymétrie fondamentale de la rédaction : **un seul exemple suffit pour réfuter** une affirmation « pour tout » (questions 1 à 4), **aucun nombre d'exemples ne suffit pour la démontrer** (question 6).

Commentaire

Les quatre règles réfutées ici ont une même source : le produit matriciel n'est pas commutatif, et il possède des « diviseurs de zéro », des matrices non nulles dont le produit est nul. Toutes les manipulations familières qui utilisent l'une de ces deux propriétés des réels (identités remarquables, simplification, « un produit nul a un facteur nul ») doivent être revérifiées une à une. Ce qui reste vrai, c'est tout ce qui ne dépend que de l'associativité et de la distributivité, en respectant l'ordre des facteurs ; la formule $(MP)^\top = P^\top M^\top$, qui renverse l'ordre, en est un bon exemple.

Exercice 5 ★★ Puissances par la formule du binôme

Notions : Calcul matriciel : somme, produit, transposée, puissances

On rappelle la formule du binôme pour les matrices : si M et P sont deux matrices carrées de même taille **qui commutent** ($MP = PM$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(M+P)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^{n-k} P^k,$$

avec la convention $M^0 = P^0 = I$.

1. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N = A - 2I_3.$$

a. Écrire N, puis calculer N^2 et N^3. Que valent les N^k pour $k \geqslant 3$?

b. Justifier que $2I_3$ et N commutent.

c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'expression de A^n comme combinaison de I_3, N et N^2, puis la matrice A^n coefficient par coefficient. La formule obtenue vaut-elle aussi pour $n = 0$ et $n = 1$?

d. Contrôler le résultat pour $n = 2$ en calculant A^2 directement.

2. On pose

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = D + U.$$

a. Calculer U^2, DU et UD.

b. Quelle expression de B^n obtiendrait-on en appliquant, sans précaution, la formule du binôme à D et U ?

c. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Conclure.

3. Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les neuf coefficients valent 1.

a. Montrer que $J^2 = 3J$, puis que $J^k = 3^{k-1} J$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $(I_3 + J)^n$ sous la forme $I_3 + c_n J$ avec c_n réel à déterminer. Contrôler pour $n = 2$.

Corrigé

1.a. La matrice N et ses puissances

$$N = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice **strictement** triangulaire supérieure : ses coefficients diagonaux et ceux situés sous la diagonale sont nuls. On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Détail du seul coefficient non nul : ligne 1 de N, $(0,1,3)$, fois colonne 3 de N, $(3,1,0)$, donne $0\times 3+1\times 1+3\times 0=1$. Les autres produits ligne par colonne sont nuls : par exemple la ligne 1 fois la colonne 2, $(0,1,3)\cdot(1,0,0)$, vaut 0.

$$N^3 = N^2N = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = 0_3,$$

car la seule ligne non nulle de N^2, $(0,0,1)$, multiplie des colonnes de N dont le troisième coefficient est nul. Enfin, pour $k\geqslant 3$, $N^k = N^3N^{k-3} = 0_3\times N^{k-3} = 0_3$.
À chaque multiplication par N, les coefficients non nuls remontent d'un cran au-dessus de la diagonale ; en taille 3, il n'y a que deux crans.

1.b. La commutation

Pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a $(2I_3)M = 2(I_3M) = 2M$ et $M(2I_3) = 2(MI_3) = 2M$. En particulier $(2I_3)N = N(2I_3) = 2N$: les matrices $2I_3$ et N commutent, et la formule du binôme s'applique à $A = 2I_3 + N$.

1.c. La puissance n-ième

Soit $n\geqslant 2$. La formule du binôme donne

$$A^n = (2I_3+N)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2I_3)^{n-k}N^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k,$$

car $(2I_3)^{n-k} = 2^{n-k}I_3$ et $I_3N^k = N^k$. Tous les termes d'indice $k\geqslant 3$ sont nuls d'après la question 1.a ; comme $n\geqslant 2$, il reste les termes $k=0,1,2$:

$$\begin{aligned}A^n &= 2^nI_3 + n\,2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}\,2^{n-2}N^2\\ &= 2^nI_3 + n\,2^{n-1}N + n(n-1)\,2^{n-3}N^2.\end{aligned}$$

En remplaçant N et N^2 par leurs coefficients :

- les coefficients diagonaux ne viennent que de I_3 : ils valent 2^n ;
- les coefficients $(1,2)$ et $(2,3)$ ne viennent que de N, où ils valent 1 : ils valent $n\,2^{n-1}$;
- le coefficient $(1,3)$ vaut 3 dans N et 1 dans N^2 : il vaut $3n\,2^{n-1} + n(n-1)\,2^{n-3} = 2^{n-3}\,n\,(12+n-1) = n(n+11)\,2^{n-3}$.

D'où, pour tout $n\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}A^n &= \begin{pmatrix}2^n & n\,2^{n-1} & n(n+11)\,2^{n-3}\\ 0 & 2^n & n\,2^{n-1}\\ 0&0&2^n\end{pmatrix}\\ &= 2^{n-3}\begin{pmatrix}8&4n&n(n+11)\\0&8&4n\\0&0&8\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les cas $n=0$ et $n=1$. La troncature à trois termes demandait $n\geqslant 2$, mais on peut tester la formule finale directement. Pour $n=0$ elle donne $2^{-3}\times 8\,I_3 = I_3 = A^0$. Pour $n=1$ elle donne

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}8&4&12\\0&8&4\\0&0&8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix} = A.$$

La formule vaut donc pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.d. Le contrôle pour $n = 2$

La formule donne, pour $n = 2$,

$$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 8 & 26 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 13 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le calcul direct donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 13 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

avec par exemple, pour le coefficient $(1,3)$, $2\times 3 + 1\times 1 + 3\times 2 = 13$. Les deux résultats coïncident.

2. Quand la commutation manque

a. Les calculs donnent

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad DU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad UD = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour DU : la ligne 1 de D, $(1,0)$, fois la colonne 2 de U, $(1,0)$, donne 1, et la ligne 2, $(0,2)$, donne 0. Pour UD : la ligne 1 de U, $(0,1)$, fois la colonne 2 de D, $(0,2)$, donne 2. Donc $DU \neq UD$: les matrices D et U ne commutent pas, et l'hypothèse de la formule du binôme n'est pas satisfaite.
b. Si l'on appliquait quand même la formule, le fait que $U^k = 0_2$ pour $k \geqslant 2$ donnerait, pour $n \geqslant 1$,

$$B^n \overset{?}{=} D^n + n\,D^{n-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

puisque $D^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ et $D^{n-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 2^0 - 1 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = B^0$.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Comme $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} B^{n+1} = B^n B &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2(2^n - 1) \\ 0 & 2 \times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.
Conclusion. $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comparaison. Pour $n = 2$, la vraie valeur est $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (on le vérifie directement : la ligne 1 de B, $(1,1)$, fois la colonne 2, $(1,2)$, donne 3), alors que la formule de la question **b** donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Les coefficients $(1,2)$ diffèrent : $3 \neq 2$. La formule du binôme appliquée à des matrices qui ne commutent pas donne un **résultat faux**, et l'erreur s'aggrave avec n, puisque

$2^n - 1$ croît beaucoup plus vite que n. Pour $n = 10$, le vrai coefficient vaut 1023 et la fausse formule annonce 10.
Attention. La matrice U est, comme N à la question 1, strictement triangulaire supérieure, et de carré nul. Ce n'est pas ce qui autorise la formule : ce qui l'autorise, c'est que l'autre terme, $2I_3$, soit un multiple de l'identité, donc commute avec tout. Ici D est diagonale sans être un multiple de I_2, et cela suffit à tout casser.

3.a. La matrice J

Le coefficient (i, j) de J^2 vaut $\sum_{k=1}^{3} 1 \times 1 = 3$, pour tous i et j. Donc J^2 est la matrice dont tous les coefficients valent 3, c'est-à-dire $J^2 = 3J$.
Montrons par récurrence sur $k \geqslant 1$ que $J^k = 3^{k-1}J$. Pour $k = 1$, $3^0 J = J$. Si $J^k = 3^{k-1}J$ pour un certain $k \geqslant 1$, alors

$$J^{k+1} = J^k J = 3^{k-1}J^2 = 3^{k-1} \times 3J = 3^k J,$$

ce qui est la propriété au rang $k + 1$. Elle est donc vraie pour tout $k \geqslant 1$.
Attention. La formule $J^k = 3^{k-1}J$ est **fausse** pour $k = 0$: elle donnerait $J^0 = \frac{1}{3}J$, alors que $J^0 = I_3$. Il faudra donc isoler le terme $k = 0$ dans la somme du binôme.

3.b. La puissance de $I_3 + J$

Les matrices I_3 et J commutent, puisque $I_3 J = J I_3 = J$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule du binôme donne, en isolant le terme $k = 0$,

$$\begin{aligned}(I_3 + J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} J \\ &= I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k\right) J.\end{aligned}$$

La somme entre parenthèses est la formule du binôme **des réels** pour $(1 + 3)^n$, privée de son terme $k = 0$ qui vaut 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - 1 = 4^n - 1.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(I_3 + J)^n = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} J, \qquad c_n = \frac{4^n - 1}{3}.$$

Pour $n = 0$, $c_0 = 0$ et l'on retrouve bien I_3 (la somme sur k de 1 à 0 est vide, donc nulle).
Concrètement, $(I_3 + J)^n$ a ses coefficients diagonaux égaux à $1 + \frac{4^n-1}{3} = \frac{4^n+2}{3}$ et ses autres coefficients égaux à $\frac{4^n-1}{3}$.
Contrôle pour $n = 2$. La formule donne $c_2 = \frac{16-1}{3} = 5$, donc $(I_3 + J)^2 = I_3 + 5J$. Directement, $(I_3 + J)^2 = I_3 + 2J + J^2 = I_3 + 2J + 3J = I_3 + 5J$. C'est aussi ce que donne le produit

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

où par exemple le coefficient $(1, 1)$ vaut $2 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 6$ et le coefficient $(1, 2)$ vaut $2 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 5$.

Commentaire

La méthode du binôme repose sur deux ingrédients qu'il faut vérifier séparément : une décomposition $M + P$ où les deux termes **commutent**, et un terme dont les puissances se calculent facilement (nulles à partir d'un rang, comme N, ou proportionnelles à lui-même, comme J). Le premier ingrédient est le plus souvent oublié, et la question 2 montre qu'il n'a rien de formel : sans lui la formule donne un résultat faux dès $n = 2$. Le choix naturel pour garantir la commutation est de prendre pour l'un des termes un multiple de l'identité.

Exercice 6 ★ Inverser par le pivot de Gauss-Jordan

Notions : Matrices inversibles et calcul de l'inverse

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Par la méthode de Gauss-Jordan appliquée à la matrice augmentée $(A \mid I_3)$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. Noter chaque opération sur les lignes. Vérifier le résultat en calculant AA^{-1}.

2. Appliquer la méthode du pivot à B. Montrer que B n'est pas inversible, en exhibant une colonne $X \neq 0$ telle que $BX = 0$ et en expliquant pourquoi cela empêche l'inversibilité.

3. On rappelle le critère du cours pour les matrices de taille 2 : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et dans ce cas

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Dire si les matrices $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ sont inversibles, et calculer l'inverse le cas échéant, avec vérification.

Corrigé

Le principe de Gauss-Jordan. On écrit côte à côte A et I_3, et l'on applique aux **lignes** de ce tableau des opérations élémentaires jusqu'à transformer la partie gauche en I_3. Chaque opération élémentaire revient à multiplier à gauche par une matrice inversible ; si la suite d'opérations transforme A en I_3, leur produit E vérifie $EA = I_3$, donc $E = A^{-1}$, et la partie droite, qui a subi les mêmes opérations à partir de I_3, est devenue $EI_3 = A^{-1}$. Si au contraire une ligne nulle apparaît dans la partie gauche, la matrice n'est pas inversible.

1. L'inverse de A

On part de la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Étape 1 : éliminer sous le premier pivot. Le coefficient 1 en position $(1,1)$ sert de pivot. Par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Détail de la ligne 2 : $(2,1,3 \mid 0,1,0) - 2\,(1,0,2 \mid 1,0,0) = (0,1,-1 \mid -2,1,0)$. Détail de la ligne 3 : $(1,1,2 \mid 0,0,1) - (1,0,2 \mid 1,0,0) = (0,1,0 \mid -1,0,1)$.
Étape 2 : éliminer sous le deuxième pivot. Le coefficient 1 en position $(2,2)$ sert de pivot. Par $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

En effet $(0,1,0 \mid -1,0,1) - (0,1,-1 \mid -2,1,0) = (0,0,1 \mid 1,-1,1)$.
La partie gauche est triangulaire supérieure avec trois pivots non nuls (tous égaux à 1) : la matrice A est inversible. Il reste à faire apparaître des zéros **au-dessus** des pivots, en remontant.
Étape 3 : éliminer au-dessus du troisième pivot. Par $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Détail : $(0,1,-1 \mid -2,1,0) + (0,0,1 \mid 1,-1,1) = (0,1,0 \mid -1,0,1)$, et $(1,0,2 \mid 1,0,0) - 2\,(0,0,1 \mid 1,-1,1) = (1,0,0 \mid -1,2,-2)$.
Le coefficient $(1,2)$ de la partie gauche est déjà nul : il n'y a pas d'opération à faire au-dessus du deuxième pivot. La partie gauche est I_3, donc la partie droite est l'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Détail de la première ligne : $-1+0+2=1$, puis $2+0-2=0$, puis $-2+0+2=0$. Deuxième ligne : $-2-1+3=0$, $4+0-3=1$, $-4+1+3=0$. Troisième ligne : $-1-1+2=0$, $2+0-2=0$, $-2+1+2=1$.
Pour des matrices **carrées**, le cours assure que $AA^{-1} = I_3$ suffit : l'égalité $A^{-1}A = I_3$ en découle, il n'est pas nécessaire de la vérifier aussi.
Attention. Dans la méthode de Gauss-Jordan, on opère **uniquement sur les lignes**. Mélanger des opérations sur les lignes et sur les colonnes dans un même calcul donne une matrice fausse, sans qu'aucun signal ne l'indique. La vérification finale par le produit est donc indispensable : elle prend une minute et détecte toute erreur de signe.

2. La matrice B n'est pas inversible

On échelonne B (il est inutile d'écrire la partie droite si l'on soupçonne la non-inversibilité ; on l'ajouterait sans difficulté sinon).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une ligne nulle apparaît : il n'y a pas de troisième pivot, et la méthode de Gauss-Jordan ne peut pas aboutir à I_3.
Pourquoi cela empêche l'inversibilité. La forme échelonnée permet de résoudre le système homogène $BX = 0$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: il équivaut à

$$x + 2y + 3z = 0, \qquad -3y - 6z = 0.$$

L'inconnue z est libre. La deuxième équation donne $y = -2z$, la première $x = -2y - 3z = 4z - 3z = z$. En prenant $z = 1$, on obtient

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \qquad BX = \begin{pmatrix} 1-4+3 \\ 2-2+0 \\ 1+2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons par l'absurde que B soit inversible. En multipliant l'égalité $BX = 0$ à gauche par B^{-1}, on obtiendrait $X = B^{-1}BX = B^{-1}\,0 = 0$, ce qui contredit $X \neq 0$. Donc B **n'est pas inversible**.
L'égalité $BX = 0$ se lit aussi sur les colonnes C_1, C_2, C_3 de B : elle dit que $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$. On le contrôle : $(1,2,1) - 2\,(2,1,-1) + (3,0,-3) = (0,0,0)$. Une relation de ce type entre les colonnes est toujours un signe de non-inversibilité.

3. Les matrices de taille 2

La matrice C. On a $ad - bc = 4 \times 2 - 3 \times 2 = 8 - 6 = 2 \neq 0$: la matrice C est inversible, et

$$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérification.

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice D. On a $ad - bc = 2 \times 3 - (-6) \times (-1) = 6 - 6 = 0$: la matrice D n'est pas inversible. On le voit aussi sur les colonnes : la deuxième vaut -3 fois la première, $(-6, 3) = -3\,(2, -1)$, ce qui donne $D\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et l'argument de la question 2 s'applique.
Attention. Dans la formule de l'inverse, on **échange** les coefficients diagonaux a et d et l'on **change le signe** des deux autres, sans les échanger. Une erreur fréquente consiste à échanger aussi b et c : sur C, elle donnerait $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, dont le produit par C n'est pas I_2 (le coefficient $(1,1)$ de ce produit à gauche par C vaut $\frac{1}{2}(8-9) = -\frac{1}{2}$).

Commentaire

Les trois méthodes se complètent. Le critère $ad - bc \neq 0$ est le plus rapide, mais il est propre à la taille 2. La méthode de Gauss-Jordan marche en toute taille et fait d'une pierre deux coups : elle décide de l'inversibilité (trois pivots non nuls, ou une ligne nulle) et, si la matrice est inversible, elle fournit l'inverse. Enfin, une colonne $X \neq 0$ telle que $BX = 0$ est le certificat le plus convaincant d'une non-inversibilité : il se vérifie par un seul produit, sans refaire le pivot.

Exercice 7 ★★ Une relation qui donne l'inverse

Notions : Matrices inversibles et calcul de l'inverse, Calcul matriciel : somme, produit, transposée, puissances

1. Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, et

$$A = J - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer J^2. En déduire, sans calculer A^2 coefficient par coefficient, que $A^2 = A + 2I_3$. Contrôler ensuite par le calcul direct de A^2.

b. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - I_3)$, sans utiliser la méthode du pivot. Écrire A^{-1} et vérifier.

c. Exprimer A^3 et A^4 comme combinaisons de A et de I_3.

2. Pour tout réel a, on pose

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

a. Échelonner $M(a)$ par la méthode du pivot, en notant les opérations.

b. Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels $M(a)$ est inversible.

c. Pour chaque valeur de a où $M(a)$ n'est pas inversible, donner une colonne $X \neq 0$ telle que $M(a)X = 0$, et la vérifier.

Corrigé

1.a. La relation $A^2 = A + 2I_3$

Chaque coefficient de J^2 est la somme de trois produits 1×1 : il vaut 3. Donc $J^2 = 3J$.
Les matrices J et I_3 commutent ($JI_3 = I_3J = J$), ce qui autorise le développement comme une identité remarquable :

$$A^2 = (J - I_3)^2 = J^2 - 2J + I_3 = 3J - 2J + I_3 = J + I_3.$$

D'autre part $A + 2I_3 = (J - I_3) + 2I_3 = J + I_3$. Les deux matrices sont égales : $A^2 = A + 2I_3$.
Contrôle direct. Le produit ligne par colonne donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

car le coefficient $(1,1)$ vaut $0\times0+1\times1+1\times1 = 2$ et le coefficient $(1,2)$ vaut $0\times1+1\times0+1\times1 = 1$, les autres s'obtenant de même. C'est bien $A + 2I_3$: on ajoute 2 aux zéros de la diagonale de A.

1.b. L'inverse sans pivot

L'idée est de faire apparaître I_3 comme un produit dont A est un facteur. On réécrit la relation :

$$A^2 - A = 2I_3, \qquad \text{soit} \qquad A(A - I_3) = 2I_3,$$

en factorisant A **à gauche** : $A\cdot A - A\cdot I_3 = A^2 - A$. En divisant par 2,

$$A\cdot\frac{1}{2}(A-I_3) = I_3.$$

De même, en factorisant A à droite, $(A-I_3)A = A^2 - A = 2I_3$, donc $\frac{1}{2}(A-I_3)\cdot A = I_3$.
La matrice $B = \frac{1}{2}(A-I_3)$ vérifie donc $AB = BA = I_3$: par définition, A **est inversible et** $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I_3)$. (Pour des matrices carrées, l'une des deux égalités suffisait, d'après le cours ; on les a toutes deux ici sans effort.)
Explicitement,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérification.

$$AA^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3,$$

avec par exemple, pour la première ligne, $0+1+1=2$, puis $0-1+1=0$, puis $0+1-1=0$.
Attention. On ne « divise » jamais par une matrice : l'écriture $A^{-1} = \dfrac{2I_3}{A-I_3}$, ou toute fraction de matrices, n'a pas de sens. Ce que l'on fait, c'est **exhiber** une matrice B telle que $AB = I_3$, et c'est la définition même de l'inverse. La relation $A^2 = A + 2I_3$ est utile justement parce que son terme constant $2I_3$ est **non nul** : on peut diviser par le réel 2. Une relation du type $A^2 = A$ ne permettrait pas cette conclusion.

1.c. Les puissances suivantes

On multiplie la relation par A et l'on remplace A^2 à chaque fois qu'il apparaît :

$$A^3 = A\cdot A^2 = A(A+2I_3) = A^2 + 2A = (A+2I_3) + 2A = 3A + 2I_3,$$

$$A^4 = A\cdot A^3 = 3A^2 + 2A = 3(A+2I_3) + 2A = 5A + 6I_3.$$

Contrôle de A^3. La matrice $3A+2I_3$ a ses coefficients diagonaux égaux à 2 et les autres égaux à 3. Le produit $A\cdot A^2$ donne, pour le coefficient $(1,1)$, la ligne $(0,1,1)$ fois la colonne $(2,1,1)$, soit $0+1+1=2$, et pour le coefficient $(1,2)$, la ligne $(0,1,1)$ fois la colonne $(1,2,1)$, soit $0+2+1=3$. C'est cohérent.
Toute puissance de A se ramène ainsi à une combinaison de A et I_3 : la relation de degré 2 suffit à tout calculer.

2.a. Échelonnement de $M(a)$

Le coefficient $(1,1)$ vaut 1, non nul pour toute valeur de a : on le prend comme pivot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

Détail : $(1,a,3)-(1,1,2) = (0,a-1,1)$, et $(2,2,a+2)-2\,(1,1,2) = (0,0,a-2)$. Ces opérations sont du type « ajouter à une ligne un multiple d'une autre » : elles conservent l'inversibilité, quelle que soit la valeur de a.

2.b. Discussion de l'inversibilité

La matrice obtenue est triangulaire supérieure. Son coefficient $(2,2)$, $a-1$, ne peut servir de pivot que s'il est non nul. On distingue donc les cas.
Cas $a=1$. La matrice échelonnée vaut

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Dans la colonne 2, sous la ligne 1, il n'y a que des zéros : aucun échange de lignes ne fournira de pivot pour cette colonne. On aboutit à une ligne nulle : $M(1)$ **n'est pas inversible**.
Cas $a\neq 1$. Le coefficient $a-1$ est un pivot non nul. Le dernier coefficient diagonal est $a-2$.

- Si $a=2$, la dernière ligne est nulle : $M(2)$ **n'est pas inversible**.
- Si $a\neq 1$ et $a\neq 2$, la matrice échelonnée est triangulaire avec trois coefficients diagonaux non nuls, 1, $a-1$ et $a-2$. En divisant chaque ligne par son pivot puis en éliminant au-dessus des pivots, on aboutit à I_3 : la méthode de Gauss-Jordan réussit, et $M(a)$ **est inversible**.

Conclusion. $M(a)$ est inversible si et seulement si $a\notin\{1,2\}$.
Attention. Un zéro en position de pivot n'est pas, à lui seul, une preuve de non-inversibilité : si un coefficient non nul se trouvait plus bas dans la même colonne, un échange de lignes réglerait le problème. Pour $a=1$, la conclusion vient de ce que **toute** la colonne 2, sous la première ligne, est nulle, ce qui produit une ligne nulle après échelonnement. Il faut l'écrire.

2.c. Les colonnes annulées

Pour $a=1$. La forme échelonnée donne le système $x+y+2z=0$, $z=0$. Donc $z=0$ et $x=-y$, avec y libre. Pour $y=-1$, $X=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, et

$$M(1)X=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&3\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1+0\\1-1+0\\2-2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ce n'est pas une surprise : pour $a=1$, les deux premières colonnes de $M(1)$ sont égales.
Pour $a=2$. La forme échelonnée donne $x+y+2z=0$, $y+z=0$, avec z libre. Donc $y=-z$ et $x=-y-2z=-z$. Pour $z=1$, $X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, et

$$M(2)X=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-1+2\\-1-2+3\\-2-2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, si $M(a)$ était inversible, on aurait $X=M(a)^{-1}M(a)X=M(a)^{-1}\,0=0$, ce qui contredit $X\neq 0$: on retrouve la non-inversibilité par un certificat qui se vérifie en un produit.

Commentaire

Les deux parties montrent deux manières de décider de l'inversibilité. Quand on dispose d'une **relation** entre les puissances de A dont le terme constant est un multiple non nul de I_n,

l'inverse se lit directement sur la relation, et c'est souvent bien plus rapide que le pivot (ici, on n'a manipulé aucun coefficient). Quand la matrice dépend d'un paramètre, le pivot est l'outil naturel, à condition de ne diviser par une expression en a qu'après avoir écarté les valeurs qui l'annulent : c'est la même discipline que pour les systèmes à paramètre.

Exercice 8 ★★ Vrai ou faux sur les matrices

Notions : Calcul matriciel : somme, produit, transposée, puissances, Matrices inversibles et calcul de l'inverse

Dans cet exercice, n désigne un entier au moins égal à 1, et A, B, C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une affirmation est **vraie** si elle est vraie pour toute taille n et pour toutes matrices vérifiant ses hypothèses ; elle est **fausse** s'il existe une taille n et des matrices qui vérifient les hypothèses sans vérifier la conclusion.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer ; si elle est fausse, donner un contre-exemple explicite et le vérifier par le calcul.

1. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

2. Si $A^2 = I_n$, alors $A = I_n$ ou $A = -I_n$.

3. Si A est inversible et si $AB = AC$, alors $B = C$.

4. Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ est inversible.

5. Si $AB = 0_n$, alors $A = 0_n$ ou $B = 0_n$.

6. Si A est inversible, alors $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Corrigé

La règle du jeu. Une démonstration doit valoir pour toutes les matrices, donc elle ne manipule que des lettres et les propriétés du cours. Un contre-exemple, au contraire, est un objet précis : des matrices écrites avec leurs coefficients, pour lesquelles on vérifie par le calcul que les hypothèses sont satisfaites et que la conclusion ne l'est pas. Les contre-exemples ci-dessous sont tous de taille 2, ce qui suffit d'après la définition de l'énoncé ; le commentaire final explique comment les adapter à toute taille $n \geqslant 2$.

1. Fausse : l'inverse d'un produit renverse l'ordre

Ce qui est vrai. Si A et B sont inversibles, AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$. En effet, par associativité,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

et de même $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n$.
Ce qui est faux. L'égalité $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ échoue en général. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont inversibles, puisque $ad - bc = 1 \neq 0$ pour chacune, et le critère du cours donne

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $A^{-1}B^{-1}$ était l'inverse de AB, leur produit vaudrait I_2. Or

$$(AB)(A^{-1}B^{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2.$$

L'affirmation est donc **fausse**. On vérifie au passage la bonne formule :

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (AB)(B^{-1}A^{-1}) = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = I_2.$$

L'affirmation devient vraie si A et B commutent, car alors A^{-1} et B^{-1} commutent aussi ; mais ce n'est pas une hypothèse de l'énoncé.

2. Fausse : il y a beaucoup de « racines carrées » de I_n

Prenons $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0\times 0 + 1\times 1 & 0\times 1 + 1\times 0 \\ 1\times 0 + 0\times 1 & 1\times 1 + 0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

et pourtant $S \neq I_2$ et $S \neq -I_2$ (son coefficient $(1,1)$ est nul). L'affirmation est **fausse**.
Il y en a même une infinité : pour tout réel b, la matrice $T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie

$$T_b^2 = \begin{pmatrix} 1 & b-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Où se cache l'erreur du raisonnement « naturel ». On écrirait : $A^2 - I_n = (A - I_n)(A + I_n) = 0_n$, donc $A - I_n = 0_n$ ou $A + I_n = 0_n$. La factorisation est juste, car A et I_n commutent. C'est la seconde étape qui est fausse : elle utilise la règle « un produit nul a un facteur nul », qui est précisément l'affirmation 5, fausse pour les matrices. Sur l'exemple, les deux facteurs sont non nuls et leur produit est nul :

$$(S - I_2)(S + I_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Vraie : on simplifie à gauche par une matrice inversible

Supposons A inversible et $AB = AC$. Multiplions cette égalité **à gauche** par A^{-1} :

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC).$$

Par associativité, le membre de gauche vaut $(A^{-1}A)B = I_nB = B$ et celui de droite $(A^{-1}A)C = C$. Donc $B = C$. L'affirmation est **vraie**. □
Deux remarques montrent que les hypothèses comptent.
Sans l'inversibilité, c'est faux. Avec $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$A_0B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_0C_0,$$

alors que $B_0 \neq C_0$. (La matrice A_0 n'est pas inversible : $1\times 1 - 1\times 1 = 0$.)
Il faut simplifier du même côté. Même avec A inversible, l'égalité $AB = CA$ n'entraîne pas $B = C$, car on ne peut pas multiplier l'un des membres à gauche et l'autre à droite. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = CA,$$

et pourtant $B \neq C$.

4. Fausse : la somme de deux inversibles peut ne pas l'être

Le contre-exemple le plus court est $A = I_2$ et $B = -I_2$. Les deux sont inversibles (d'inverses respectifs I_2 et $-I_2$), et $A + B = 0_2$. Or 0_2 n'est pas inversible : pour toute matrice M, $0_2 M = 0_2 \neq I_2$. L'affirmation est **fausse**.
Un second contre-exemple montre que le phénomène n'a rien à voir avec des matrices opposées. Prenons $A = I_2$ et $B = S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, inversible puisque $S^2 = I_2$ (question 2) : S est son propre inverse. Alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0,$$

donc $A + B$ n'est pas inversible. On le confirme par une colonne non nulle annulée : $(A + B)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est stable par produit (question 1), mais pas par somme.

5. Fausse : il existe des produits nuls de matrices non nulles

Prenons $A = B = N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = 0_2,$$

alors que $N \neq 0_2$. L'affirmation est **fausse**. (Un autre contre-exemple, avec deux matrices distinctes, figure à l'exercice 04.)
Ce qui reste vrai. Si l'un des facteurs est **inversible**, la règle est juste : si A est inversible et $AB = 0_n$, alors $B = A^{-1}AB = A^{-1}0_n = 0_n$. C'est le cas particulier $C = 0_n$ de l'affirmation 3. Par contraposée : si $AB = 0_n$ avec $B \neq 0_n$, alors A n'est pas inversible. C'est exactement l'argument « une colonne non nulle X telle que $AX = 0$ » utilisé pour prouver une non-inversibilité.

6. Vraie : transposer et inverser commutent

Supposons A inversible. D'après la formule $(MP)^\top = P^\top M^\top$ (exercice 04) et puisque $I_n^\top = I_n$,

$$A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I_n^\top = I_n, \qquad (A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n.$$

La matrice $(A^{-1})^\top$ est donc un inverse de $A^\top$ des deux côtés : $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$. L'affirmation est **vraie**. □
Vérification sur un exemple. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A^\top (A^{-1})^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Cet exemple illustre le résultat ; il ne le démontre pas, la démonstration est celle qui précède.
Attention. La première égalité utilise l'ordre renversé de la transposée d'un produit : $(A^{-1}A)^\top = A^\top (A^{-1})^\top$, et non $(A^{-1})^\top A^\top$. Ici les deux ordres conduisent tous les deux à I_n, ce qui rend l'erreur invisible ; elle ne le serait plus dans un calcul où les facteurs ne sont pas inverses l'un de l'autre.

Commentaire

Le bilan est de deux affirmations vraies (3 et 6) et quatre fausses (1, 2, 4, 5). Trois des quatre affirmations fausses, les affirmations 1, 2 et 5, sont pourtant **vraies pour** $n = 1$, c'est-à-dire pour les nombres réels : dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, le produit commute, donc $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$; $a^2 = 1$ entraîne $a = \pm 1$; un produit nul a un facteur nul. Leurs contre-exemples demandent donc la taille 2 au moins, et ce sont la non-commutativité et les produits nuls de matrices non nulles qui les font échouer. L'affirmation 4, elle, est fausse dès $n = 1$, avec $a = 1$ et $b = -1$: elle n'est déjà pas vraie pour les nombres.

Pour obtenir un contre-exemple en taille $n \geqslant 3$ quelconque, il suffit de compléter une matrice 2×2 par un bloc diagonal : par exemple, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coin supérieur gauche est S, dont les autres coefficients diagonaux valent 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls a pour carré I_n sans être égale à $\pm I_n$. Le produit par blocs se calcule bloc par bloc, et les contre-exemples se transportent à toute taille.

Exercice 9 ★ Sous-espace ou pas

Notions : Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré, Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Pour chacun des huit ensembles suivants, dire s'il est un sous-espace vectoriel de l'espace indiqué.

— Pour une réponse **oui**, rédiger une démonstration complète.
— Pour une réponse **non**, donner un contre-exemple explicite, avec des valeurs numériques, et le vérifier.

a. $P = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\,\}$, dans $\mathbb{R}^3$.

b. $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\,\}$, dans $\mathbb{R}^2$.

c. $X = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\,\}$, dans $\mathbb{R}^2$.

d. $Y = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\,\}$, dans $\mathbb{R}^2$.

e. $F_1 = \{\,f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\,\}$, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

f. $F_2 = \{\,f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\,\}$, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

g. $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \{\,M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^\top = M\,\}$, l'ensemble des matrices symétriques, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

h. $\mathcal{C} = \{\,u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ converge}\,\}$, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Corrigé

La caractérisation utilisée. Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$0_E \in F \qquad \text{et} \qquad \forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \lambda u + v \in F.$$

Pour un **oui**, la démonstration suit ce plan en trois temps : on vérifie que F est inclus dans E, que $0_E \in F$, puis on prend deux éléments **quelconques** de F et un réel quelconque et l'on montre que la combinaison est dans F. Pour un **non**, il suffit qu'**une** des deux conditions échoue sur **un** exemple : soit $0_E \notin F$, soit deux éléments précis de F et un réel précis dont la combinaison sort de F.

a. Le plan P : oui

Montrons que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

— Par définition, $P \subset \mathbb{R}^3$.
— Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ vérifie $0 - 2\times 0 + 0 = 0$, donc $0_{\mathbb{R}^3} \in P$.
— Soient $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$ deux éléments de P, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $x-2y+z = 0$ et $x'-2y'+z' = 0$. Le vecteur $\lambda u + v$ a pour coordonnées $(\lambda x + x',\ \lambda y + y',\ \lambda z + z')$, et

$$\begin{aligned}(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z') &= \lambda(x - 2y + z) + (x' - 2y' + z') \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Donc $\lambda u + v \in P$.
Conclusion : P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Une seconde démonstration. L'équation donne $x = 2y - z$, donc les éléments de P sont les vecteurs $(2y-z, y, z) = y\,(2,1,0) + z\,(-1,0,1)$ avec y, z réels. Ainsi $P = \mathrm{Vect}((2,1,0),(-1,0,1))$,

et un sous-espace engendré est toujours un sous-espace vectoriel. Cette méthode est souvent la plus rapide quand l'ensemble est défini par des équations linéaires **homogènes** (sans terme constant).

b. La droite D : non

Le vecteur nul $(0,0)$ vérifie $0+0=0\neq 1$, donc $(0,0)\notin D$. Un sous-espace vectoriel contient toujours le vecteur nul : D **n'est pas un sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^2$.
On aurait pu aussi exhiber deux éléments dont la somme sort de D : $(1,0)\in D$ et $(0,1)\in D$, mais $(1,0)+(0,1)=(1,1)$ et $1+1=2\neq 1$. Un seul des deux arguments suffit. Géométriquement, D est une droite qui ne passe pas par l'origine.

c. La réunion des deux axes X : non

C'est le piège de la liste, car X passe les premiers tests. Il contient $(0,0)$, puisque $0\times 0=0$, et il est stable par multiplication par un réel : si $xy=0$, alors $(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2 xy=0$. Mais il n'est pas stable par somme.
Contre-exemple. Les vecteurs $u=(1,0)$ et $v=(0,1)$ appartiennent à X, car $1\times 0=0$ et $0\times 1=0$. Leur somme $u+v=(1,1)$ vérifie $1\times 1=1\neq 0$, donc $u+v\notin X$. Avec $\lambda=1$, la condition « $\lambda u+v\in X$ » est donc mise en défaut : X **n'est pas un sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^2$.
Géométriquement, X est la réunion de l'axe des abscisses ($y=0$) et de l'axe des ordonnées ($x=0$) : chacun des deux axes est un sous-espace, leur réunion n'en est pas un.
Attention. « $0_E\in F$ » est une condition **nécessaire**, pas suffisante. Constater que le vecteur nul est dans l'ensemble ne dispense pas de la seconde condition, et l'exemple de X montre qu'elle peut échouer.

d. Le demi-plan Y : non

Ici encore, $(0,0)\in Y$ puisque $0\leqslant 0$, et Y est stable par somme : si $x\leqslant y$ et $x'\leqslant y'$, alors $x+x'\leqslant y+y'$. Ce qui échoue, c'est la multiplication par un réel **négatif**, qui renverse les inégalités.
Contre-exemple. Le vecteur $u=(0,1)$ appartient à Y, car $0\leqslant 1$. Avec $\lambda=-1$ et $v=(0,0)\in Y$, on obtient $\lambda u+v=(0,-1)$, et $0\leqslant -1$ est faux : $(0,-1)\notin Y$. Donc Y **n'est pas un sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^2$.

e. Les fonctions nulles en 1 : oui

Montrons que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Notons θ la fonction nulle, $\theta : x\mapsto 0$, qui est le vecteur nul de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- Par définition, $F_1\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- On a $\theta(1)=0$, donc $\theta\in F_1$.
- Soient $f,g\in F_1$ et $\lambda\in\mathbb{R}$: on a $f(1)=0$ et $g(1)=0$. Par définition des opérations sur les fonctions, $(\lambda f+g)(1)=\lambda f(1)+g(1)=\lambda\times 0+0=0$. Donc $\lambda f+g\in F_1$.

Conclusion : F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
La condition qui définit F_1 est une équation **linéaire homogène** en f : la valeur en un point dépend linéairement de la fonction, et le second membre est 0. C'est ce qui fait marcher la démonstration.

f. Les fonctions qui valent 1 en 0 : non

La fonction nulle vérifie $\theta(0)=0\neq 1$, donc $\theta\notin F_2$: F_2 **n'est pas un sous-espace vectoriel** de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On peut aussi le voir par une somme : la fonction constante $c : x \mapsto 1$ appartient à F_2, mais $c + c$ est la fonction constante égale à 2, et $(c+c)(0) = 2 \neq 1$. Le second membre non nul (1 au lieu de 0) est exactement ce qui distingue F_2 de F_1 et ce qui fait tout échouer, comme pour D en **b**.

g. Les matrices symétriques : oui

Montrons que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— Par définition, $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
— La matrice nulle vérifie $0_2^\top = 0_2$, donc $0_2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
— Soient $M, N \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: on a $M^\top = M$ et $N^\top = N$. La transposition est compatible avec les combinaisons linéaires, $(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top$ (le coefficient (i, j) des deux membres vaut $\lambda m_{ji} + n_{ji}$). Donc $(\lambda M + N)^\top = \lambda M + N$, et $\lambda M + N \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion : $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Une seconde démonstration. Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est symétrique si et seulement si $b = c$. Les matrices symétriques sont donc les

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a, b, d \in \mathbb{R},$$

et $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est le sous-espace engendré par ces trois matrices.

h. Les suites convergentes : oui

Montrons que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

— Par définition, $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
— La suite nulle, vecteur nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est constante, donc convergente (de limite 0) : elle appartient à $\mathcal{C}$.
— Soient $u, v \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons ℓ et ℓ' les limites respectives de u et v. D'après le théorème des opérations sur les limites (chapitre « Suites réelles »), la suite $\lambda u + v$, de terme général $\lambda u_n + v_n$, converge vers $\lambda\ell + \ell'$. Donc $\lambda u + v \in \mathcal{C}$.

Conclusion : $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Attention. L'argument repose sur le fait que ℓ et ℓ' sont des **réels**. L'ensemble des suites qui tendent vers $+\infty$, par exemple, n'est pas un sous-espace : il ne contient pas la suite nulle, et il n'est pas stable par multiplication par -1, puisque la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ alors que son opposée $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$. De même, l'ensemble des suites qui convergent vers 1 n'en est pas un, puisque la suite nulle converge vers 0.

Commentaire

Les huit cas se rangent en deux familles, et l'on peut les reconnaître avant toute démonstration. Les ensembles définis par une condition **linéaire et homogène** (une équation sans terme constant en **a**, une valeur imposée nulle en **e**, une égalité $M^\top = M$ en **g**, une propriété stable par combinaison en **h**) sont des sous-espaces. Ceux qui font intervenir un **terme constant non nul** (**b**, **f**), un **produit** des coordonnées (**c**) ou une **inégalité** (**d**) ne le sont pas, et chacun échoue sur un test différent : le vecteur nul pour **b** et **f**, la somme pour **c**, la multiplication par un réel négatif pour **d**. Pour un non, le premier test à faire est toujours « le vecteur nul est-il dedans ? » : il coûte une ligne et suffit souvent. Quand il ne suffit pas, comme en **c** et **d**, on cherche deux éléments simples, souvent des vecteurs de la base canonique, ou un réel négatif.

Exercice 10 ★★★ Les suites de Fibonacci forment un plan

Notions : Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré, Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes, Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles, muni de l'addition terme à terme et de la multiplication d'une suite par un réel. On considère l'ensemble

$$S = \{\, u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \,\}.$$

La **suite de Fibonacci** est la suite F de S définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

On ne se sert dans cet exercice d'aucune méthode de résolution des récurrences : le but est au contraire de la retrouver par l'algèbre linéaire.

1. a. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b. L'ensemble T des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

2. On considère l'application $\varphi : S \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto (u_0, u_1)$.

a. Montrer que φ est linéaire.

b. Montrer que φ est injective, puis qu'elle est surjective.

c. On note σ et τ les suites de S telles que $\varphi(\sigma) = (1, 0)$ et $\varphi(\tau) = (0, 1)$. Écrire les six premiers termes de chacune. Montrer que (σ, τ) est une base de S, donner les coordonnées d'une suite $u \in S$ dans cette base, et en déduire la dimension de S.

3. Pour un réel q, on note g_q la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec la convention $q^0 = 1$. Montrer que $g_q \in S$ si et seulement si $q^2 = q + 1$, puis déterminer les deux réels $\alpha > \beta$ qui conviennent.

4. Montrer que (g_α, g_β) est une base de S. Qu'en déduit-on pour une suite quelconque de S ?

5. a. Déterminer les coordonnées de F dans la base (g_α, g_β), en déduire une expression de F_n en fonction de n, et la vérifier pour $n = 2$ et $n = 3$.

b. Quelle est la suite L de S dont les coordonnées dans la base (g_α, g_β) sont $(1, 1)$? Donner ses six premiers termes. Que remarque-t-on ?

Corrigé

1. Un sous-espace, et un ensemble qui n'en est pas un

a. On applique la caractérisation des sous-espaces vectoriels : S est une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il faut montrer qu'elle contient la suite nulle et qu'elle est stable par combinaison linéaire.
La suite nulle. Notons 0 la suite dont tous les termes sont nuls, qui est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 = 0 + 0$, c'est-à-dire que la suite nulle vérifie la relation de récurrence. Donc $0 \in S$.
La stabilité. Soient $u, v \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $w = u + \lambda v$, c'est-à-dire $w_n = u_n + \lambda v_n$ pour tout n. Montrons que $w \in S$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme u et v appartiennent à S, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, donc

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= u_{n+2} + \lambda v_{n+2} \\ &= (u_{n+1} + u_n) + \lambda(v_{n+1} + v_n) \\ &= (u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + (u_n + \lambda v_n) \\ &= w_{n+1} + w_n. \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite w appartient à S.
Conclusion : S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. □
Ce qui fait marcher le calcul, c'est que la relation est **linéaire et homogène** : chaque terme y apparaît au premier degré, et il n'y a pas de constante.
b. Non. La suite nulle n'appartient pas à T : au rang $n = 0$, la relation demanderait $0 = 0+0+1$, soit $0 = 1$, ce qui est faux. Un sous-espace vectoriel contient toujours le vecteur nul, donc T n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On remarquera que T n'est pas vide pour autant : la suite constante égale à -1 en fait partie, puisque $-1 = (-1) + (-1) + 1$. Et si $u \in S$, la suite w définie par $w_n = u_n - 1$ vérifie $w_{n+2} = u_{n+1} + u_n - 1 = (w_{n+1} + 1) + (w_n + 1) - 1 = w_{n+1} + w_n + 1$, donc $w \in T$. Réciproquement, si $w \in T$, le même calcul fait à l'envers montre que la suite $(w_n + 1)$ appartient à S. Ainsi T est exactement l'ensemble des suites $(u_n - 1)$ avec $u \in S$: c'est un « plan déplacé », qui ne passe pas par l'origine : c'est la constante $+1$ qui l'a décalé.

2. L'application qui lit les deux premiers termes

a. Soient $u, v \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les deux premiers termes de $u + \lambda v$ sont $u_0 + \lambda v_0$ et $u_1 + \lambda v_1$, donc

$$\begin{aligned} \varphi(u + \lambda v) &= (u_0 + \lambda v_0,\ u_1 + \lambda v_1) \\ &= (u_0, u_1) + \lambda(v_0, v_1) = \varphi(u) + \lambda\varphi(v). \end{aligned}$$

L'application φ est linéaire. □
b. *Injectivité.* L'application φ étant linéaire, elle est injective si et seulement si son noyau est réduit à la suite nulle. Soit $u \in \operatorname{Ker}\varphi$: on a $u \in S$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$: « $u_n = 0$ et $u_{n+1} = 0$ » est vraie.
Initialisation. $P(0)$ s'écrit $u_0 = u_1 = 0$, c'est l'hypothèse.
Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain n. Alors $u_{n+1} = 0$, et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = 0 + 0 = 0$, donc $P(n+1)$ est vraie.
Ainsi $u_n = 0$ pour tout n, c'est-à-dire $u = 0$, et $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$: φ est injective. On notera que la propriété de récurrence porte sur **deux** termes consécutifs : avec la seule propriété « $u_n = 0$ », l'hérédité ne passerait pas, puisque u_{n+2} dépend de deux termes.
Surjectivité. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Définissons une suite u par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout n : cette définition par récurrence a un sens, chaque terme étant déterminé par les deux précédents. Par construction, u appartient à S et $\varphi(u) = (a, b)$. Tout élément de $\mathbb{R}^2$ a donc un antécédent : φ est surjective. □
L'application φ est linéaire et bijective : c'est un **isomorphisme** de S sur $\mathbb{R}^2$. Dit en mots, une suite de S est entièrement déterminée par ses deux premiers termes, et ces deux termes peuvent être choisis librement.
c. *Les deux suites.* On applique la récurrence à partir des deux premiers termes imposés :

- σ : 1, 0, 1, 1, 2, 3, ...
- τ : 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

On reconnaît dans τ la suite de Fibonacci : $\tau = F$, puisque ces deux suites de S ont les mêmes deux premiers termes et que φ est injective.

La famille (σ, τ) est génératrice. Soit $u \in S$. Posons $v = u_0\sigma + u_1\tau$. La suite v appartient à S, qui est un sous-espace d'après la question 1, et par linéarité de φ,

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= u_0\varphi(\sigma) + u_1\varphi(\tau)\\ &= u_0(1,0) + u_1(0,1) = (u_0, u_1) = \varphi(u).\end{aligned}$$

L'injectivité de φ donne $v = u$, c'est-à-dire $u = u_0\sigma + u_1\tau$.
La famille (σ, τ) est libre. Soient λ, μ des réels tels que $\lambda\sigma + \mu\tau = 0$. Montrons que $\lambda = \mu = 0$. En appliquant φ, qui est linéaire et envoie la suite nulle sur $(0,0)$, on obtient

$$(0,0) = \lambda(1,0) + \mu(0,1) = (\lambda, \mu),$$

donc $\lambda = \mu = 0$.
Conclusion. La famille (σ, τ) est libre et génératrice de S : c'est une base de S. Les coordonnées d'une suite $u \in S$ dans cette base sont (u_0, u_1), ses deux premiers termes. Une base de S ayant deux éléments, S est de dimension finie et

$$\dim S = 2. \qquad \square$$

Attention. L'espace ambiant $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, lui, n'est pas de dimension finie : aucune famille finie n'engendre toutes les suites réelles. Il n'y a là aucune contradiction : un sous-espace d'un espace de dimension infinie peut très bien être de dimension finie, et c'est l'isomorphisme φ qui l'a prouvé ici. Ce qui serait faux, c'est de prétendre trouver la dimension de S en « comptant les équations » : S est défini par une infinité d'équations, une par rang n.

3. Les suites géométriques de S

Soit $q \in \mathbb{R}$. Par définition, $g_q \in S$ signifie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$.
Sens direct. Si $g_q \in S$, la relation au rang $n = 0$ s'écrit $q^2 = q^1 + q^0$, c'est-à-dire $q^2 = q + 1$.
Réciproque. Si $q^2 = q + 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, en multipliant les deux membres par q^n,

$$q^{n+2} = q^n \cdot q^2 = q^n(q+1) = q^{n+1} + q^n,$$

donc $g_q \in S$. $\square$
Résolution. L'équation $q^2 - q - 1 = 0$ est du second degré, de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$. Elle a deux solutions réelles,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

et l'on a bien $\alpha > \beta$. Les seules suites géométriques de premier terme 1 qui appartiennent à S sont donc g_α et g_β. On notera que $q = 0$ ne convient pas, ce que confirme un calcul direct : $g_0 = (1, 0, 0, ...)$ vérifie $0 \neq 0 + 1$ au rang 0.
Pour la suite, on retient deux relations qui allègent les calculs, et qui se vérifient directement à partir des valeurs de α et β :

$$\alpha + \beta = \frac{2}{2} = 1, \qquad \alpha\beta = \frac{1-5}{4} = -1, \qquad \alpha - \beta = \sqrt{5}.$$

4. Une seconde base, faite de suites géométriques

La famille (g_α, g_β) est libre. Soient λ, μ des réels tels que $\lambda g_\alpha + \mu g_\beta = 0$, c'est-à-dire $\lambda\alpha^n + \mu\beta^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\lambda = \mu = 0$. Les rangs $n = 0$ et $n = 1$ donnent le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0 \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1$ le transforme en

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ (\beta - \alpha)\mu = 0 \end{cases}$$

Comme $\beta - \alpha = -\sqrt{5} \neq 0$, la seconde ligne donne $\mu = 0$, puis la première $\lambda = 0$. La famille est libre.
C'est une base. La famille (g_α, g_β) est une famille libre de deux vecteurs de S, et $\dim S = 2$ d'après la question 2. Or, dans un espace de dimension n, toute famille libre de n vecteurs est une base. Donc (g_α, g_β) est une base de S. □
Ce qu'on en déduit. Toute suite $u \in S$ s'écrit, de manière unique, $u = \lambda g_\alpha + \mu g_\beta$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n,$$

pour un unique couple de réels (λ, μ). C'est exactement la « forme générale » que l'on apprend à écrire pour les récurrences linéaires d'ordre 2. Elle n'a ici demandé aucune récurrence sur la forme du terme général : elle découle de ce que S est un plan et de ce que deux suites géométriques non proportionnelles y ont été trouvées.
Attention. La liberté n'a été testée que sur les rangs 0 et 1, et c'est suffisant : on a **déduit** $\lambda = \mu = 0$ d'une partie des conditions. Pour la liberté, extraire des conditions nécessaires et conclure qu'elles imposent des coefficients nuls est toujours licite. L'inverse ne l'est pas : deux suites qui coïncident aux rangs 0 et 1 ne sont égales que parce qu'elles sont **toutes deux dans** S, où l'injectivité de φ s'applique.

5. La formule de Fibonacci, et une surprise

a. Cherchons λ, μ tels que $F = \lambda g_\alpha + \mu g_\beta$. Les deux membres sont des suites de S ; d'après l'injectivité de φ, ils sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes deux premiers termes. Puisque $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, cela s'écrit

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = 1 \end{cases}$$

La première ligne donne $\mu = -\lambda$; en reportant dans la seconde, $\lambda(\alpha - \beta) = 1$, soit $\lambda\sqrt{5} = 1$. Donc

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Les coordonnées de F dans la base (g_α, g_β) sont $(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

Vérification pour $n = 2$. Par la récurrence, $F_2 = F_1 + F_0 = 1$. Par la formule, en factorisant une différence de deux carrés,

$$F_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \times 1}{\sqrt{5}} = 1.$$

Vérification pour $n = 3$. Par la récurrence, $F_3 = F_2 + F_1 = 2$. Par la formule, on factorise une différence de deux cubes, $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$. Or $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 2 = 3$, donc $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3 - 1 = 2$, et

$$F_3 = \frac{\sqrt{5} \times 2}{\sqrt{5}} = 2.$$

Les deux valeurs concordent.
b. La suite $L = g_\alpha + g_\beta$ est définie par $L_n = \alpha^n + \beta^n$. Ses deux premiers termes sont

$$L_0 = 1 + 1 = 2, \qquad L_1 = \alpha + \beta = 1.$$

Comme $L \in S$, les termes suivants s'obtiennent par la récurrence : $L_2 = 1+2 = 3$, $L_3 = 3+1 = 4$, $L_4 = 4+3 = 7$, $L_5 = 7+4 = 11$. Les six premiers termes de L sont donc

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11.$$

La remarque. Tous ces nombres sont **entiers**, alors que α et β sont irrationnels. Ce n'est pas un hasard des premiers rangs : les deux premiers termes de L sont entiers, et la relation $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ fabrique un entier à partir de deux entiers, donc une récurrence immédiate montre que $L_n = \alpha^n + \beta^n$ est un entier pour tout n. Le même argument explique pourquoi la formule de la question a, qui fait intervenir $\sqrt{5}$ trois fois, ne produit que des entiers. (La suite L porte le nom de suite de Lucas.)

Commentaire

Cet exercice démonte la méthode des récurrences linéaires d'ordre 2 et en montre les deux rouages. Le premier est l'isomorphisme φ, qui dit qu'il y a exactement deux degrés de liberté dans le choix d'une suite de S, donc que S est un plan. Le second est la recherche de suites géométriques dans S, qui fait apparaître l'équation $q^2 = q+1$: c'est l'« équation caractéristique », qui n'a ici rien de mystérieux, puisqu'elle n'est que la condition pour qu'une suite géométrique soit solution. Une fois ces deux faits établis, le théorème « une famille libre de deux vecteurs d'un plan en est une base » fait tout le reste.
Ce point de vue explique aussi le cas où l'équation $q^2 = aq+b$ d'une autre récurrence n'a qu'une seule solution r : on ne dispose alors que d'une suite géométrique, qui n'engendre qu'une droite dans le plan des solutions, et il faut trouver une seconde suite de S non proportionnelle à la première. C'est l'origine de la suite (nr^n) que le chapitre sur les suites réelles ajoute dans ce cas.
Enfin, le procédé de la question 5 est celui qu'on emploie dans tout espace de dimension finie : pour identifier un vecteur, on calcule ses coordonnées dans une base bien choisie. La base (σ, τ) rend les coordonnées évidentes, ce sont les deux premiers termes ; la base (g_α, g_β) rend les termes évidents, ce sont des puissances. Passer de l'une à l'autre, c'est résoudre le petit système de la question 5.

Exercice 11 ★★ Des équations à Vect, et retour

Notions : Familles génératrices, Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré

Un sous-espace vectoriel se décrit de deux manières : par des **équations** que vérifient ses vecteurs, ou comme **sous-espace engendré** par une famille. L'exercice fait passer de l'une à l'autre dans les deux sens.

1. On pose $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer qu'un vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ appartient à F si et seulement si $x - y + z = 0$.

b. Le vecteur $(1,0,0)$ appartient-il à F ? La famille (u_1, u_2) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?

2. On considère

$$G = \{\, (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \ \text{ et } \ x + 2y + t = 0 \,\}.$$

a. Déterminer deux vecteurs g_1, g_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $G = \mathrm{Vect}(g_1, g_2)$. En déduire que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b. Vérifier que le vecteur $(3,-2,1,1)$ appartient à G, et l'écrire comme combinaison linéaire de g_1 et g_2.

3. On pose $D = \mathrm{Vect}((1,2,1),(2,4,2))$. Montrer que D est une droite vectorielle, en donner un vecteur directeur, et la décrire par un système de deux équations.

4. On pose $w = (1,2,1)$.

a. Montrer que la famille (u_1, u_2, w) engendre F.

b. Cette famille est-elle libre ?

c. La droite D de la question 3 est-elle contenue dans F ?

Corrigé

1. Du Vect vers une équation

a. Par définition du sous-espace engendré, un vecteur (x,y,z) appartient à F si et seulement s'il existe deux réels a, b tels que $(x,y,z) = au_1 + bu_2$. Or

$$au_1 + bu_2 = a(1,1,0) + b(0,1,1) = (a,\ a+b,\ b).$$

Le vecteur (x,y,z) appartient donc à F si et seulement si le système suivant, d'inconnues a et b, a au moins une solution :

$$\begin{cases} a = x \\ a + b = y \\ b = z \end{cases}$$

Les nombres x, y, z sont ici des données, et l'on applique le pivot aux inconnues a, b. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $b = y - x$, puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ (avec la nouvelle ligne L_2) élimine

b de la troisième ligne :

$$\begin{cases} a = x \\ b = y - x \\ 0 = z - y + x \end{cases}$$

Ce système est équivalent au premier. Ses deux premières lignes fournissent toujours une valeur de a et une valeur de b ; la troisième ne contient plus d'inconnue, c'est une **condition** sur les données. Le système a donc une solution si et seulement si $x - y + z = 0$, et l'on a montré

$$(x, y, z) \in F \iff x - y + z = 0. \qquad \square$$

Vérification. Les deux vecteurs qui engendrent F doivent satisfaire l'équation : pour u_1, $1 - 1 + 0 = 0$; pour u_2, $0 - 1 + 1 = 0$. C'est le cas.
Attention. Le geste est d'**éliminer les paramètres** a et b, pas de les calculer. Une réponse du type « $a = x$ et $b = z$ » ne décrit pas F : elle oublie la condition sur y, qui est justement l'équation cherchée. C'est la ligne qui ne contient plus d'inconnue après le pivot qui porte l'information.
b. Pour $(1, 0, 0)$, on calcule $x - y + z = 1 - 0 + 0 = 1 \neq 0$. Donc $(1, 0, 0) \notin F$.
La famille (u_1, u_2) n'engendre donc pas $\mathbb{R}^3$: si elle l'engendrait, on aurait $F = \mathbb{R}^3$, et tout vecteur de $\mathbb{R}^3$, en particulier $(1, 0, 0)$, appartiendrait à F. Un seul vecteur hors de F suffit à le prouver, et l'équation le fournit sans calcul. (On peut aussi invoquer la dimension : une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ a au moins trois vecteurs.)

2. Des équations vers un Vect

a. On résout le système qui définit G, d'inconnues x, y, z, t :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne le système équivalent

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

Il est échelonné, les pivots portent sur x et y : les inconnues z et t sont libres et servent de paramètres. La seconde ligne donne $y = -z - t$, puis la première, en remontant, $x = z - y = z + z + t = 2z + t$. Ainsi, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in G &\iff x = 2z + t \ \text{ et } \ y = -z - t \\ &\iff (x, y, z, t) = (2z + t,\ -z - t,\ z,\ t) \\ &\iff (x, y, z, t) = z\,(2, -1, 1, 0) + t\,(1, -1, 0, 1). \end{aligned}$$

Posons $g_1 = (2, -1, 1, 0)$ et $g_2 = (1, -1, 0, 1)$. On a montré que tout vecteur de G est combinaison linéaire de g_1 et g_2. Réciproquement, une combinaison $\lambda g_1 + \mu g_2 = (2\lambda + \mu,\ -\lambda - \mu,\ \lambda,\ \mu)$ est de la forme $(2z + t, -z - t, z, t)$ avec $z = \lambda$ et $t = \mu$, donc elle appartient à G. D'où

$$G = \mathrm{Vect}(g_1, g_2).$$

Vérification. Pour g_1 : $2 + (-1) - 1 = 0$ et $2 + 2 \times (-1) + 0 = 0$. Pour g_2 : $1 + (-1) - 0 = 0$ et $1 + 2 \times (-1) + 1 = 0$. Les deux vecteurs vérifient les deux équations.
Conséquence. Un sous-espace engendré par une famille de vecteurs est toujours un sous-espace vectoriel (c'est le plus petit qui contient la famille). Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
$\square$

On aurait aussi pu le montrer directement, comme dans l'exercice 09 : G contient $0_{\mathbb{R}^4}$, et une combinaison linéaire de deux solutions d'un système **homogène** en est encore une. La description par Vect a l'avantage de donner en plus des vecteurs de G qu'on peut manipuler.
b. Pour $(3,-2,1,1)$, les deux équations donnent $3+(-2)-1=0$ et $3+2\times(-2)+1=0$: le vecteur appartient à G.
D'après le calcul de la question a, ses coefficients sur g_1 et g_2 sont ses deux dernières coordonnées, $z=1$ et $t=1$. Donc

$$(3,-2,1,1) = g_1 + g_2,$$

ce que l'on contrôle : $(2,-1,1,0)+(1,-1,0,1)=(3,-2,1,1)$.

3. Deux vecteurs qui n'engendrent qu'une droite

Posons $a=(1,2,1)$. On remarque que $(2,4,2)=2a$. Montrons que $D=\mathrm{Vect}(a)$, par double inclusion.
Inclusion $D\subset\mathrm{Vect}(a)$. Un vecteur de D s'écrit $\lambda a+\mu(2a)=(\lambda+2\mu)\,a$, qui est un multiple de a.
Inclusion $\mathrm{Vect}(a)\subset D$. Un multiple λa s'écrit $\lambda a+0\cdot(2a)$, qui est un élément de D.
Donc $D=\mathrm{Vect}(a)$. Comme $a\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, l'ensemble D est une **droite vectorielle**, de vecteur directeur $a=(1,2,1)$.
Équations. Un vecteur (x,y,z) appartient à D si et seulement s'il existe un réel λ tel que $x=\lambda$, $y=2\lambda$ et $z=\lambda$. Si c'est le cas, $y=2x$ et $z=x$. Réciproquement, si $y=2x$ et $z=x$, alors $(x,y,z)=(x,2x,x)=x\,a$ appartient à D (on prend $\lambda=x$). Ainsi D est l'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Vérification. Pour a : $2-2=0$ et $1-1=0$; pour $2a=(2,4,2)$: $4-4=0$ et $2-2=0$.
Attention. Deux vecteurs n'engendrent pas toujours un plan. Ils en engendrent un si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires ; ici, ils le sont, et le second vecteur n'apporte rien au premier. Compter les vecteurs d'une famille ne renseigne pas sur la taille de l'espace qu'elle engendre.

4. Une famille génératrice qui n'est pas libre

a. On remarque que

$$u_1+u_2=(1,1,0)+(0,1,1)=(1,2,1)=w.$$

Montrons que $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,w)=F$, par double inclusion.
Inclusion $F\subset\mathrm{Vect}(u_1,u_2,w)$. Un vecteur de F s'écrit $au_1+bu_2=au_1+bu_2+0\cdot w$.
Inclusion $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,w)\subset F$. Soient a,b,c des réels. En remplaçant w par u_1+u_2,

$$au_1+bu_2+cw=(a+c)\,u_1+(b+c)\,u_2,$$

qui est une combinaison linéaire de u_1 et u_2, donc un élément de F.
Ainsi la famille (u_1,u_2,w) engendre F. □
b. Elle n'est pas libre. La relation $w=u_1+u_2$ se réécrit

$$1\cdot u_1+1\cdot u_2+(-1)\cdot w=0_{\mathbb{R}^3},$$

combinaison linéaire nulle dont les coefficients $(1,1,-1)$ ne sont pas tous nuls. On la vérifie coordonnée par coordonnée : $1+0-1=0$, $1+1-2=0$, $0+1-1=0$. La famille (u_1,u_2,w) est liée.

Elle est génératrice de F sans être une base de F : le vecteur w y est **superflu**. Le calcul de la question a montre le mécanisme général : retirer d'une famille génératrice un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne change pas l'espace engendré.
c. Oui. D'après la question 3, $D = \text{Vect}(w)$. Or $w \in F$: on vient de voir que $w = u_1 + u_2$, et l'équation de F le confirme, $1 - 2 + 1 = 0$. Comme F est un sous-espace vectoriel, il contient tous les multiples de w, donc $D \subset F$.

Commentaire

Les deux descriptions d'un sous-espace ne servent pas à la même chose. Les **équations** servent à **tester** : savoir si $(1, 0, 0)$ est dans F a pris une soustraction. Le **Vect** sert à **produire** : il fournit autant de vecteurs du sous-espace qu'on veut, et il donne directement les coefficients d'une combinaison, comme pour $(3, -2, 1, 1)$.
Les deux passages reposent sur le pivot, mais pas de la même façon. Du Vect vers les équations, on écrit le système dont les inconnues sont les **coefficients** de la combinaison, et l'on cherche à quelle condition sur les données il a une solution : les équations sont les lignes qui ne contiennent plus d'inconnue. Des équations vers le Vect, on résout le système dont les inconnues sont les **coordonnées**, et les inconnues libres deviennent les coefficients de la famille génératrice.
On observera enfin les nombres : un plan de $\mathbb{R}^3$ s'est décrit par 1 équation, la droite D de $\mathbb{R}^3$ par 2 équations, le sous-espace G de $\mathbb{R}^4$ par 2 équations et 2 vecteurs. Dans les trois cas, le nombre d'équations et le nombre de paramètres s'ajoutent pour donner la dimension de l'espace ambiant. Ce n'est pas une coïncidence, mais ce n'est pas non plus une règle qu'on peut appliquer à l'aveugle : il faut que les équations soient « indépendantes », et c'est le théorème du rang qui donnera à cette remarque un énoncé précis.

Exercice 12 ★ La liberté se teste par un système

Notions : Familles libres et familles liées, Rang d'une famille de vecteurs et rang d'une matrice

Pour chacune des familles suivantes, dire si elle est libre ou liée en résolvant un système par la méthode du pivot. Lorsqu'elle est liée, donner une relation de dépendance linéaire explicite et la vérifier. Donner enfin le rang de chaque famille.

1. Dans $\mathbb{R}^3$:

a. $\mathcal{F}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$;

b. $\mathcal{F}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (0, 1, -1)$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$:

a. $\mathcal{F}_3 = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ avec $w_1 = (1, 1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 1)$ et $w_4 = (1, 0, 0, 1)$;

b. $\mathcal{F}_4 = (w_1, w_2, w_3)$ avec $w_1 = (1, 0, 1, 2)$, $w_2 = (0, 1, 1, 1)$, $w_3 = (1, 1, 0, 0)$. Cette famille peut-elle engendrer $\mathbb{R}^4$?

3. Soit m un réel. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{G}_m = (a, b, c_m)$ avec

$$a = (1, 1, 1), \qquad b = (1, 2, 4), \qquad c_m = (1, 3, m).$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{G}_m$ est liée, donner dans ce cas une relation de dépendance, et le rang de $\mathcal{G}_m$ selon m.

Corrigé

La méthode, commune à toutes les familles. Pour une famille $(x_1, \dots, x_p)$, on écrit « Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$ » et l'on traduit cette égalité vectorielle coordonnée par coordonnée : on obtient un système **homogène** d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, avec une équation par coordonnée. La famille est libre si et seulement si ce système n'a que la solution nulle. Si elle est liée, toute solution non nulle du système est une relation de dépendance.
Le **rang** d'une famille est la dimension de l'espace qu'elle engendre. Pour une famille libre, c'est le nombre de ses vecteurs. Pour une famille liée, on retire un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, ce qui ne change pas l'espace engendré, et l'on recommence jusqu'à obtenir une famille libre.

1.a. La famille $\mathcal{F}_1$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Coordonnée par coordonnée, l'égalité s'écrit

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On prend λ_1 pour pivot dans la première ligne. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

La troisième ligne donne $\lambda_2 = 0$; en remontant, la deuxième donne $\lambda_3 = -3\lambda_2 = 0$, puis la première $\lambda_1 = -2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$.
La seule solution est la solution nulle : **la famille $\mathcal{F}_1$ est libre**, et son **rang est** 3. Trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$, espace de dimension 3, forment une base : $\mathcal{F}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.b. La famille $\mathcal{F}_2$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Le système s'écrit

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donne $-\lambda_2 - \lambda_3 = 0$, puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne $0 = 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système échelonné n'a que deux pivots pour trois inconnues : λ_3 est libre. En remontant, $\lambda_2 = -\lambda_3$ et $\lambda_1 = -2\lambda_2 = 2\lambda_3$. L'ensemble des solutions est

$$\{\, (2\lambda_3,\ -\lambda_3,\ \lambda_3) \mid \lambda_3 \in \mathbb{R} \,\},$$

qui n'est pas réduit à la solution nulle. **La famille $\mathcal{F}_2$ est liée.**
Relation explicite. En prenant $\lambda_3 = 1$, on obtient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2, -1, 1)$, c'est-à-dire

$$2v_1 - v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Vérification. $2(1,0,2) - (2,1,3) + (0,1,-1) = (2-2+0,\ 0-1+1,\ 4-3-1) = (0,0,0)$.
Rang. La relation donne $v_3 = v_2 - 2v_1$: le vecteur v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2, donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Les vecteurs $v_1 = (1,0,2)$ et $v_2 = (2,1,3)$ ne sont pas colinéaires : si l'on avait $v_2 = kv_1$, la première coordonnée imposerait $k = 2$ et la deuxième $1 = 0$. La famille (v_1, v_2) est donc libre, et **le rang de $\mathcal{F}_2$ est** 2 : ces trois vecteurs n'engendrent qu'un plan.
Attention. Une famille liée n'a pas « un vecteur de trop » choisi d'avance. Ici, la relation $2v_1 - v_2 + v_3 = 0$ a tous ses coefficients non nuls, donc **chacun** des trois vecteurs est combinaison des deux autres, et l'on aurait pu retirer n'importe lequel. Ce n'est pas toujours le cas : un vecteur dont le coefficient est nul dans toutes les relations ne peut pas être retiré.

2.a. La famille $\mathcal{F}_3$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels tels que $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Les quatre coordonnées donnent

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Les opérations successives $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, qui donne $\lambda_2 - \lambda_4 = 0$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, qui donne $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$, puis $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, qui donne $0 = 0$, conduisent au système échelonné

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'inconnue λ_4 est libre, et $\lambda_1 = -\lambda_4$, $\lambda_2 = \lambda_4$, $\lambda_3 = -\lambda_4$. Les solutions sont les quadruplets $(-\lambda_4, \lambda_4, -\lambda_4, \lambda_4)$ avec $\lambda_4 \in \mathbb{R}$: **la famille $\mathcal{F}_3$ est liée.**
Relation explicite. Avec $\lambda_4 = -1$:

$$w_1 - w_2 + w_3 - w_4 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Vérification. Coordonnée par coordonnée : $1-0+0-1=0$, $1-1+0-0=0$, $0-1+1-0=0$, $0-0+1-1=0$.
Rang. La relation donne $w_4 = w_1 - w_2 + w_3$, donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$. La famille (w_1, w_2, w_3) est libre : une combinaison nulle $\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \mu_3 w_3 = 0$ donne, coordonnée par coordonnée, $\mu_1 = 0$, $\mu_1 + \mu_2 = 0$, $\mu_2 + \mu_3 = 0$ et $\mu_3 = 0$, d'où $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. **Le rang de $\mathcal{F}_3$ est 3.**
On notera que les quatre vecteurs de $\mathcal{F}_3$ sont deux à deux non colinéaires (aucun n'est multiple d'un autre, puisque leurs zéros ne sont pas placés aux mêmes endroits) : cela ne les empêche pas d'être liés. La liberté est une propriété de la famille entière, pas des paires.

2.b. La famille $\mathcal{F}_4$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Le système a quatre équations pour trois inconnues :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$ éliminent λ_1 :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ éliminent λ_2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La troisième ligne donne $\lambda_3 = 0$ (la quatrième le confirme), puis $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$. **La famille $\mathcal{F}_4$ est libre**, et son **rang est** 3.
Peut-elle engendrer $\mathbb{R}^4$? Non : l'espace qu'elle engendre est de dimension 3, son rang, alors que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Plus généralement, une famille génératrice d'un espace de dimension n a au moins n vecteurs, et trois vecteurs ne peuvent jamais engendrer $\mathbb{R}^4$, qu'ils soient libres ou non.

3. La famille à paramètre $\mathcal{G}_m$

Soient λ, μ, ν des réels tels que $\lambda a + \mu b + \nu c_m = 0_{\mathbb{R}^3}$. Le système s'écrit

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + m\nu = 0 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \\ 3\mu + (m-1)\nu = 0 \end{cases}$$

puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donne

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \\ (m-7)\,\nu = 0 \end{cases}$$

Le coefficient $m-7$ est le seul endroit où le paramètre intervient, et l'on distingue deux cas selon qu'il est nul ou non.
Cas $m \neq 7$. On peut diviser la dernière ligne par $m-7 \neq 0$: $\nu = 0$, puis $\mu = -2\nu = 0$ et $\lambda = -\mu - \nu = 0$. La famille $\mathcal{G}_m$ est **libre**, de **rang** 3 : c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Cas $m = 7$. La dernière ligne devient $0 = 0$ et ν est libre : $\mu = -2\nu$, $\lambda = -\mu - \nu = \nu$. Avec $\nu = 1$, on obtient $(\lambda, \mu, \nu) = (1, -2, 1)$, et la famille $\mathcal{G}_7$ est **liée**, avec la relation

$$a - 2b + c_7 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Vérification. $(1,1,1) - 2(1,2,4) + (1,3,7) = (1-2+1,\ 1-4+3,\ 1-8+7) = (0,0,0)$.
Le rang de $\mathcal{G}_7$ vaut 2 : la relation donne $c_7 = 2b - a$, donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}_7) = \mathrm{Vect}(a, b)$, et $a = (1,1,1)$ et $b = (1,2,4)$ ne sont pas colinéaires (un multiple de a a ses trois coordonnées égales).
Bilan. $\mathcal{G}_m$ est liée si et seulement si $m = 7$; son rang vaut 3 si $m \neq 7$ et 2 si $m = 7$.
Attention. L'erreur classique est de diviser la dernière ligne par $m-7$ sans avoir distingué les cas, ce qui fait conclure « libre » pour toutes les valeurs de m. Une division par une expression qui dépend d'un paramètre se justifie à chaque fois par une hypothèse écrite.

Commentaire

Les cinq familles se traitent par le même geste, et c'est le but : une question de liberté **est** un système homogène, dont les inconnues sont les coefficients et dont les équations sont les coordonnées. Le pivot dit alors tout. S'il reste autant de pivots que d'inconnues, la famille est libre. S'il reste une inconnue libre, la famille est liée, et la remontée du système fournit la relation, qu'il suffit ensuite de vérifier en trois soustractions.
Le nombre de pivots, d'ailleurs, est exactement le rang de la famille : 3 pour $\mathcal{F}_1$, 2 pour $\mathcal{F}_2$, 3 pour $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$, 3 ou 2 pour $\mathcal{G}_m$. Ce lien entre le rang d'une famille et les pivots de la matrice de ses coordonnées est l'objet de l'exercice 20. Ici, on a calculé le rang à partir de sa définition, la dimension de l'espace engendré, en retirant les vecteurs superflus un par un.

Exercice 13 ★★ Familles de fonctions

Notions : Familles libres et familles liées, Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques

On note E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel. Son vecteur nul 0_E est la fonction nulle, et l'on note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1.

1. Soient a, b deux réels. Écrire, avec un quantificateur, ce que signifie l'égalité $a\cos + b\sin = 0_E$. Démontrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre, en rédigeant la démonstration complète.

2. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on note f_k la fonction $x \mapsto e^{kx}$. Démontrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre, en étudiant une limite en $+\infty$.

3. La famille $(\mathbf{1}, \cos^2, \sin^2)$ est-elle libre ?

4. On note g la fonction $x \mapsto |x|$ et id la fonction $x \mapsto x$.

a. La famille (g, id) est-elle libre dans E ?

b. Même question dans l'espace des fonctions de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, pour les restrictions de g et de id à $[0, +\infty[$.

5. On note h la fonction $x \mapsto \cos(x+1)$. La famille $(\cos, \sin, h)$ est-elle libre ?

Corrigé

Ce que veut dire « $= 0_E$ »

Dans E, les vecteurs sont des fonctions, et une égalité de vecteurs est une égalité de **fonctions** : deux fonctions sont égales lorsqu'elles prennent la même valeur en tout point. Une relation $a\cos + b\sin = 0_E$ ne dit donc pas qu'une expression s'annule quelque part, elle dit qu'elle s'annule **partout**. Toute la technique de l'exercice repose sur ce point : une égalité vraie pour tout réel x peut être spécialisée en n'importe quel x choisi, ou passée à la limite.

1. La famille $(\cos, \sin)$

Traduction. Par définition des opérations dans E, la fonction $a\cos + b\sin$ est $x \mapsto a\cos x + b\sin x$. Donc

$$a\cos + b\sin = 0_E \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x = 0.$$

Rédaction modèle. Soient a, b des réels tels que $a\cos + b\sin = 0_E$, c'est-à-dire tels que $a\cos x + b\sin x = 0$ pour tout réel x. Montrons que $a = b = 0$.

— En prenant $x = 0$, il vient $a\cos 0 + b\sin 0 = 0$, soit $a \times 1 + b \times 0 = 0$, donc $a = 0$.
— En prenant $x = \dfrac{\pi}{2}$, il vient $a\cos\dfrac{\pi}{2} + b\sin\dfrac{\pi}{2} = 0$, soit $a \times 0 + b \times 1 = 0$, donc $b = 0$.

Ainsi $a = b = 0$: la famille $(\cos, \sin)$ est libre. □
Le choix des points n'est pas indifférent. On a pris des points où l'une des deux fonctions s'annule et pas l'autre, si bien que chaque évaluation isole un coefficient.
Attention. Des points mal choisis ne prouvent rien. En $x = 0$ et en $x = \pi$, on obtient $a = 0$ et $-a = 0$: deux équations qui ne disent rien de b. Il serait faux d'en conclure que la famille est liée. Évaluer en des points donne des **conditions nécessaires** sur les coefficients : si elles suffisent à imposer $a = b = 0$, la liberté est démontrée ; si elles ne suffisent pas, on n'a rien démontré du tout, il faut changer de points ou de méthode.

2. La famille (f_1, f_2, f_3) des exponentielles

Soient a, b, c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0_E$, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ae^x + be^{2x} + ce^{3x} = 0.$$

Montrons que $a = b = c = 0$.
Le coefficient c. Pour tout réel x, on multiplie l'égalité par e^{-3x}, qui est un réel non nul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ae^{-2x} + be^{-x} + c = 0.$$

Quand $x \to +\infty$, on a $e^{-2x} \to 0$ et $e^{-x} \to 0$, donc le membre de gauche tend vers c. Mais il est constamment égal à 0, donc sa limite est 0. Par unicité de la limite, $c = 0$.
Le coefficient b. L'égalité de départ devient $ae^x + be^{2x} = 0$ pour tout x. On la multiplie par e^{-2x} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ae^{-x} + b = 0,$$

et le même passage à la limite en $+\infty$ donne $b = 0$.
Le coefficient a. Il reste $ae^x = 0$ pour tout x ; en $x = 0$, cela donne $a = 0$.
Ainsi $a = b = c = 0$: la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. □
Le principe est de diviser par la fonction qui **croît le plus vite**, de sorte que toutes les autres deviennent négligeables en $+\infty$ et que seul son coefficient survive à la limite. On élimine ainsi les coefficients un par un, du plus rapide au plus lent.
Une autre voie, par des points bien choisis. En évaluant en $x = 0$, $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$, on a $e^{k \ln 2} = 2^k$ et $e^{k \ln 3} = 3^k$, et l'on obtient le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 4b + 8c = 0 \\ 3a + 9b + 27c = 0 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donnent $2b + 6c = 0$ et $6b + 24c = 0$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donne $6c = 0$. Donc $c = 0$, puis $b = 0$, puis $a = 0$. Les deux méthodes concluent ; celle de la limite se généralise sans effort à n exponentielles, celle des points demande de résoudre un système de plus en plus gros.

3. La famille $(\mathbf{1}, \cos^2, \sin^2)$

Elle est **liée**. Pour tout réel x, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot \mathbf{1}(x) + (-1) \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot \sin^2 x &= 1 - (\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$1 \cdot \mathbf{1} + (-1) \cdot \cos^2 + (-1) \cdot \sin^2 = 0_E,$$

et les coefficients $(1, -1, -1)$ ne sont pas tous nuls. C'est une relation de dépendance linéaire, et elle est vérifiée **en tout point** x, ce qui est exactement ce qu'exige une égalité dans E.
On peut préciser : la famille $(\cos^2, \sin^2)$ est libre (en $x = 0$, une combinaison nulle $a\cos^2 + b\sin^2$ donne $a = 0$, et en $x = \dfrac{\pi}{2}$ elle donne $b = 0$), et $\mathbf{1} = \cos^2 + \sin^2$ appartient à l'espace qu'elle engendre. La famille de l'énoncé engendre donc un plan de E, et non un espace de dimension 3.
Attention. Pour démontrer qu'une famille de fonctions est liée, on ne peut pas se contenter d'évaluer en quelques points : il faut une relation vraie **pour tout** x. C'est l'asymétrie de la situation : des points suffisent pour prouver la liberté, jamais pour prouver la dépendance.

4. Valeur absolue et identité

a. Soient a, b des réels tels que $ag + b\,\mathrm{id} = 0_E$, c'est-à-dire $a|x| + bx = 0$ pour tout réel x. Montrons que $a = b = 0$.

— En $x = 1$: $a + b = 0$.
— En $x = -1$: $a|-1| + b \times (-1) = 0$, soit $a - b = 0$.

En additionnant les deux équations, $2a = 0$, donc $a = 0$, puis $b = 0$. La famille (g, id) est **libre dans** E. □
Le choix d'un point négatif était indispensable : c'est là que g et id diffèrent.
b. Sur $[0, +\infty[$, la valeur absolue coïncide avec l'identité : pour tout $x \geqslant 0$, $|x| = x$. Les restrictions vérifient donc

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 1 \cdot |x| + (-1) \cdot x = 0,$$

relation de coefficients $(1, -1)$ non tous nuls : la famille des restrictions est **liée**. Ce sont même deux fois la même fonction.
La comparaison de a et de b montre qu'une famille de fonctions n'est pas libre ou liée « dans l'absolu » : la réponse dépend de l'espace dans lequel on travaille, c'est-à-dire de l'ensemble de définition. Deux formules différentes peuvent définir la même fonction sur un ensemble plus petit.

5. La famille $(\cos, \sin, h)$

Elle est **liée**. D'après la formule d'addition du cosinus, pour tout réel x,

$$h(x) = \cos(x + 1) = \cos x \cos 1 - \sin x \sin 1.$$

Les nombres $\cos 1$ et $\sin 1$ sont des **réels fixés**, qui ne dépendent pas de x : ce sont des scalaires. L'égalité précédente, vraie pour tout x, s'écrit donc dans E

$$(\cos 1) \cdot \cos + (-\sin 1) \cdot \sin + (-1) \cdot h = 0_E,$$

relation de dépendance de coefficients $(\cos 1, -\sin 1, -1)$, qui ne sont pas tous nuls puisque le dernier vaut -1. Autrement dit, $h = (\cos 1)\cos - (\sin 1)\sin$ appartient au plan $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.
Attention. Dans une relation de dépendance, les coefficients sont des **nombres**, pas des fonctions de x. L'égalité $(\sin x)\cos x - (\cos x)\sin x = 0$, vraie pour tout réel x, ne fournit aucune relation de dépendance entre cos et sin : les « coefficients » $\sin x$ et $-\cos x$ y varient avec x. Si de tels coefficients étaient permis, toute famille de deux fonctions (u, v) serait liée, puisque $v(x)\,u(x) - u(x)\,v(x) = 0$ pour tout x. C'est ce qui distingue le cas présent, où $\cos 1$ et $\sin 1$ sont des constantes.

Commentaire

Deux techniques ont servi pour prouver la liberté, et elles reposent toutes deux sur le fait qu'une égalité dans E est vraie **en tout point**. Évaluer en des points bien choisis transforme l'égalité de fonctions en un système d'équations sur les coefficients ; on choisit les points pour que le système soit simple, par exemple des points où certaines fonctions s'annulent. Passer à la limite en $+\infty$ isole le coefficient de la fonction dominante. Dans les deux cas, on a le droit d'utiliser **une partie** des informations, puisqu'on n'en déduit que des conditions nécessaires et que la conclusion visée est $a = b = c = 0$.
Pour prouver qu'une famille est liée, il n'y a qu'une méthode : exhiber une relation, avec des coefficients numériques non tous nuls, et la vérifier pour **tout** x. Ces relations viennent presque toujours d'une identité connue : $\cos^2 + \sin^2 = 1$, la formule d'addition, le fait que $|x| = x$ pour x positif.

Exercice 14 ★★ Fabriquer des familles à partir d'une famille libre

Notions : Familles libres et familles liées, Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques

Soit E un espace vectoriel réel, et soit (u, v, w) une famille **libre** de trois vecteurs de E. On ne sait rien d'autre de ces vecteurs : les démonstrations ne doivent utiliser que la liberté de (u, v, w).

1. Montrer que la famille $(u,\ u+v,\ u+v+w)$ est libre.

2. a. Montrer que la famille $(u-v,\ v-w,\ w-u)$ est liée.

b. Montrer que ses vecteurs sont pourtant deux à deux non colinéaires, et que la famille $(u-v,\ v-w)$ est libre.

3. Soit a un réel. Montrer que la famille

$$(u+av,\ v+aw,\ w+au)$$

est libre si et seulement si $a \neq -1$. Que se passe-t-il pour $a = -1$?

4. Montrer par un exemple dans $\mathbb{R}^2$ que la conclusion de la question 1 peut être fausse si l'on ne suppose plus (u, v, w) libre.

Corrigé

Le principe. Dans les questions 1, 2.b et 3, on part d'une combinaison linéaire nulle des nouveaux vecteurs, on la **réécrit comme combinaison de u, v, w** en développant et en regroupant, puis on utilise la liberté de (u, v, w) : une combinaison linéaire nulle de u, v, w a tous ses coefficients nuls. On obtient ainsi un système sur les coefficients de départ.

1. La famille $(u,\ u+v,\ u+v+w)$

Soient α, β, γ des réels tels que

$$\alpha u + \beta(u+v) + \gamma(u+v+w) = 0_E.$$

Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. En développant et en regroupant les termes selon u, v, w, l'égalité devient

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,u + (\beta+\gamma)\,v + \gamma\,w = 0_E.$$

C'est une combinaison linéaire nulle de u, v, w. Comme la famille (u, v, w) est libre, tous ses coefficients sont nuls :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Le système est déjà échelonné. La dernière ligne donne $\gamma = 0$, puis la deuxième $\beta = 0$, puis la première $\alpha = 0$.
Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = 0$: la famille $(u,\ u+v,\ u+v+w)$ est libre. □
Attention. Le passage décisif est celui où l'on écrit « comme la famille (u, v, w) est libre, tous ses coefficients sont nuls ». C'est le **seul** endroit où l'hypothèse sert, et il doit être écrit en toutes lettres. Sans lui, rien n'autorise à « identifier les coefficients » : la question 4 montre que la conclusion devient fausse.
On remarquera aussi que les deux familles engendrent le même sous-espace de E : les nouveaux vecteurs sont des combinaisons de u, v, w, et réciproquement $v = (u+v) - u$ et $w = (u+v+w) - (u+v)$.

2. La famille $(u-v,\ v-w,\ w-u)$

a. La somme des trois vecteurs est nulle :

$$1\cdot(u-v)+1\cdot(v-w)+1\cdot(w-u)=u-v+v-w+w-u=0_E.$$

C'est une combinaison linéaire nulle dont les coefficients $(1,1,1)$ ne sont pas tous nuls : la famille est **liée**. □

On n'a pas eu besoin de la liberté de (u,v,w) pour cette question : la relation est vraie pour **n'importe quels** vecteurs u,v,w.

b. *Les vecteurs sont deux à deux non colinéaires.* Montrons-le pour $u-v$ et $v-w$. Aucun des deux n'est nul : si l'on avait $u-v=0_E$, la combinaison $1\cdot u+(-1)\cdot v+0\cdot w$ serait nulle avec des coefficients non tous nuls, ce que la liberté de (u,v,w) interdit ; de même pour $v-w$. Supposons alors qu'il existe un réel k tel que $u-v=k(v-w)$. On aurait

$$1\cdot u+(-1-k)\,v+k\,w=0_E,$$

combinaison linéaire nulle de u,v,w dont le coefficient de u vaut $1\neq 0$, ce qui contredit la liberté de (u,v,w). Inversement, $v-w$ n'est pas non plus un multiple de $u-v$: si l'on avait $v-w=k(u-v)$, le réel k serait non nul puisque $v-w\neq 0_E$, et l'on aurait $u-v=\frac{1}{k}(v-w)$, ce qu'on vient d'exclure. Donc $u-v$ et $v-w$ ne sont pas colinéaires.

Les deux autres paires se traitent de même, et l'on peut éviter de recopier le calcul : les vecteurs $v-w$ et $w-u$ s'obtiennent à partir de $u-v$ et $v-w$ en remplaçant (u,v,w) par (v,w,u), et la famille (v,w,u) est encore libre ; de même, $w-u$ et $u-v$ s'obtiennent en remplaçant (u,v,w) par (w,u,v).

La famille $(u-v,\ v-w)$ *est libre.* Soient α,β des réels tels que $\alpha(u-v)+\beta(v-w)=0_E$. En regroupant,

$$\alpha\,u+(\beta-\alpha)\,v+(-\beta)\,w=0_E,$$

et la liberté de (u,v,w) donne $\alpha=0$, $\beta-\alpha=0$ et $\beta=0$. La famille est libre. □

Ce que cela montre. On a trois vecteurs dont aucun n'est multiple d'un autre, et qui sont pourtant liés : le troisième, $w-u=-(u-v)-(v-w)$, est dans le plan engendré par les deux premiers. « Deux à deux non colinéaires » ne veut pas dire « libre » dès qu'il y a trois vecteurs ou plus ; l'exercice 16 revient sur cette confusion.

3. La famille $(u+av,\ v+aw,\ w+au)$

Soient α,β,γ des réels tels que

$$\alpha(u+av)+\beta(v+aw)+\gamma(w+au)=0_E.$$

En développant, $\alpha u+a\alpha\,v+\beta v+a\beta\,w+\gamma w+a\gamma\,u=0_E$, puis en regroupant selon u, v, w,

$$(\alpha+a\gamma)\,u+(a\alpha+\beta)\,v+(a\beta+\gamma)\,w=0_E.$$

La liberté de (u,v,w) donne le système

$$\begin{cases}\alpha+a\gamma=0\\ a\alpha+\beta=0\\ a\beta+\gamma=0\end{cases}$$

On le résout par le pivot. L'opération $L_2\leftarrow L_2-aL_1$ élimine α de la deuxième ligne, qui devient $\beta-a^2\gamma=0$. Puis l'opération $L_3\leftarrow L_3-aL_2$, avec cette nouvelle ligne L_2, élimine β : $a\beta+\gamma-a(\beta-a^2\gamma)=\gamma+a^3\gamma$. On obtient le système équivalent

$$\begin{cases}\alpha+a\gamma=0\\ \beta-a^2\gamma=0\\ (1+a^3)\,\gamma=0\end{cases}$$

Tout dépend du coefficient $1 + a^3$. Or, la fonction $x \mapsto x^3$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'égalité $a^3 = -1 = (-1)^3$ équivaut à $a = -1$. Donc $1 + a^3 = 0$ si et seulement si $a = -1$.
Cas $a \neq -1$. Alors $1 + a^3 \neq 0$, et la troisième ligne donne $\gamma = 0$. En remontant, $\beta = a^2\gamma = 0$ et $\alpha = -a\gamma = 0$. La famille est **libre**.
Cas $a = -1$. La troisième ligne devient $0 = 0$ et γ est libre. Avec $\gamma = 1$, on obtient $\beta = a^2\gamma = 1$ et $\alpha = -a\gamma = 1$. La famille est **liée**, avec la relation

$$1 \cdot (u - v) + 1 \cdot (v - w) + 1 \cdot (w - u) = 0_E.$$

Pour $a = -1$, la famille de l'énoncé est exactement $(u - v,\ v - w,\ w - u)$, celle de la question 2, et l'on retrouve sa relation.
Conclusion. La famille $(u + av,\ v + aw,\ w + au)$ est libre si et seulement si $a \neq -1$. □
Deux cas particuliers se lisent sur ce résultat : pour $a = 0$, on retrouve la famille (u, v, w) elle-même ; pour $a = 1$, la famille $(u + v,\ v + w,\ w + u)$ est libre.
Attention. On ne divise la troisième ligne par $1 + a^3$ qu'après avoir supposé $a \neq -1$. Une division non justifiée ferait conclure « libre pour tout a » et manquerait précisément le seul cas intéressant.

4. Sans la liberté, la conclusion tombe

Dans $\mathbb{R}^2$, prenons $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ et $w = (1, 1)$. Cette famille n'est pas libre, puisque $u + v - w = 0_{\mathbb{R}^2}$. La famille de la question 1 est alors

$$u = (1, 0), \qquad u + v = (1, 1), \qquad u + v + w = (2, 2),$$

et elle est liée, puisque $u + v + w = 2(u + v)$, ce qui fournit la relation $0 \cdot u + 2 \cdot (u + v) + (-1) \cdot (u + v + w) = 0_{\mathbb{R}^2}$. On la vérifie : $2(1, 1) - (2, 2) = (0, 0)$.
Où la démonstration de la question 1 échoue-t-elle ? Le calcul de regroupement reste juste, mais le passage « tous les coefficients sont nuls » est faux : la combinaison $(\alpha + \beta + \gamma)\, u + (\beta + \gamma)\, v + \gamma\, w$ peut être nulle sans que ses coefficients le soient, puisque (u, v, w) est liée. On le voit sur la relation trouvée, $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 2, -1)$: les coefficients regroupés valent $(1, 1, -1)$, qui est justement la relation $u + v - w = 0$.

Commentaire

L'exercice met en œuvre un seul geste, qui est le cœur de la manipulation des familles libres : **ramener une combinaison des nouveaux vecteurs à une combinaison des anciens**, puis invoquer la liberté des anciens pour obtenir un système. Ce système a pour matrice celle dont les colonnes sont les coordonnées des nouveaux vecteurs dans (u, v, w) ; la question de liberté se ramène ainsi à un calcul sur des nombres, quel que soit l'espace E, qui peut être $\mathbb{R}^3$, un espace de polynômes ou de fonctions.
On notera le rôle du corps des scalaires à la question 3. Sur $\mathbb{R}$, l'équation $1 + a^3 = 0$ n'a qu'une solution. Dans un espace vectoriel complexe, avec a complexe, elle en a trois : en factorisant $1 + a^3 = (1 + a)(a^2 - a + 1)$, le second facteur s'annule pour $a = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $a = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, et la famille serait liée pour ces deux valeurs aussi.

Exercice 15 ★★ Degrés échelonnés et coordonnées dans R3[X]

Notions : Familles libres et familles liées, Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète

On rappelle que $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, est un espace vectoriel de dimension 4, dont la base canonique est $(1, X, X^2, X^3)$. Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre. On raisonnera par l'absurde, en considérant le plus grand indice d'un coefficient non nul.

2. En déduire que la famille $\mathcal{B} = (1,\ X-1,\ (X-1)^2,\ (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Soit $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$, en écrivant $X = (X-1) + 1$. Contrôler le résultat.

4. On considère la famille $\mathcal{C} = (1 + X,\ X + X^2,\ X^2 + X^3,\ X^3)$.

a. Les degrés de ses polynômes sont-ils échelonnés ? La question 1 s'applique-t-elle ?

b. La famille $\mathcal{C}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

c. Le cas échéant, déterminer les coordonnées du polynôme constant 1, puis celles de P, dans $\mathcal{C}$.

Corrigé

1. Une famille de degrés échelonnés est libre

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0.$$

Montrons que tous les λ_k sont nuls. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'ils ne le soient pas tous. L'ensemble des indices k tels que $\lambda_k \neq 0$ est alors une partie non vide de $\{0, \dots, n\}$; notons m son plus grand élément. Par définition de m, on a $\lambda_m \neq 0$ et $\lambda_k = 0$ pour tout $k > m$, de sorte que la relation se réduit à

$$\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{m-1} P_{m-1} + \lambda_m P_m = 0.$$

Le coefficient de X^m. Comme $\deg P_m = m$, le polynôme P_m s'écrit $c_m X^m + (\text{termes de degré} < m)$ avec $c_m \neq 0$, son coefficient dominant. Pour $k < m$, le polynôme P_k est de degré $k < m$, donc son coefficient de X^m est nul. Le coefficient de X^m dans le membre de gauche vaut donc

$$\lambda_0 \times 0 + \cdots + \lambda_{m-1} \times 0 + \lambda_m c_m = \lambda_m c_m,$$

qui est non nul comme produit de deux réels non nuls.
La contradiction. Le membre de gauche est le polynôme nul, dont tous les coefficients sont nuls, en particulier celui de X^m. On a donc $\lambda_m c_m = 0$, ce qui contredit $\lambda_m c_m \neq 0$.
L'hypothèse était absurde : tous les λ_k sont nuls, et la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre. □
L'idée se résume ainsi : **le terme de plus haut degré ne peut être compensé par personne**, puisque les autres polynômes de la combinaison sont de degré plus petit. La même démonstration s'applique mot pour mot dès que les degrés sont deux à deux distincts, sans qu'ils valent nécessairement $0, 1, \dots, n$.

2. La base $\mathcal{B}$

Pour $k \in \{0,1,2,3\}$, le polynôme $(X-1)^k$ est de degré exactement k : son terme de plus haut degré est X^k, de coefficient 1. Les quatre polynômes appartiennent à $\mathbb{R}_3[X]$ puisque leur degré est au plus 3. D'après la question 1, appliquée avec $n=3$, la famille $\mathcal{B}$ est libre.
C'est une famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}_3[X]$, qui est de dimension 4. Or, dans un espace de dimension n, toute famille libre de n vecteurs est une base. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. □
On n'a eu à vérifier ni que $\mathcal{B}$ est génératrice, ni la moindre égalité entre polynômes : la dimension fait le travail, une fois la liberté acquise.

3. Les coordonnées de P dans $\mathcal{B}$

Posons $Y = X-1$, de sorte que $X = Y+1$. On remplace X par $Y+1$ dans chaque terme de P et l'on développe :

$$\begin{aligned} X^3 &= (Y+1)^3 = Y^3+3Y^2+3Y+1 \\ 2X^2 &= 2(Y+1)^2 = 2Y^2+4Y+2 \\ -X &= -(Y+1) = -Y-1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre et en regroupant selon les puissances de Y,

$$P = Y^3 + (3+2)\,Y^2 + (3+4-1)\,Y + (1+2-1+1) = Y^3+5Y^2+6Y+3.$$

En revenant à $Y = X-1$:

$$P = 3\cdot 1 + 6\,(X-1) + 5\,(X-1)^2 + 1\cdot(X-1)^3.$$

Les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $(3,6,5,1)$. Elles sont uniques, puisque $\mathcal{B}$ est une base.
Contrôle par développement. On redéveloppe le membre de droite dans la base canonique :

$$\begin{aligned} 6(X-1) &= 6X-6 \\ 5(X-1)^2 &= 5X^2-10X+5 \\ (X-1)^3 &= X^3-3X^2+3X-1 \end{aligned}$$

d'où $3+6(X-1)+5(X-1)^2+(X-1)^3 = X^3+(5-3)X^2+(6-10+3)X+(3-6+5-1) = X^3+2X^2-X+1$, qui est bien P.
Deux contrôles rapides. En remplaçant X par 1, tous les termes $(X-1)^k$ avec $k \geqslant 1$ s'annulent, et il reste la première coordonnée : on doit avoir $P(1)=3$, et en effet $P(1)=1+2-1+1=3$. En remplaçant X par 2, chaque $(X-1)^k$ vaut 1, et l'on doit trouver la somme des coordonnées : $P(2)=8+8-2+1=15$ et $3+6+5+1=15$.
Attention. Les deux évaluations sont des contrôles, pas des démonstrations : deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ peuvent prendre la même valeur en 1 et en 2 sans être égaux. C'est le développement complet qui prouve l'égalité.

4. Une base dont les degrés ne sont pas échelonnés

a. Les degrés des quatre polynômes de $\mathcal{C}$ sont $1,2,3,3$. Ils ne sont pas échelonnés : deux polynômes ont le même degré, et aucun n'est de degré 0. La question 1 ne s'applique donc pas. Mais elle donne une condition **suffisante** de liberté, pas une condition nécessaire : qu'elle ne s'applique pas ne dit rien sur la liberté de $\mathcal{C}$. Il faut faire le calcul.
b. Soient a,b,c,d des réels tels que

$$a(1+X)+b(X+X^2)+c(X^2+X^3)+dX^3 = 0.$$

En regroupant selon les puissances de X, le membre de gauche est le polynôme

$$a + (a+b)\,X + (b+c)\,X^2 + (c+d)\,X^3.$$

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, d'où le système

$$\begin{cases} a = 0 \\ a+b = 0 \\ b+c = 0 \\ c+d = 0 \end{cases}$$

déjà échelonné, que l'on résout de haut en bas : $a = 0$, puis $b = 0$, puis $c = 0$, puis $d = 0$. La famille $\mathcal{C}$ est libre. Comme elle compte 4 vecteurs et que $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, c'est une **base** de $\mathbb{R}_3[X]$. □

L'échelonnement est bien là, mais par le bas : les termes de **plus bas** degré de $1+X$, $X+X^2$, X^2+X^3, X^3 sont de degrés $0, 1, 2, 3$. La démonstration de la question 1, menée avec le plus petit indice d'un coefficient non nul et le terme de plus bas degré, prouverait la liberté de la même façon.

c. *Coordonnées de* 1. On cherche a, b, c, d tels que $a + (a+b)X + (b+c)X^2 + (c+d)X^3 = 1$. Par identification des coefficients :

$$a = 1, \qquad a+b = 0, \qquad b+c = 0, \qquad c+d = 0,$$

donc $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1$. Ainsi

$$1 = (1+X) - (X+X^2) + (X^2+X^3) - X^3,$$

ce que l'on vérifie : les termes en X, en X^2 et en X^3 se simplifient deux à deux et il reste 1. Les coordonnées de 1 dans $\mathcal{C}$ sont $(1, -1, 1, -1)$.

Coordonnées de P. On écrit $P = 1 - X + 2X^2 + X^3$ et l'on identifie :

$$a = 1, \qquad a+b = -1, \qquad b+c = 2, \qquad c+d = 1,$$

donc $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$, $d = -3$. Vérification :

$$\begin{aligned}(1+X) - 2(X+X^2) + 4(X^2+X^3) - 3X^3 &= 1 + (1-2)X + (-2+4)X^2 + (4-3)X^3 \\ &= 1 - X + 2X^2 + X^3.\end{aligned}$$

Les coordonnées de P dans $\mathcal{C}$ sont $(1, -2, 4, -3)$.

Commentaire

Le même polynôme P a reçu trois jeux de coordonnées : $(1, -1, 2, 1)$ dans la base canonique, $(3, 6, 5, 1)$ dans $\mathcal{B}$, $(1, -2, 4, -3)$ dans $\mathcal{C}$. Un vecteur n'est pas la liste de ses coordonnées : la liste dépend de la base, le vecteur non. C'est l'une des confusions que ce chapitre cherche à défaire. Les deux bases ne se manipulent pas de la même façon. Dans $\mathcal{B}$, les coordonnées s'obtiennent par un changement de variable, $X = (X-1) + 1$, qui revient à « centrer » le polynôme en 1 ; la base $\mathcal{B}$ est faite pour décrire un polynôme au voisinage de 1, et sa première coordonnée est la valeur en 1. Dans $\mathcal{C}$, elles s'obtiennent par un système échelonné. Dans les deux cas, la liberté a été établie par un argument de **degré** ou de **coefficient extrême**, et la dimension a dispensé de prouver que la famille est génératrice.

Exercice 16 ★★★ Cinq démonstrations fausses à corriger

Notions : Rédaction : prouver qu'un ensemble est un sous-espace, qu'une famille est libre, erreurs classiques, Familles libres et familles liées, Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré, Théorème du rang et ses conséquences

Les cinq textes ci-dessous sont des démonstrations rédigées, telles qu'on les lit sur une copie. Chacune est fausse ou incomplète. Pour chacune, répondre aux quatre questions suivantes.

— La conclusion annoncée est-elle vraie ?
— Quelle ligne exactement est fautive ?
— De quel type d'erreur s'agit-il ?
— Écrire la rédaction correcte si la conclusion est vraie, ou donner un contre-exemple si elle est fausse.

(a) Affirmation : dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u, v, w) formée de $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 2)$ est libre.

1. Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires : un multiple de u a sa deuxième coordonnée nulle, ce qui n'est pas le cas de v, et un multiple de v a sa première coordonnée nulle, ce qui n'est pas le cas de u.
2. De la même façon, u et w ne sont pas colinéaires, et v et w ne sont pas colinéaires.
3. Les trois vecteurs u, v, w sont donc deux à deux non colinéaires.
4. Une famille de vecteurs deux à deux non colinéaires est libre, donc (u, v, w) est libre.

(b) Affirmation : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

1. Comme F est un sous-espace vectoriel, $0_E \in F$, donc $0_E \in F \cup G$.
2. Soient $x, y \in F \cup G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $x + \lambda y \in F \cup G$.
3. Premier cas : x et y appartiennent à F. Comme F est un sous-espace vectoriel, $x + \lambda y \in F$, donc $x + \lambda y \in F \cup G$.
4. Second cas : x et y appartiennent à G. De même, $x + \lambda y \in G$, donc $x + \lambda y \in F \cup G$.
5. Dans tous les cas, $x + \lambda y \in F \cup G$: la partie $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Affirmation : la famille (u, v, w) formée de $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (u, v, w) est formée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
2. L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.
3. Une famille de trois vecteurs d'un espace de dimension 3 engendre cet espace.
4. Donc (u, v, w) engendre $\mathbb{R}^3$.

(d) Affirmation : l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x,\ y,\ x + y)$ est surjective.

1. L'application f est linéaire, car chacune de ses coordonnées est une combinaison linéaire de x et de y.
2. Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker} f$. Alors $(x,\ y,\ x + y) = (0, 0, 0)$, donc $x = 0$ et $y = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, et f est injective.
3. D'après le théorème du rang, une application linéaire injective est surjective.
4. Donc f est surjective.

(e) Affirmation : dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u, v) formée de $u = (1, 2, 0)$ et $v = (0, 1, 3)$ est libre.

1. La famille (u, v) est libre lorsque la combinaison $au + bv$ ne peut être nulle que si $a = b = 0$.
2. Prenons $a = 0$ et $b = 0$.
3. Alors $au + bv = 0 \cdot (1, 2, 0) + 0 \cdot (0, 1, 3) = (0, 0, 0)$.
4. Les coefficients nuls donnent bien la combinaison nulle, donc la famille (u, v) est libre.

Corrigé

(a) Deux à deux non colinéaires ne veut pas dire libre

La conclusion est fausse : la famille (u, v, w) est liée.
La ligne fautive est la ligne 4. Les lignes 1 à 3 sont correctes. La ligne 1 est même bien rédigée, puisqu'elle vérifie que ni u n'est multiple de v, ni v multiple de u. Pour la ligne 2, on vérifie de même : si $w = ku$, la première coordonnée impose $k = 1$ et la deuxième $1 = 0$, contradiction ; si $w = kv$, la deuxième coordonnée impose $k = 1$ et la première $1 = 0$; et comme u, v, w sont non nuls, l'impossibilité dans un sens suffit. La ligne 4, elle, invoque un énoncé qui n'existe pas.
Type d'erreur : un critère valable pour deux vecteurs, étendu à trois. Pour une famille de **deux** vecteurs, être libre équivaut bien à ne pas être colinéaires. Dès trois vecteurs, ce n'est plus vrai : la liberté interdit qu'**un** vecteur soit combinaison linéaire des **autres**, pas seulement qu'il soit multiple d'**un** autre. Trois vecteurs deux à deux non colinéaires peuvent très bien être dans un même plan.
Le contre-exemple est la famille elle-même. On remarque que

$$u + v = (1, 0, 1) + (0, 1, 1) = (1, 1, 2) = w,$$

d'où la relation de dépendance

$$1 \cdot u + 1 \cdot v + (-1) \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3},$$

dont les coefficients $(1, 1, -1)$ ne sont pas tous nuls. On la vérifie coordonnée par coordonnée : $1 + 0 - 1 = 0$, $0 + 1 - 1 = 0$, $1 + 1 - 2 = 0$. Géométriquement, les trois vecteurs sont dans un même plan, celui d'équation $x + y - z = 0$: pour u, $1 + 0 - 1 = 0$; pour v, $0 + 1 - 1 = 0$; pour w, $1 + 1 - 2 = 0$.
Ce qu'il fallait faire. Tester la liberté par un système, comme dans l'exercice 12 : une combinaison $au + bv + cw = 0_{\mathbb{R}^3}$ donne $a + c = 0$, $b + c = 0$ et $a + b + 2c = 0$; l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$ donne $0 = 0$, l'inconnue c reste libre, et $c = -1$ redonne la relation $(1, 1, -1)$.

(b) La réunion de deux sous-espaces

La conclusion est fausse en général.
La ligne fautive est la ligne 5. Les lignes 1 à 4 sont correctes : 0_E est bien dans $F \cup G$, et les deux cas traités sont traités sans faute. C'est le « dans tous les cas » de la ligne 5 qui est faux, parce que les lignes 3 et 4 n'épuisent pas les cas.
Type d'erreur : disjonction de cas incomplète. Dire que $x \in F \cup G$, c'est dire que $x \in F$ **ou** $x \in G$. Avec deux vecteurs x et y, il y a donc quatre situations : x et y dans F ; x et y dans G ; $x \in F$ et $y \in G$; $x \in G$ et $y \in F$. La copie a oublié les deux cas mixtes, qui sont précisément ceux où la stabilité échoue : rien ne dit que la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G soit dans l'un des deux.
Le contre-exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, prenons $F = \mathrm{Vect}((1, 0))$, l'axe des abscisses, et $G = \mathrm{Vect}((0, 1))$, l'axe des ordonnées. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Posons $x = (1, 0) \in$

F, $y = (0,1) \in G$ et $\lambda = 1$. Alors

$$x + \lambda y = (1,1).$$

Ce vecteur n'est pas dans F, dont les vecteurs ont une deuxième coordonnée nulle, ni dans G, dont les vecteurs ont une première coordonnée nulle. Donc $(1,1) \notin F \cup G$, alors que x et y sont dans $F \cup G$: la réunion des deux axes n'est pas stable par addition, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

L'énoncé correct. La réunion $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Le sens indirect est immédiat : si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$, qui est un sous-espace ; de même si $G \subset F$.

Le sens direct se démontre par l'absurde. Supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace, et que l'on n'ait ni $F \subset G$ ni $G \subset F$. Il existe alors $x \in F$ tel que $x \notin G$, et $y \in G$ tel que $y \notin F$. Comme x et y sont dans $F \cup G$, qui est supposé être un sous-espace, $x + y \in F \cup G$. Si $x + y \in F$, alors $y = (x + y) - x$ est dans F, comme différence de deux vecteurs de F, ce qui contredit $y \notin F$. Si $x + y \in G$, alors $x = (x + y) - y$ est dans G, ce qui contredit $x \notin G$. Les deux possibilités sont exclues : contradiction. □

On notera que la démonstration correcte utilise justement un cas mixte, $x \in F$ et $y \in G$, celui que la copie avait oublié.

(c) Trois vecteurs dans un espace de dimension 3

La conclusion est vraie, la démonstration est fausse.

La ligne fautive est la ligne 3. Les lignes 1 et 2 sont exactes, mais la ligne 3 énonce un théorème amputé de son hypothèse principale.

Type d'erreur : théorème cité sans l'une de ses hypothèses. L'énoncé du cours est : dans un espace de dimension n, pour une famille de **exactement** n vecteurs, être libre, être génératrice et être une base sont trois propriétés équivalentes. Le nombre de vecteurs ne suffit pas : il faut **en plus** établir l'une des deux propriétés, liberté ou caractère générateur, pour obtenir l'autre. Prise telle quelle, la ligne 3 est fausse : la famille $((1,0,0),(2,0,0),(0,0,1))$ compte trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et tous ses vecteurs ont une deuxième coordonnée nulle, de même que toutes leurs combinaisons linéaires ; le vecteur $(0,1,0)$ n'est donc pas atteint, et la famille n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

La rédaction correcte, par le calcul direct. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons des réels a, b, c tels que $au + bv + cw = (x,y,z)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a + b = x \\ a + c = y \\ b + c = z \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $-b + c = y - x$, puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne $2c = -x + y + z$. Le système échelonné a trois pivots, et en remontant,

$$c = \frac{-x+y+z}{2}, \qquad b = c - (y - x) = \frac{x-y+z}{2}, \qquad a = x - b = \frac{x+y-z}{2}.$$

Vérification. $a+b = \frac{(x+y-z)+(x-y+z)}{2} = x$, $a+c = \frac{(x+y-z)+(-x+y+z)}{2} = y$, $b+c = \frac{(x-y+z)+(-x+y+z)}{2} = z$.

Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est donc combinaison linéaire de u, v, w : la famille (u,v,w) engendre $\mathbb{R}^3$. □ Par exemple, pour $(1,2,3)$, les formules donnent $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, et en effet $v + 2w = (1,0,1) + (0,2,2) = (1,2,3)$.

Autre rédaction correcte. On montre que (u,v,w) est libre (c'est le même système avec $x = y = z = 0$, qui n'a que la solution nulle puisqu'il a trois pivots), puis l'on écrit : « (u,v,w) est une famille libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et en particulier elle engendre $\mathbb{R}^3$ ». C'est la ligne 3 de la copie, avec l'hypothèse qui lui manquait.

(d) Injective donc surjective, entre deux espaces de dimensions différentes

La conclusion est fausse.
La ligne fautive est la ligne 3. Les lignes 1 et 2 sont correctes : f est linéaire, son noyau est réduit à $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, et une application linéaire de noyau nul est injective.
Type d'erreur : corollaire appliqué hors de ses hypothèses. La conséquence du théorème du rang que la copie a en tête est : si E et F sont de **même dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective. Ici, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$: l'hypothèse d'égalité des dimensions est fausse, et le corollaire ne s'applique pas.
Ce que dit vraiment le théorème du rang. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$,

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rg} f, \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{rg} f = 2 - 0 = 2.$$

L'image de f est de dimension 2, alors que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$: $\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^3$, et f n'est pas surjective. Plus généralement, aucune application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ n'est surjective, puisque son rang vaut au plus 2.
Le contre-exemple explicite. Le vecteur $(0,0,1)$ n'a pas d'antécédent. En effet, $f(x,y) = (0,0,1)$ impose $x = 0$ et $y = 0$ par les deux premières coordonnées, puis $x + y = 1$ par la troisième, soit $0 = 1$. On peut même décrire l'image : un vecteur (p,q,r) est atteint si et seulement si $r = p + q$ (on prend alors $(x,y) = (p,q)$), et $\mathrm{Im} f$ est le plan d'équation $r = p + q$ de $\mathbb{R}^3$, qui ne contient pas $(0,0,1)$ puisque $1 \neq 0 + 0$.

(e) La combinaison nulle « trouvée »

La conclusion est vraie, la démonstration ne prouve rien.
La ligne fautive est la ligne 4. La ligne 1 donne une définition correcte de la liberté, et les lignes 2 et 3 sont des calculs justes. Mais la ligne 4 en tire une conclusion qui ne découle pas de ce qui précède.
Type d'erreur : implication démontrée dans le mauvais sens. La définition, rappelée à la ligne 1, est l'implication

$$au + bv = 0_{\mathbb{R}^3} \implies a = b = 0.$$

Les lignes 2 et 3 démontrent l'implication réciproque, $a = b = 0 \Rightarrow au + bv = 0_{\mathbb{R}^3}$, qui est vraie pour **toute** famille de vecteurs : multiplier des vecteurs par 0 donne toujours le vecteur nul. Un argument qui s'applique à toutes les familles ne peut pas distinguer les libres des liées. Le même texte, mot pour mot, « démontrerait » que la famille $(u, 2u)$ est libre, alors qu'elle vérifie $2 \cdot u + (-1) \cdot (2u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ avec des coefficients non nuls.
La rédaction correcte. Soient a, b des réels tels que $au + bv = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $a = b = 0$. On a

$$au + bv = a(1,2,0) + b(0,1,3) = (a,\ 2a + b,\ 3b),$$

donc l'égalité $au + bv = (0,0,0)$ donne, en lisant la première puis la troisième coordonnée, $a = 0$ et $3b = 0$, c'est-à-dire $b = 0$. Ainsi $a = b = 0$, et la famille (u,v) est libre. □
La rédaction correcte **commence** par des coefficients quelconques soumis à l'hypothèse $au + bv = 0$, et **termine** par $a = b = 0$. La copie faisait l'inverse : elle commençait par $a = b = 0$.

Commentaire

Les cinq copies se diagnostiquent avec le même geste : lire chaque ligne comme une affirmation autonome et se demander d'où elle vient. Deux familles d'erreurs se dégagent. En (a), (c) et (d), une ligne cite un énoncé qui n'existe pas tel quel : un critère pour deux vecteurs étendu à trois, un théorème privé de l'hypothèse de liberté, un corollaire privé de l'hypothèse d'égalité des dimensions. Le remède est de citer les théorèmes **avec leurs hypothèses**, et de vérifier chacune.

En (b) et (e), c'est la logique qui cède : une disjonction de cas incomplète, une implication démontrée à l'envers.
Deux de ces copies arrivent à une conclusion vraie, (c) et (e), et ce sont les plus dangereuses, parce que rien ne signale l'erreur. Un résultat exact obtenu par un raisonnement faux ne rapporte rien, et le cas (e) le montre de la manière la plus nette : son argument « prouverait » aussi bien la liberté d'une famille manifestement liée. Le contrôle le plus sûr d'une démonstration consiste à se demander si elle s'appliquerait aussi à un cas où la conclusion est fausse : si oui, elle est fausse.

Exercice 17 ★ Base et dimension d'un sous-espace de R4

Notions : Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète

On considère

$$F = \{\, (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0 \ \text{ et } \ y - z + t = 0 \,\},$$

et l'on note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en déterminer une base (f_1, f_2) et donner sa dimension.

2. Vérifier que $w = (-3, -1, 1, 2)$ appartient à F, et donner ses coordonnées dans la base (f_1, f_2).

3. a. Le vecteur $u = (-1, 0, 1, 1)$ peut-il servir à compléter (f_1, f_2) en une famille libre de trois vecteurs ?

b. Compléter (f_1, f_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide de vecteurs de la base canonique, en vérifiant la liberté de la famille obtenue.

4. Déterminer les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3, 4)$ dans la base de $\mathbb{R}^4$ obtenue.

Corrigé

1. Une base de F

On résout le système qui définit F, d'inconnues x, y, z, t :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases}$$

Il est déjà échelonné : la première ligne a pour pivot x, la seconde y. Les inconnues z et t, qui ne portent pas de pivot, sont libres et servent de paramètres. On remonte : la seconde ligne donne $y = z - t$, puis la première donne

$$x = 2y - z = 2(z - t) - z = z - 2t.$$

Ainsi, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in F &\iff x = z - 2t \ \text{ et } \ y = z - t \\ &\iff (x,y,z,t) = (z - 2t,\ z - t,\ z,\ t) \\ &\iff (x,y,z,t) = z\,(1,1,1,0) + t\,(-2,-1,0,1). \end{aligned}$$

Posons $f_1 = (1,1,1,0)$ et $f_2 = (-2,-1,0,1)$. On a obtenu $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.
Vérification. Pour f_1 : $1 - 2 + 1 = 0$ et $1 - 1 + 0 = 0$. Pour f_2 : $-2 + 2 + 0 = 0$ et $-1 - 0 + 1 = 0$. Les deux vecteurs vérifient les deux équations.
F est un sous-espace vectoriel. C'est le sous-espace engendré par la famille (f_1, f_2), et un sous-espace engendré est toujours un sous-espace vectoriel.
La famille (f_1, f_2) est libre. Soient a, b des réels tels que $af_1 + bf_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Montrons que $a = b = 0$. On a

$$af_1 + bf_2 = (a - 2b,\ a - b,\ a,\ b),$$

et l'égalité à $(0,0,0,0)$ donne, en lisant les deux dernières coordonnées, $a = 0$ et $b = 0$.
Conclusion. La famille (f_1, f_2) est libre et engendre F : c'est une **base** de F, et

$$\dim F = 2. \qquad \square$$

Les deux dernières coordonnées de f_1 et f_2 sont $(1,0)$ et $(0,1)$, par construction : on a donné aux paramètres z et t les valeurs $(1,0)$ puis $(0,1)$. C'est pour cette raison que la liberté se lit sans calcul, et cela vaut pour toute famille obtenue par cette méthode.

2. Les coordonnées de w

Les deux équations de F donnent, pour $w = (-3,-1,1,2)$: $-3-2\times(-1)+1 = 0$ et $-1-1+2 = 0$. Donc $w \in F$.
D'après le calcul de la question 1, les coefficients d'un vecteur de F sur f_1 et f_2 sont ses deux dernières coordonnées : ici $z = 1$ et $t = 2$. Donc

$$w = f_1 + 2f_2,$$

ce que l'on contrôle : $(1,1,1,0) + 2(-2,-1,0,1) = (1-4,\ 1-2,\ 1,\ 2) = (-3,-1,1,2)$. Les coordonnées de w dans la base (f_1, f_2) sont $(1,2)$.

3. Compléter la base de F

a. Non. Le vecteur $u = (-1,0,1,1)$ appartient à F : $-1-0+1 = 0$ et $0-1+1 = 0$. Ses deux dernières coordonnées donnent $u = f_1 + f_2$, et en effet $(1,1,1,0) + (-2,-1,0,1) = (-1,0,1,1)$. La famille (f_1, f_2, u) vérifie donc

$$1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + (-1) \cdot u = 0_{\mathbb{R}^4},$$

relation de coefficients non tous nuls : elle est liée. Plus généralement, **aucun vecteur de** F ne peut compléter (f_1, f_2) en une famille libre, puisque tout vecteur de F est combinaison linéaire de f_1 et f_2. Pour compléter, il faut sortir de F.
b. *Le théorème de la base incomplète.* Dans un espace de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base à l'aide de vecteurs pris dans une famille génératrice donnée, par exemple la base canonique. Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ et que (f_1, f_2) compte 2 vecteurs, il faudra en ajouter exactement 2. La méthode consiste à ajouter un à un des vecteurs de la base canonique qui ne sont pas dans l'espace engendré par la famille déjà construite.
Premier ajout : e_1. On a $e_1 = (1,0,0,0)$, et la première équation de F donne $1-0+0 = 1 \neq 0$: $e_1 \notin F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Cela suffit pour que (f_1, f_2, e_1) soit libre. En effet, soient a, b, c des réels tels que $af_1 + bf_2 + ce_1 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Si l'on avait $c \neq 0$, on en tirerait $e_1 = -\frac{a}{c}f_1 - \frac{b}{c}f_2 \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, ce qui est exclu ; donc $c = 0$, puis $af_1 + bf_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$, et la liberté de (f_1, f_2) donne $a = b = 0$.
Second ajout : e_2*, et vérification de la liberté.* Montrons que la famille (f_1, f_2, e_1, e_2) est libre. Soient a, b, c, d des réels tels que

$$af_1 + bf_2 + ce_1 + de_2 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Le membre de gauche vaut

$$\begin{aligned} &a(1,1,1,0) + b(-2,-1,0,1) + c(1,0,0,0) + d(0,1,0,0) \\ &\quad = (a - 2b + c,\ a - b + d,\ a,\ b), \end{aligned}$$

d'où le système

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ a - b + d = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes donnent $a = 0$ et $b = 0$; en reportant, la première donne $c = 0$ et la deuxième $d = 0$. La famille est libre.
Conclusion. La famille (f_1, f_2, e_1, e_2) est une famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, qui est de dimension 4 : c'est une **base** de $\mathbb{R}^4$, qui complète la base (f_1, f_2) de F. □
Attention. La liberté de la famille complétée se **vérifie**, elle ne se suppose pas. Le théorème de la base incomplète garantit qu'**il existe** des vecteurs de la base canonique qui conviennent, il ne dit pas lesquels. Ajouter un vecteur au hasard peut échouer, comme le vecteur u de la question a, qui est pourtant un vecteur tout à fait anodin.

4. Coordonnées dans la base complétée

On cherche a, b, c, d tels que $af_1 + bf_2 + ce_1 + de_2 = (1, 2, 3, 4)$. Le calcul de la question 3 donne le système

$$\begin{cases} a - 2b + c = 1 \\ a - b + d = 2 \\ a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

d'où $a = 3$, $b = 4$, puis $c = 1 - a + 2b = 1 - 3 + 8 = 6$ et $d = 2 - a + b = 2 - 3 + 4 = 3$. Ainsi

$$(1, 2, 3, 4) = 3f_1 + 4f_2 + 6e_1 + 3e_2.$$

Vérification. $3(1,1,1,0) + 4(-2,-1,0,1) + (6,0,0,0) + (0,3,0,0) = (3-8+6,\ 3-4+3,\ 3,\ 4) = (1,2,3,4)$.
Les coordonnées de $(1, 2, 3, 4)$ dans la base (f_1, f_2, e_1, e_2) sont $(3, 4, 6, 3)$.

Commentaire

La dimension de F se lit sur le système échelonné : quatre inconnues, deux pivots, donc deux inconnues libres et deux vecteurs de base. Chaque équation « indépendante » a fait perdre une dimension à l'espace $\mathbb{R}^4$; le théorème du rang donnera à cette phrase un sens précis.
Le choix de e_1 et e_2 pour compléter n'avait rien d'obligatoire. On peut vérifier, par le même calcul, que n'importe quelle paire de vecteurs de la base canonique aurait convenu ici : c'est une particularité de ce sous-espace F, pas une règle. Ce qui est une règle, c'est le nombre de vecteurs à ajouter, $\dim \mathbb{R}^4 - \dim F = 2$, et l'obligation de vérifier la liberté de la famille obtenue.

Exercice 18 ★★ Matrices symétriques, antisymétriques, triangulaires

Notions : Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète, Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, sous-espace engendré

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les trois ensembles suivants :

- S_3, l'ensemble des matrices **symétriques**, c'est-à-dire telles que $M^\top = M$;
- A_3, l'ensemble des matrices **antisymétriques**, c'est-à-dire telles que $M^\top = -M$;
- T_3^+, l'ensemble des matrices **triangulaires supérieures**, c'est-à-dire dont tous les coefficients situés sous la diagonale sont nuls.

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1. On rappelle que la famille des neuf matrices E_{ij} est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension 9.

1. Montrer que S_3, A_3 et T_3^+ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Écrire la forme générale d'une matrice de S_3. En déduire une base de S_3 et sa dimension.

3. Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. En déduire une base de A_3 et sa dimension.

4. Donner une base de T_3^+ et sa dimension.

5. Montrer que $S_3 \cap A_3 = \{0_3\}$.

6. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $M_s = \dfrac{1}{2}(M + M^\top)$ et $M_a = \dfrac{1}{2}(M - M^\top)$, puis vérifier que $M_s \in S_3$, que $M_a \in A_3$ et que $M_s + M_a = M$.

7. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ s'écrit **d'une seule manière** comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Comparer $\dim S_3 + \dim A_3$ et $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

8. Déterminer $S_3 \cap T_3^+$ et sa dimension.

Corrigé

1. Trois sous-espaces vectoriels

On utilise la caractérisation du cours : une partie F de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel si elle contient la matrice nulle et si, pour tous $M, N \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $\lambda M + N$ appartient encore à F. On se sert aussi de la règle de calcul $(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top$, vue avec la transposée.
L'ensemble S_3. La matrice nulle vérifie $0_3^\top = 0_3$, donc $0_3 \in S_3$. Soient $M, N \in S_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top = \lambda M + N,$$

la seconde égalité venant de $M^\top = M$ et $N^\top = N$. Donc $\lambda M + N \in S_3$, et S_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
L'ensemble A_3. On a $0_3^\top = 0_3 = -0_3$, donc $0_3 \in A_3$. Soient $M, N \in A_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top = \lambda(-M) + (-N) = -(\lambda M + N),$$

donc $\lambda M + N \in A_3$: A_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
L'ensemble T_3^+. Ici la condition porte sur les coefficients : notons m_{ij} le coefficient de M en ligne i et colonne j. La matrice nulle a tous ses coefficients nuls, en particulier ceux sous la diagonale, donc $0_3 \in T_3^+$. Soient $M, N \in T_3^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $i > j$, le coefficient de $\lambda M + N$ en position (i, j) vaut $\lambda m_{ij} + n_{ij} = \lambda \times 0 + 0 = 0$. Donc $\lambda M + N \in T_3^+$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. □

2. Base et dimension de S_3

Forme générale. Écrivons $M = (m_{ij})$. L'égalité $M^\top = M$ signifie $m_{ji} = m_{ij}$ pour tous i, j : les coefficients symétriques par rapport à la diagonale sont égaux, et la diagonale est libre. Une matrice symétrique est donc entièrement déterminée par ses trois coefficients diagonaux et ses trois coefficients au-dessus de la diagonale. En les nommant a, b, c (diagonale) et d, e, f (au-dessus), on obtient : $M \in S_3$ si et seulement s'il existe des réels a, b, c, d, e, f tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

Famille génératrice. Posons $U_{12} = E_{12} + E_{21}$, $U_{13} = E_{13} + E_{31}$ et $U_{23} = E_{23} + E_{32}$. La matrice ci-dessus s'écrit

$$M = aE_{11} + bE_{22} + cE_{33} + d\,U_{12} + e\,U_{13} + f\,U_{23}.$$

Les six matrices $E_{11}, E_{22}, E_{33}, U_{12}, U_{13}, U_{23}$ sont elles-mêmes symétriques (on le lit sur la forme générale, avec un seul des six paramètres égal à 1 et les autres nuls). Donc

$$S_3 = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{33}, U_{12}, U_{13}, U_{23}).$$

Liberté. Soient a, b, c, d, e, f des réels tels que $aE_{11} + bE_{22} + cE_{33} + d\,U_{12} + e\,U_{13} + f\,U_{23} = 0_3$. Le membre de gauche est la matrice de la forme générale ci-dessus ; elle est nulle, donc chacun de ses coefficients est nul, et en lisant les positions $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, on obtient $a = b = c = d = e = f = 0$. La famille est libre.
Conclusion. La famille $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, U_{12}, U_{13}, U_{23})$ est une base de S_3, et

$$\dim S_3 = 6.$$

Attention. Une famille génératrice de S_3 doit être formée d'éléments **de** S_3. La famille $(E_{11}, E_{12}, ...)$ des matrices élémentaires ne convient pas : E_{12} n'est pas symétrique. C'est pour cela qu'on regroupe E_{12} et E_{21} en un seul vecteur U_{12}, qui, lui, l'est.

3. Base et dimension de A_3

La diagonale est nulle. Soit $M \in A_3$. L'égalité $M^\top = -M$ s'écrit coefficient par coefficient $m_{ji} = -m_{ij}$ pour tous i, j. Pour $j = i$, elle donne $m_{ii} = -m_{ii}$, donc $2m_{ii} = 0$, donc $m_{ii} = 0$.
Forme générale. Les coefficients au-dessus de la diagonale sont libres, ceux du dessous sont leurs opposés. En nommant $a = m_{12}$, $b = m_{13}$ et $c = m_{23}$: $M \in A_3$ si et seulement s'il existe des réels a, b, c tels que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, une telle matrice est bien antisymétrique : sa transposée est la matrice où a, b, c et leurs opposés ont échangé leurs places, c'est-à-dire $-M$.
Base. Posons $V_{12} = E_{12} - E_{21}$, $V_{13} = E_{13} - E_{31}$ et $V_{23} = E_{23} - E_{32}$, qui sont antisymétriques (cas $a = 1$, $b = c = 0$, et de même pour les autres). La forme générale s'écrit $M = aV_{12} + bV_{13} + cV_{23}$,

donc $A_3 = \mathrm{Vect}(V_{12}, V_{13}, V_{23})$. Si $aV_{12}+bV_{13}+cV_{23} = 0_3$, la lecture des coefficients en positions $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,3)$ donne $a = b = c = 0$: la famille est libre. C'est donc une base de A_3, et

$$\dim A_3 = 3.$$

4. Base et dimension de T_3^+

Une matrice M appartient à T_3^+ si et seulement si $m_{21} = m_{31} = m_{32} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} = \sum_{i \leqslant j} m_{ij} E_{ij}.$$

Les six matrices $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}$ appartiennent à T_3^+ et l'engendrent. Elles forment une sous-famille de la base (E_{ij}) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et une sous-famille d'une famille libre est libre. C'est donc une base de T_3^+, et

$$\dim T_3^+ = 6.$$

5. L'intersection $S_3 \cap A_3$

On procède par double inclusion. L'inclusion $\{0_3\} \subset S_3 \cap A_3$ est vraie parce que S_3 et A_3 sont des sous-espaces, qui contiennent tous deux 0_3.
Réciproquement, soit $M \in S_3 \cap A_3$. Alors $M^\top = M$ et $M^\top = -M$, donc $M = -M$, donc $2M = 0_3$, donc $M = 0_3$. Ainsi $S_3 \cap A_3 \subset \{0_3\}$, et finalement

$$S_3 \cap A_3 = \{0_3\}. \qquad \square$$

6. Le calcul sur un exemple

La transposée de M s'obtient en échangeant lignes et colonnes :

$$M^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

En additionnant puis en soustrayant coefficient par coefficient :

$$M + M^\top = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M - M^\top = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où, en divisant par 2,

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_a = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifications. La matrice M_s a la forme générale de la question 2, avec $(a,b,c,d,e,f) = (1,3,2,2,2,3)$: elle est symétrique. La matrice M_a a la forme générale de la question 3, avec $(a,b,c) = (2,-4,2)$: elle est antisymétrique. Enfin

$$M_s + M_a = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+2 & 2-4 \\ 2-2 & 3+0 & 3+2 \\ 2+4 & 3-2 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M.$$

7. Existence et unicité de la décomposition

Existence. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Posons, comme à la question 6, $M_s = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ et $M_a = \frac{1}{2}(M - M^\top)$. En utilisant $(M^\top)^\top = M$:

$$M_s^\top = \frac{1}{2}(M^\top + M) = M_s, \qquad M_a^\top = \frac{1}{2}(M^\top - M) = -M_a.$$

Donc $M_s \in S_3$ et $M_a \in A_3$, et $M_s + M_a = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M^\top + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^\top = M$.
Unicité. Supposons $M = S + A = S' + A'$ avec $S, S' \in S_3$ et $A, A' \in A_3$. Alors

$$S - S' = A' - A.$$

Le membre de gauche appartient à S_3, qui est un sous-espace, et le membre de droite appartient à A_3 pour la même raison. Cette matrice commune appartient donc à $S_3 \cap A_3 = \{0_3\}$, d'après la question 5. Ainsi $S = S'$ et $A = A'$: la décomposition est unique. □
Les dimensions. On a $\dim S_3 + \dim A_3 = 6 + 3 = 9 = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ce n'est pas une coïncidence : la base $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, U_{12}, U_{13}, U_{23})$ de S_3 et la base (V_{12}, V_{13}, V_{23}) de A_3, mises bout à bout, donnent neuf matrices qui engendrent $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est l'existence), et une famille génératrice de neuf vecteurs dans un espace de dimension 9 en est une base.

8. L'intersection $S_3 \cap T_3^+$

Soit $M \in S_3 \cap T_3^+$. Pour $i > j$, on a $m_{ij} = 0$ puisque M est triangulaire supérieure, et $m_{ji} = m_{ij} = 0$ puisque M est symétrique. Tous les coefficients hors de la diagonale sont donc nuls : M est diagonale. Réciproquement, une matrice diagonale est symétrique et triangulaire supérieure. Donc $S_3 \cap T_3^+$ est l'ensemble des matrices diagonales,

$$S_3 \cap T_3^+ = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{33}),$$

et la famille (E_{11}, E_{22}, E_{33}), sous-famille de la base canonique, est libre : la dimension vaut 3.
Attention. Contrairement à S_3 et A_3, les sous-espaces S_3 et T_3^+ ont une intersection non nulle, et il ne pouvait en être autrement : leurs dimensions ont pour somme $6+6 = 12 > 9$. Juxtaposer une base de chacun donne douze matrices dans un espace de dimension 9, famille forcément liée. Dans une relation de liaison non triviale, on fait passer à droite les termes de la base de T_3^+ : le membre de gauche est un élément X de S_3, le membre de droite un élément de T_3^+, et $X \neq 0_3$, sinon les coefficients de chaque côté seraient tous nuls par liberté des deux bases, et la relation serait triviale.

Commentaire

La méthode des questions 2 à 4 est toujours la même et vaut pour tout sous-espace défini par des conditions sur les coefficients : on écrit l'élément général avec **autant de paramètres libres qu'il en reste**, on le décompose suivant ces paramètres, et la famille obtenue est génératrice par construction et libre par lecture des coefficients. La dimension est le nombre de paramètres libres.
En taille n, le même comptage donne $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (la diagonale et le dessus), $\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$ (le dessus seulement) et $\dim T_n^+ = \frac{n(n+1)}{2}$. On retrouve $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$.
La question 7 dit que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la **somme directe** de S_3 et A_3, ce qu'on note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = S_3 \oplus A_3$. Selon les facs, cette notion est vue dans ce chapitre ou en L2 ; elle est reprise aux exercices 31 et 32, et c'est dans le second que l'application $M \mapsto \frac{1}{2}(M + M^\top)$ apparaît comme une projection.

Exercice 19 ★★★ Les carrés magiques d'ordre 3

Notions : Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète, Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauss

On dit qu'une matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est un **carré magique** s'il existe un réel s, appelé **somme magique** de M, tel que les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales de M aient toutes pour somme s :

$$\begin{aligned} s &= a+b+c = d+e+f = g+h+i = a+d+g \\ &= b+e+h = c+f+i = a+e+i = c+e+g. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des carrés magiques. Le plus ancien connu est le carré de Lo Shu, de somme magique 15 :

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si ses neuf coefficients vérifient un système linéaire homogène de sept équations, que l'on écrira.

3. Résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss, en ordonnant les inconnues $b, d, f, g, h, i, a, c, e$ (on pourra garder a, c et e au second membre). En déduire que $\mathcal{C}$ est de dimension 3, et en donner une base (P, Q, R). Vérifier que chacune des trois matrices obtenues est un carré magique et que la famille est libre.

4. Montrer que le coefficient central d'un carré magique vaut le tiers de sa somme magique. En déduire que les carrés magiques de somme magique nulle forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$, dont on donnera une base et la dimension.

5. Écrire le carré de Lo Shu comme combinaison linéaire de P, Q et R. On note J la matrice dont les neuf coefficients valent 1 : montrer que (P, Q, J) est aussi une base de $\mathcal{C}$, et y donner les coordonnées de L.

Corrigé

1. Un sous-espace vectoriel

La matrice nulle. Toutes ses lignes, colonnes et diagonales ont pour somme 0 : c'est un carré magique de somme magique 0, donc $0_3 \in \mathcal{C}$.
Stabilité. Soient $M, N \in \mathcal{C}$, de sommes magiques respectives s et t, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Chacune des huit sommes (une ligne, une colonne ou une diagonale) de la matrice $\lambda M + N$ porte sur trois coefficients de la forme $\lambda m_{kl} + n_{kl}$. En regroupant, elle vaut λ fois la somme correspondante de M, plus la somme correspondante de N, c'est-à-dire $\lambda s + t$. Les huit sommes de $\lambda M + N$ sont donc toutes égales à $\lambda s + t$: la matrice $\lambda M + N$ est un carré magique, de somme magique $\lambda s + t$.
Donc $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. □

2. La mise en équations

La somme magique, si elle existe, est forcément celle de la première ligne : $s = a+b+c$. Dire que $M \in \mathcal{C}$, c'est donc dire que les sept **autres** sommes sont égales à $a+b+c$. On écrit ces sept égalités en simplifiant les termes présents des deux côtés, puis en mettant à gauche les inconnues b, d, f, g, h, i et à droite a, c, e :

— deuxième diagonale : $c+e+g = a+b+c$, soit $-b+g = a-e$;
— deuxième ligne : $d+e+f = a+b+c$, soit $-b+d+f = a+c-e$;
— troisième ligne : $g+h+i = a+b+c$, soit $-b+g+h+i = a+c$;
— première colonne : $a+d+g = a+b+c$, soit $-b+d+g = c$;
— deuxième colonne : $b+e+h = a+b+c$, soit $h = a+c-e$;
— troisième colonne : $c+f+i = a+b+c$, soit $-b+f+i = a$;
— première diagonale : $a+e+i = a+b+c$, soit $-b+i = c-e$.

Ainsi $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si ses coefficients vérifient

$$\begin{cases} -b+g = a-e & (L_1) \\ -b+d+f = a+c-e & (L_2) \\ -b+g+h+i = a+c & (L_3) \\ -b+d+g = c & (L_4) \\ h = a+c-e & (L_5) \\ -b+f+i = a & (L_6) \\ -b+i = c-e & (L_7) \end{cases}$$

C'est un système linéaire homogène de sept équations en les neuf inconnues $a, b, \dots, i$: trois d'entre elles sont seulement écrites au second membre. On a placé la deuxième diagonale en tête parce que son équation est l'une des deux plus courtes qui contiennent b, première inconnue de l'ordre imposé : elle fera un pivot commode.

3. Le pivot, écrit en entier

Étape 1 : pivot b, sur la ligne L_1. On élimine b des lignes qui le contiennent par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $L_6 \leftarrow L_6 - L_1$, $L_7 \leftarrow L_7 - L_1$; la ligne L_5 ne contient pas b et reste telle quelle. Par exemple, pour L_2 : à gauche $(-b+d+f) - (-b+g) = d+f-g$, à droite $(a+c-e) - (a-e) = c$. On obtient

$$\begin{cases} -b+g = a-e & (L_1) \\ d+f-g = c & (L_2) \\ h+i = c+e & (L_3) \\ d = -a+c+e & (L_4) \\ h = a+c-e & (L_5) \\ f-g+i = e & (L_6) \\ -g+i = -a+c & (L_7) \end{cases}$$

Étape 2 : pivot d, sur la ligne L_2. Seule L_4 contient encore d ; l'opération $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ donne à gauche $d - (d+f-g) = -f+g$ et à droite $(-a+c+e) - c = -a+e$:

$$-f+g = -a+e \qquad (L_4).$$

Étape 3 : pivot f, sur la ligne L_4. Parmi les lignes restantes, seule L_6 contient f ; l'opération $L_6 \leftarrow L_6 + L_4$ donne à gauche $(f-g+i) + (-f+g) = i$ et à droite $e + (-a+e) = -a+2e$:

$$i = -a+2e \qquad (L_6).$$

Étape 4 : pivot g, sur la ligne L_7. Les lignes restantes L_3, L_5, L_6 ne contiennent pas g : il n'y a rien à éliminer.
Étape 5 : pivot h, sur la ligne L_3. Seule L_5 contient encore h ; l'opération $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$ donne à gauche $h-(h+i)=-i$ et à droite $(a+c-e)-(c+e)=a-2e$:

$$-i = a - 2e \qquad (L_5).$$

Étape 6 : pivot i, sur la ligne L_6. L'opération $L_5 \leftarrow L_5 + L_6$ donne à gauche $-i+i=0$ et à droite $(a-2e)+(-a+2e)=0$:

$$0 = 0 \qquad (L_5).$$

Le système échelonné. En rangeant les lignes dans l'ordre des pivots, le système de départ est équivalent à

$$\begin{cases} -b+g = a-e & (L_1)\\ d+f-g = c & (L_2)\\ -f+g = -a+e & (L_4)\\ -g+i = -a+c & (L_7)\\ h+i = c+e & (L_3)\\ i = -a+2e & (L_6)\\ 0 = 0 & (L_5) \end{cases}$$

Il y a six pivots, b, d, f, g, h, i, et une équation devenue $0=0$: l'une des sept conditions était conséquence des six autres. Les trois inconnues a, c, e ne portent pas de pivot ; elles sont **libres**.
La remontée. On résout de bas en haut :

$$\begin{aligned} i &= 2e-a,\\ h &= c+e-i = c+e-(2e-a) = a+c-e,\\ g &= i+a-c = (2e-a)+a-c = 2e-c,\\ f &= g+a-e = (2e-c)+a-e = a-c+e,\\ d &= c-f+g = c-(a-c+e)+(2e-c) = -a+c+e,\\ b &= g-a+e = (2e-c)-a+e = -a-c+3e. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions. Les carrés magiques sont donc exactement les matrices

$$M = \begin{pmatrix} a & -a-c+3e & c\\ -a+c+e & e & a-c+e\\ 2e-c & a+c-e & 2e-a \end{pmatrix}, \qquad a, c, e \in \mathbb{R}.$$

Vérification sur la forme générale. Les trois lignes ont pour sommes $a+(-a-c+3e)+c = 3e$, puis $(-a+c+e)+e+(a-c+e) = 3e$, puis $(2e-c)+(a+c-e)+(2e-a) = 3e$. Les colonnes : $a+(-a+c+e)+(2e-c) = 3e$, puis $(-a-c+3e)+e+(a+c-e) = 3e$, puis $c+(a-c+e)+(2e-a) = 3e$. Les diagonales : $a+e+(2e-a) = 3e$ et $c+e+(2e-c) = 3e$. Les huit sommes valent $3e$: c'est bien un carré magique, quels que soient a, c, e.
Une famille génératrice. En séparant suivant les trois paramètres, $M = aP + cQ + eR$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}(P, Q, R)$.
Chaque matrice est un carré magique. Pour P : les lignes ont pour sommes $1-1+0=0$, $-1+0+1=0$, $0+1-1=0$; les colonnes $1-1+0=0$, $-1+0+1=0$, $0+1-1=0$; les diagonales $1+0-1=0$ et $0+0+0=0$. Pour Q : lignes $0-1+1$, $1+0-1$, $-1+1+0$, colonnes $0+1-1$, $-1+0+1$, $1-1+0$, diagonales $0+0+0$ et $1+0-1$, toutes nulles. Pour R : lignes $0+3+0$, $1+1+1$, $2-1+2$, colonnes $0+1+2$, $3+1-1$, $0+1+2$, diagonales $0+1+2$ et $0+1+2$, toutes égales à 3. Les trois matrices appartiennent bien à $\mathcal{C}$, avec pour sommes magiques 0, 0 et 3.
La famille est libre. Soient α, β, γ des réels tels que $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0_3$. Lisons trois coefficients bien choisis, ceux qui correspondent aux inconnues libres a, c, e. En position $(1,1)$, les coefficients de P, Q, R valent $1, 0, 0$, d'où $\alpha = 0$. En position $(1,3)$, ils valent $0, 1, 0$, d'où $\beta = 0$. En position $(2,2)$, ils valent $0, 0, 1$, d'où $\gamma = 0$. La famille (P, Q, R) est libre.
Conclusion. La famille (P, Q, R) est libre et engendre $\mathcal{C}$: c'est une base de $\mathcal{C}$, et

$$\dim \mathcal{C} = 3.$$

Attention. Le nombre d'équations ne donne pas la dimension. Sept équations en neuf inconnues laisseraient penser à $9-7=2$; c'est le **nombre de pivots** qui compte, et il vaut 6 parce qu'une équation était redondante. Seul le pivot mené jusqu'au bout permet de le voir.

4. Le coefficient central

D'après la forme générale, la somme magique vaut $s = 3e$, où e est le coefficient central. Donc $e = \dfrac{s}{3}$ pour tout carré magique. Sur le carré de Lo Shu : $\dfrac{15}{3} = 5$, qui est bien son coefficient central.
Les carrés magiques de somme nulle. Notons $\mathcal{C}_0$ leur ensemble. D'après ce qui précède, $M \in \mathcal{C}_0$ si et seulement si $M \in \mathcal{C}$ et $e = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $M = aP + cQ$ pour des réels a, c. Donc

$$\mathcal{C}_0 = \mathrm{Vect}(P, Q),$$

qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$, comme tout sous-espace engendré. La famille (P, Q) est libre, en tant que sous-famille de la famille libre (P, Q, R) : c'est une base de $\mathcal{C}_0$, qui est de dimension 2.

5. Le carré de Lo Shu dans deux bases

Dans la base (P, Q, R). Les coordonnées d'un carré magique dans cette base sont ses coefficients a, c, e, c'est-à-dire les coefficients en positions $(1,1)$, $(1,3)$ et $(2,2)$. Pour L, on lit $a = 4$, $c = 2$, $e = 5$, donc on attend $L = 4P + 2Q + 5R$. Vérifions-le :

$$\begin{aligned} 4P + 2Q + 5R &= \begin{pmatrix} 4+0+0 & -4-2+15 & 0+2+0 \\ -4+2+5 & 0+0+5 & 4-2+5 \\ 0-2+10 & 4+2-5 & -4+0+10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} = L. \end{aligned}$$

La famille (P, Q, J). La matrice J est un carré magique de somme magique 3 : chacune de ses huit sommes vaut $1+1+1$. En lisant ses coefficients en positions $(1,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, on trouve $a = c = e = 1$, donc $J = P + Q + R$, ce qu'on vérifie en additionnant les trois matrices : chaque coefficient vaut 1 (par exemple en position $(1,2)$, $-1-1+3=1$, et en position $(3,1)$, $0-1+2=1$).

La famille (P, Q, J) est libre. Soient α, β, γ des réels tels que $\alpha P + \beta Q + \gamma J = 0_3$. En position $(2,2)$, les coefficients de P, Q, J valent $0, 0, 1$, d'où $\gamma = 0$; il reste $\alpha P + \beta Q = 0_3$, et la liberté de (P, Q) donne $\alpha = \beta = 0$. C'est une famille libre de trois vecteurs dans $\mathcal{C}$, qui est de dimension 3 : c'est une base de $\mathcal{C}$.
Les coordonnées de L. Cherchons α, β, γ tels que $L = \alpha P + \beta Q + \gamma J$. En position $(2,2)$: $\gamma = 5$. En position $(1,1)$: $\alpha + \gamma = 4$, donc $\alpha = -1$. En position $(1,3)$: $\beta + \gamma = 2$, donc $\beta = -3$. Vérifions sur tous les coefficients :

$$-P - 3Q + 5J = \begin{pmatrix} -1+0+5 & 1+3+5 & 0-3+5 \\ 1-3+5 & 0+0+5 & -1+3+5 \\ 0+3+5 & -1-3+5 & 1+0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} = L.$$

Les coordonnées de L dans la base (P, Q, J) sont donc $(-1, -3, 5)$.

Commentaire

La seconde base est la plus parlante : elle sépare un carré magique en une **partie constante** $\frac{s}{3}J$, qui porte toute la somme magique, et une **partie de somme nulle**, dans le plan $\mathcal{C}_0 = \mathrm{Vect}(P, Q)$. Pour le carré de Lo Shu, $L = 5J + (-P - 3Q)$: on retire 5 à chaque case, et ce qui reste est un carré magique de somme nulle.
L'exercice montre aussi ce que le pivot apporte qu'aucune manipulation astucieuse ne donne : la **certitude** sur la dimension. On pourrait deviner la forme générale par substitutions successives ; mais seul un système échelonné garantit que l'on n'a ni oublié une contrainte, ni compté deux fois la même. Ici, la ligne devenue $0 = 0$ est précisément la condition qu'on aurait comptée deux fois.

Exercice 20 ★★ Rang d'une famille, rang d'une matrice

Notions : Rang d'une famille de vecteurs et rang d'une matrice

> **Remarque**
>
> **Selon les facs.** Le calcul du rang d'une matrice par opérations élémentaires sur les lignes est vu dans ce chapitre dans certaines maquettes, et en L2 dans d'autres. Il est traité ici, avec la justification de son invariance.

On rappelle que le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace qu'elle engendre, et que le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes.

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ et $\mathcal{G} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, où

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,0,2), & v_2 &= (0,1,1,1),\\ v_3 &= (2,3,1,5), & v_4 &= (1,0,1,0),\\ u_1 &= (1,2,0,1), & u_2 &= (2,1,1,0),\\ u_3 &= (1,-1,1,-1), & u_4 &= (0,3,-1,2). \end{aligned}$$

Déterminer le rang de chacune par la méthode du pivot, en donner une base du sous-espace engendré, et écrire explicitement les relations de liaison obtenues. Deux vecteurs de $\mathcal{G}$ sont-ils colinéaires ?

2. Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & m+2 & m^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

a. Justifier qu'une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice ne change pas son rang, puis que le rang d'une matrice échelonnée est son nombre de lignes non nulles.

b. Déterminer le rang de A_m selon les valeurs de m. Pour quelles valeurs de m les colonnes de A_m engendrent-elles $\mathbb{R}^3$?

3. On prend $m = 1$. On note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A_1 et R_1, R_2, R_3 ses lignes.

a. Exprimer C_3 et C_4 en fonction de C_1 et C_2, et donner une base de $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

b. Déterminer le rang de la famille (R_1, R_2, R_3) de $\mathbb{R}^4$ et le comparer à $\operatorname{rg} A_1$.

> **Corrigé**
>
> **1. Le rang de deux familles de $\mathbb{R}^4$**
>
> *Le principe.* On transforme la famille par des opérations du type $w_j \leftarrow w_j + \lambda w_k$ (avec $k \neq j$), qui ne changent pas le sous-espace engendré. En effet, le nouveau vecteur $w_j + \lambda w_k$ appartient à l'ancien Vect, et l'ancien vecteur s'écrit $w_j = (w_j + \lambda w_k) - \lambda w_k$, donc appartient au nouveau : les deux sous-espaces engendrés sont contenus l'un dans l'autre, ils sont égaux. On pousse jusqu'à une famille **échelonnée** (chaque vecteur non nul commence par strictement plus de zéros que le précédent), dont on lit le rang.
> *La famille $\mathcal{F}$.* Le vecteur v_1 commence par 1 : il sert de pivot pour la première coordonnée. On effectue $v_3 \leftarrow v_3 - 2v_1$ et $v_4 \leftarrow v_4 - v_1$:
>
> $$v_3 - 2v_1 = (0,1,1,1), \qquad v_4 - v_1 = (0,-1,1,-2).$$
>
> Le vecteur $v_2 = (0,1,1,1)$ sert de pivot pour la deuxième coordonnée. Notons $v_3' = v_3 - 2v_1$ et $v_4' = v_4 - v_1$, et effectuons $v_3' \leftarrow v_3' - v_2$ et $v_4' \leftarrow v_4' + v_2$:
>
> $$v_3' - v_2 = (0,0,0,0), \qquad v_4' + v_2 = (0,0,2,-1).$$

La famille $\mathcal{F}$ engendre donc le même sous-espace que la famille échelonnée

$$((1,1,0,2),\ (0,1,1,1),\ (0,0,2,-1)),$$

le vecteur nul pouvant être retiré sans rien changer au Vect. Cette famille échelonnée est libre : si $\alpha(1,1,0,2)+\beta(0,1,1,1)+\gamma(0,0,2,-1)=(0,0,0,0)$, la première coordonnée donne $\alpha=0$, la deuxième $\alpha+\beta=0$ donc $\beta=0$, la troisième $\beta+2\gamma=0$ donc $\gamma=0$. Ainsi

$$\operatorname{rg}\mathcal{F}=\dim\operatorname{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4)=3.$$

La relation de liaison. Le vecteur nul obtenu vaut $(v_3-2v_1)-v_2$, d'où

$$v_3=2v_1+v_2,$$

ce qui se vérifie : $2(1,1,0,2)+(0,1,1,1)=(2,3,1,5)$.
Une base de $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$. Puisque v_3 est combinaison de v_1 et v_2, on a $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})=\operatorname{Vect}(v_1,v_2,v_4)$. Cette famille de trois vecteurs engendre un espace de dimension 3 : elle en est une base. La famille échelonnée trouvée plus haut en est une autre.
La famille $\mathcal{G}$. Pivot $u_1=(1,2,0,1)$: on effectue $u_2\leftarrow u_2-2u_1$ et $u_3\leftarrow u_3-u_1$, et u_4, qui commence déjà par 0, reste tel quel :

$$u_2-2u_1=(0,-3,1,-2),\qquad u_3-u_1=(0,-3,1,-2),\qquad u_4=(0,3,-1,2).$$

Notons $u_2'=u_2-2u_1$ et $u_3'=u_3-u_1$. Pivot u_2' pour la deuxième coordonnée : $u_3'\leftarrow u_3'-u_2'$ et $u_4\leftarrow u_4+u_2'$ donnent

$$u_3'-u_2'=(0,0,0,0),\qquad u_4+u_2'=(0,0,0,0).$$

Il reste la famille échelonnée $((1,2,0,1),(0,-3,1,-2))$, libre (la première coordonnée force le premier coefficient à être nul, puis la deuxième force le second). Donc

$$\operatorname{rg}\mathcal{G}=2,$$

et (u_1,u_2) est une base de $\operatorname{Vect}(\mathcal{G})$, puisque $\operatorname{Vect}(u_1,u_2)=\operatorname{Vect}(u_1,u_2')$.
Les relations de liaison. Le premier vecteur nul vaut $(u_3-u_1)-(u_2-2u_1)=u_3-u_2+u_1$, le second $u_4+u_2-2u_1$. D'où

$$u_3=u_2-u_1,\qquad u_4=2u_1-u_2.$$

Vérification : $(2,1,1,0)-(1,2,0,1)=(1,-1,1,-1)=u_3$, et $(2,4,0,2)-(2,1,1,0)=(0,3,-1,2)=u_4$.
Pas de colinéarité. Pour deux vecteurs de $\mathcal{G}$, la comparaison des deux premières coordonnées suffit : $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,-1)$ et $(0,3)$ sont deux à deux non proportionnels (par exemple $(1,2)$ et $(2,1)$ ne le sont pas car $1\times1-2\times2=-3\neq0$, et de même pour les cinq autres paires, avec les valeurs -3, 3, -3, 6, 3). Aucun vecteur n'est donc multiple d'un autre, et pourtant la famille est de rang 2 seulement.
Attention. « Deux à deux non colinéaires » ne dit presque rien sur le rang dès qu'il y a plus de deux vecteurs : quatre vecteurs dans un même plan peuvent n'être jamais colinéaires deux à deux, comme ici. Le rang se calcule, il ne se devine pas en regardant les vecteurs par paires.

2. Le rang de A_m

a. *Invariance par les opérations sur les lignes.* Une opération élémentaire sur les lignes revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible $E\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$: la matrice obtenue est EA, et ses colonnes sont $EC_1,\dots,EC_4$, où $C_1,\dots,C_4$ sont celles de A. L'application $\varphi : X\mapsto EX$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (linéaire, de réciproque $X \mapsto E^{-1}X$). Par linéarité, elle envoie $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_4)$ sur $\mathrm{Vect}(EC_1, \dots, EC_4)$, et un isomorphisme conserve la dimension (il envoie une base sur une base). Donc $\mathrm{rg}(EA) = \mathrm{rg}\, A$.
Le même argument dit plus : comme φ est injective, $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_4 C_4 = 0$ équivaut à $\lambda_1 EC_1 + \cdots + \lambda_4 EC_4 = 0$. **Les colonnes de A et celles de EA vérifient exactement les mêmes relations de liaison.** On s'en servira à la question 3.
Le rang d'une matrice échelonnée. Soit T une matrice échelonnée à r lignes non nulles. Toutes ses colonnes ont des coordonnées nulles au-delà de la ligne r : elles appartiennent au sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathbb{R}^3$, de dimension r, donc $\mathrm{rg}\, T \leqslant r$. D'autre part, les r colonnes qui portent un pivot forment une famille libre : dans une relation de liaison entre elles, la dernière ligne non nulle force le coefficient de la dernière colonne pivot à être nul, puis l'avant-dernière ligne celui de la précédente, et ainsi de suite en remontant. Donc $\mathrm{rg}\, T \geqslant r$, et finalement $\mathrm{rg}\, T = r$.
b. *Le pivot sur A_m.* Notons L_1, L_2, L_3 les lignes. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & m & m^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient de la troisième ligne en colonne 3 vaut $(m+2) - 2 = m$, et en colonne 4, $m^2 - 2$. On effectue ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m-1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée pour toute valeur de m, et elle a le même rang que A_m d'après la question a. Les deux premières lignes sont non nulles ; tout dépend de la troisième, $(0, 0, m-1, m^2-1)$.
Si $m \neq 1$. Le coefficient $m - 1$ est non nul : la troisième ligne est non nulle, il y a trois lignes non nulles, donc $\mathrm{rg}\, A_m = 3$.
Si $m = 1$. La troisième ligne vaut $(0, 0, 0, 1-1) = (0, 0, 0, 0)$: il reste deux lignes non nulles, donc $\mathrm{rg}\, A_1 = 2$.

$$\mathrm{rg}\, A_m = 3 \text{ si } m \neq 1, \qquad \mathrm{rg}\, A_1 = 2.$$

Attention. La valeur $m = -1$ annule $m^2 - 1$, et l'on pourrait être tenté de la ranger avec $m = 1$. Ce serait une erreur : pour $m = -1$, la troisième ligne vaut $(0, 0, -2, 0)$, qui n'est pas nulle, et le rang vaut 3. Une ligne ne disparaît que si **tous** ses coefficients s'annulent pour la même valeur du paramètre. De même, factoriser la ligne en $(m-1)(0, 0, 1, m+1)$ et « diviser par $m - 1$ » n'est permis qu'après avoir mis le cas $m = 1$ à part.
Les colonnes engendrent-elles $\mathbb{R}^3$? Les colonnes de A_m engendrent un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension $\mathrm{rg}\, A_m$. Ce sous-espace est $\mathbb{R}^3$ tout entier si et seulement si sa dimension vaut 3 (un sous-espace de même dimension que l'espace est l'espace entier). Les colonnes engendrent donc $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $m \neq 1$.

3. Le cas $m = 1$: colonnes et lignes

a. *Les relations entre colonnes.* Pour $m = 1$, la forme échelonnée obtenue est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poussons jusqu'à la forme échelonnée **réduite** par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sur cette matrice, les relations entre colonnes se lisent directement : la troisième colonne vaut -1 fois la première plus 1 fois la deuxième, et la quatrième vaut 3 fois la première moins la deuxième. D'après la question 2a, les colonnes de A_1 vérifient les mêmes relations :

$$C_3 = -C_1 + C_2, \qquad C_4 = 3C_1 - C_2.$$

Vérifions-le sur les colonnes de A_1, qui sont $C_1 = (1,1,2)$, $C_2 = (2,3,5)$, $C_3 = (1,2,3)$, $C_4 = (1,0,1)$, écrites en ligne :

$$-C_1 + C_2 = (-1+2, -1+3, -2+5) = (1,2,3) = C_3,$$

$$3C_1 - C_2 = (3-2, 3-3, 6-5) = (1,0,1) = C_4.$$

Donc $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$. Les vecteurs C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires ($1 \times 3 - 1 \times 2 = 1 \neq 0$ sur leurs deux premières coordonnées), donc la famille (C_1, C_2) est libre : c'est une base de $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$, de dimension $2 = \operatorname{rg} A_1$.

b. *Le rang des lignes.* Les lignes de A_1 sont $R_1 = (1,2,1,1)$, $R_2 = (1,3,2,0)$ et $R_3 = (2,5,3,1)$. On constate que

$$R_1 + R_2 = (2,5,3,1) = R_3,$$

ce que le pivot annonçait : la troisième ligne s'est annulée par $L_3 - 2L_1 - (L_2 - L_1) = L_3 - L_1 - L_2$. Donc $\mathrm{Vect}(R_1, R_2, R_3) = \mathrm{Vect}(R_1, R_2)$, et R_1, R_2 ne sont pas colinéaires (leurs deux premières coordonnées donnent $1 \times 3 - 2 \times 1 = 1 \neq 0$). Le rang de la famille des lignes vaut donc 2, comme celui de la famille des colonnes.

Les deux familles ne vivent pas dans le même espace (les colonnes dans $\mathbb{R}^3$, les lignes dans $\mathbb{R}^4$), elles n'engendrent pas le même sous-espace, et pourtant leurs rangs coïncident. C'est un fait général, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$, que le pivot rend visible : le nombre de lignes non nulles d'une forme échelonnée compte à la fois les lignes indépendantes et les colonnes pivots.

Commentaire

Deux méthodes du pivot ont servi, et il faut savoir laquelle répond à quelle question. Les opérations **sur les vecteurs d'une famille** (question 1) conservent le sous-espace engendré : elles donnent le rang et une base de ce sous-espace, mais les relations de liaison s'obtiennent en suivant la trace des opérations. Les opérations **sur les lignes d'une matrice** (questions 2 et 3) changent le sous-espace engendré par les colonnes, mais conservent les relations entre colonnes : elles donnent le rang et, sur la forme réduite, les relations de liaison entre les colonnes de la matrice de départ. Pour une famille de vecteurs, on peut faire l'un ou l'autre, en écrivant les vecteurs en lignes ou en colonnes.

Exercice 21 ★ Linéaire ou pas

Notions : Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes

1. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $f(0_E) = 0_F$.

2. Pour chacune des huit applications suivantes, dire si elle est linéaire. Si oui, le démontrer ; sinon, donner un contre-exemple explicite et le vérifier par le calcul.

a. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x)$.

b. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, x)$.

c. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$.

d. $f_4 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$.

e. $f_5 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P^2$.

f. $f_6 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^\top$.

g. $f_7 : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$, où $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

h. $f_8 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Parmi les applications linéaires trouvées, lesquelles sont des endomorphismes ? des formes linéaires ? Le critère de la question 1 permet-il d'écarter toutes les applications non linéaires ?

Corrigé

Ce qu'il faut démontrer

Une application $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels est **linéaire** lorsque, pour tous $u, v \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Cette seule condition contient les deux propriétés $f(u+v) = f(u)+f(v)$ (cas $\lambda = 1$) et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ (cas $v = 0_E$, en utilisant la question 1). Pour démontrer la linéarité, on fixe des éléments **quelconques** et on calcule. Pour la réfuter, il suffit d'**un** choix de u, v, λ qui fait échouer l'égalité.

1. L'image du vecteur nul

On a $0_E = 0 \cdot 0_E$, donc, par linéarité, $f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_F$. □

2. Les huit applications

a. f_1 est linéaire. Voici la rédaction modèle.
Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y')$, et

$$\begin{aligned} f_1(\lambda u + v) &= \big((\lambda x + x') + (\lambda y + y'),\ 2(\lambda x + x')\big) \\ &= \big(\lambda(x + y) + (x' + y'),\ \lambda(2x) + 2x'\big) \\ &= \lambda(x + y, 2x) + (x' + y', 2x') \\ &= \lambda f_1(u) + f_1(v). \end{aligned}$$

Donc f_1 est linéaire. □
Le geste est toujours le même : on écrit les coordonnées de $\lambda u + v$, on applique la formule, puis on **regroupe** les termes en λ d'un côté et les autres de l'autre.

b. f_2 **n'est pas linéaire.** Le produit xy est le suspect : il est de degré 2. Prenons $u = (1,1)$ et $\lambda = 2$. D'une part $f_2(2u) = f_2(2,2) = (2\times 2, 2) = (4,2)$; d'autre part $2f_2(u) = 2(1\times 1, 1) = (2,2)$. Comme $(4,2) \neq (2,2)$, on a $f_2(2u) \neq 2f_2(u)$: l'application f_2 n'est pas linéaire.
L'additivité échoue aussi : avec $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$, $f_2(u+v) = f_2(1,1) = (1,1)$, alors que $f_2(u) + f_2(v) = (0,1) + (0,0) = (0,1)$.
c. f_3 **n'est pas linéaire.** On a $f_3(0,0) = (0+1, 0) = (1,0) \neq (0,0)$. D'après la question 1, une application linéaire envoie le vecteur nul sur le vecteur nul : f_3 ne l'est donc pas. C'est le contre-exemple le plus rapide qui soit, et il faut toujours y penser en premier devant une constante additive.
d. f_4 **est linéaire.** Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Quitte à compléter par des coefficients nuls, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k$ avec le même entier N. Alors $\lambda P + Q = \sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k + b_k) X^k$, et par définition de la dérivée d'un polynôme,

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q)' &= \sum_{k=1}^{N} k(\lambda a_k + b_k) X^{k-1} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{N} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{N} k b_k X^{k-1} = \lambda P' + Q'.\end{aligned}$$

Donc $f_4(\lambda P + Q) = \lambda f_4(P) + f_4(Q)$: l'application f_4 est linéaire. □
e. f_5 **n'est pas linéaire.** Prenons $P = X$ et $\lambda = 2$. Alors $f_5(2X) = (2X)^2 = 4X^2$, tandis que $2f_5(X) = 2X^2$. Ces deux polynômes sont différents, puisque leur différence $2X^2$ n'est pas le polynôme nul. Donc f_5 n'est pas linéaire. Plus généralement, $(P+Q)^2 = P^2 + 2PQ + Q^2$, et le terme $2PQ$ est l'obstacle à l'additivité.
f. f_6 **est linéaire.** Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tous i, j, le coefficient en position (i,j) de $(\lambda M + N)^\top$ est le coefficient en position (j,i) de $\lambda M + N$, c'est-à-dire $\lambda m_{ji} + n_{ji}$; c'est aussi le coefficient en position (i,j) de $\lambda M^\top + N^\top$. Les deux matrices ont les mêmes coefficients, donc

$$(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top,$$

et f_6 est linéaire. □
g. f_7 **est linéaire.** Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les opérations de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont définies point par point : pour tout réel x, $(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x)$. En particulier pour $x = 0$,

$$f_7(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda f_7(f) + f_7(g).$$

Donc f_7 est linéaire. □
Attention. Il ne faut pas confondre f_7, qui est linéaire, et l'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 1$, qui n'est pas un sous-espace (exercice 09). La linéarité de f_7 dit au contraire que l'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 0$, qui est son noyau, est un sous-espace.
h. f_8 **est linéaire.** Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites réelles, et $\lambda \in \mathbb{R}$. La suite $w = \lambda u + v$ a pour terme général $w_n = \lambda u_n + v_n$. Son image par f_8 est la suite de terme général $w_{n+1} = \lambda u_{n+1} + v_{n+1}$, qui est aussi le terme général de $\lambda f_8(u) + f_8(v)$. Deux suites qui ont le même terme général sont égales, donc $f_8(\lambda u + v) = \lambda f_8(u) + f_8(v)$: l'application f_8 est linéaire. □

3. Bilan

Les applications linéaires sont f_1, f_4, f_6, f_7 et f_8.

- f_1, f_4, f_6 et f_8 vont d'un espace dans **lui-même** : ce sont des endomorphismes, respectivement de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}[X]$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- f_7 est à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est une **forme linéaire** sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Le critère « $f(0_E) = 0_F$ » écarte f_3, et lui seul. Il ne suffit pas pour f_2 : on a $f_2(0,0) = (0 \times 0, 0) = (0,0)$, et pourtant f_2 n'est pas linéaire, ni pour f_5, puisque $f_5(0) = 0^2 = 0$. C'est une condition **nécessaire**, pas suffisante : elle permet de conclure vite à la non-linéarité quand elle échoue, et ne prouve rien quand elle est satisfaite.

Commentaire

Les cinq démonstrations de linéarité ont la même structure, et c'est elle qu'il faut retenir : « Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ », puis un calcul de $f(\lambda u + v)$ qui se termine par $\lambda f(u) + f(v)$. La seule chose qui change est la **raison** pour laquelle le calcul marche : les règles du calcul dans $\mathbb{R}^2$ pour f_1, les coefficients pour f_4 et f_6, la définition point par point des opérations pour f_7, terme à terme pour f_8. Cette raison doit apparaître dans la copie.
Côté contre-exemples, les signes qui doivent alerter sont un produit de deux coordonnées (f_2), un carré (f_5) ou une constante ajoutée (f_3). Un contre-exemple se donne avec des valeurs **numériques** : « xy n'est pas linéaire » n'est pas une justification, « $f_2(2,2) = (4,2) \neq (2,2) = 2f_2(1,1)$ » en est une.
La dérivation f_4 reviendra à l'exercice 24 : elle est surjective sans être injective, ce qu'aucun endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ne peut faire, et cela tient à la dimension infinie de $\mathbb{R}[X]$. Le décalage f_8 a le même comportement : la suite $(1,0,0,...)$ a pour image la suite nulle, et toute suite (v_n) est l'image de la suite $(0, v_0, v_1, ...)$.

Exercice 22 ★★ Noyau et image d'une application de R4 dans R3

Notions : Noyau, image, injectivité et surjectivité, Théorème du rang et ses conséquences, Rang d'une famille de vecteurs et rang d'une matrice

On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t,\ x - y + z - t,\ 2x + 2z).$$

On admet que f est linéaire (la vérification est celle de l'exercice 21). On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et sa dimension.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ et le rang de f. Vérifier le théorème du rang.

3. Donner une équation de $\mathrm{Im} f$ dans $\mathbb{R}^3$.

4. L'application f est-elle injective ? surjective ?

5. On pose $b = (4, 2, 6)$.

a. Vérifier que $b \in \mathrm{Im} f$, et trouver un vecteur v_0 tel que $f(v_0) = b$.

b. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(v) = b$, d'inconnue $v \in \mathbb{R}^4$, est $\{\, v_0 + w \mid w \in \mathrm{Ker} f \,\}$. L'écrire sous forme paramétrée et vérifier le résultat par le calcul.

c. L'équation $f(v) = (1, 0, 0)$ a-t-elle des solutions ?

Corrigé

1. Le noyau

Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à $\mathrm{Ker} f$ si et seulement si $f(v) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 & (L_1) \\ x - y + z - t = 0 & (L_2) \\ 2x + 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

On applique le pivot, avec x pour premier pivot : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donnent

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 & (L_1) \\ -2y - 2t = 0 & (L_2) \\ -2y - 2t = 0 & (L_3) \end{cases}$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ transforme la troisième ligne en $0 = 0$. Le système est équivalent au système échelonné

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -2y - 2t = 0 \end{cases}$$

dont les pivots sont x et y ; les inconnues z et t sont libres. La remontée donne $y = -t$, puis $x = -y - z - t = t - z - t = -z$. Donc

$$\mathrm{Ker} f = \{\, (-z, -t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R} \,\} = \mathrm{Vect}(a_1, a_2),$$

où $a_1 = (-1, 0, 1, 0)$ et $a_2 = (0, -1, 0, 1)$, puisque $(-z, -t, z, t) = z(-1, 0, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$.
Liberté. Si $\alpha a_1 + \beta a_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$, la troisième coordonnée donne $\alpha = 0$ et la quatrième $\beta = 0$. La famille (a_1, a_2) est libre et engendre $\mathrm{Ker} f$: c'est une base, et $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.
Vérification. $f(a_1) = (-1 + 0 + 1 + 0,\ -1 - 0 + 1 - 0,\ -2 + 2) = (0, 0, 0)$ et $f(a_2) = (0 - 1 + 0 + 1,\ 0 + 1 + 0 - 1,\ 0 + 0) = (0, 0, 0)$.

2. L'image et le rang

L'image d'une application linéaire est engendrée par les images d'une base de l'espace de départ :

$$\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)).$$

On calcule

$$f(e_1) = f(e_3) = (1,1,2), \qquad f(e_2) = f(e_4) = (1,-1,0).$$

Les vecteurs $f(e_3)$ et $f(e_4)$ répètent $f(e_1)$ et $f(e_2)$: ils n'ajoutent rien au sous-espace engendré, et

$$\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(w_1, w_2), \qquad w_1 = (1,1,2),\ w_2 = (1,-1,0).$$

Les vecteurs w_1 et w_2 ne sont pas colinéaires : un réel λ tel que $w_1 = \lambda w_2$ devrait vérifier $1 = \lambda$ (première coordonnée) et $1 = -\lambda$ (deuxième), ce qui est impossible ; et $w_2 \neq 0$. Une famille de deux vecteurs non colinéaires est libre : (w_1, w_2) est une base de $\mathrm{Im}f$, et

$$\mathrm{rg}f = \dim \mathrm{Im}f = 2.$$

Le théorème du rang. Il affirme que $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Ker}f + \mathrm{rg}f$. Les deux dimensions ont été calculées indépendamment l'une de l'autre, et l'on a bien $2+2=4$. C'est une vérification utile : si l'on avait trouvé un noyau de dimension 1, le théorème aurait signalé une erreur.
Attention. Le rang n'est pas le nombre de vecteurs $f(e_j)$, qui vaut 4 : c'est la dimension du sous-espace qu'ils engendrent. Ici deux d'entre eux sont répétés, mais en général les relations sont moins visibles, et il faut un pivot pour les trouver (exercice 20).

3. Une équation de l'image

Un vecteur (X,Y,Z) appartient à $\mathrm{Im}f$ si et seulement s'il existe des réels α, β tels que $(X,Y,Z) = \alpha w_1 + \beta w_2$, c'est-à-dire

$$X = \alpha + \beta, \qquad Y = \alpha - \beta, \qquad Z = 2\alpha.$$

Condition nécessaire. Si de tels α, β existent, alors $X + Y = 2\alpha = Z$.
Condition suffisante. Si $Z = X + Y$, posons $\alpha = \frac{X+Y}{2}$ et $\beta = \frac{X-Y}{2}$. Alors $\alpha+\beta = X$, $\alpha-\beta = Y$ et $2\alpha = X+Y = Z$: le vecteur (X,Y,Z) est bien dans l'image.
Donc

$$\mathrm{Im}f = \{\,(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X + Y - Z = 0\,\},$$

un plan de $\mathbb{R}^3$, ce qui est cohérent avec $\mathrm{rg}f = 2$. On pouvait le voir sur la formule de f : la somme des deux premières composantes, $(x+y+z+t)+(x-y+z-t)$, vaut $2x+2z$, qui est la troisième.

4. Injectivité, surjectivité

Non injective. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul. Ici $a_1 = (-1,0,1,0)$ est un vecteur non nul du noyau : $f(a_1) = f(0_{\mathbb{R}^4}) = (0,0,0)$, deux vecteurs distincts ont la même image. L'application f n'est pas injective.
Non surjective. L'image est de dimension 2, alors que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 : $\mathrm{Im}f \neq \mathbb{R}^3$. Concrètement, le vecteur $(0,0,1)$ n'a pas d'antécédent, puisque $0+0-1 = -1 \neq 0$: il ne vérifie pas l'équation de l'image.

5. Résoudre $f(v) = b$

a. Le vecteur $b = (4, 2, 6)$ vérifie $4 + 2 - 6 = 0$: il appartient à $\mathrm{Im} f$, et l'équation $f(v) = b$ a au moins une solution. Pour en trouver une, cherchons-la sous la forme $v_0 = (x, y, 0, 0)$, ce qui revient à imposer deux inconnues libres. L'équation devient

$$x + y = 4, \qquad x - y = 2, \qquad 2x = 6,$$

qui donne $x = 3$ puis $y = 1$, valeurs compatibles avec les trois équations. Ainsi $v_0 = (3, 1, 0, 0)$, et l'on vérifie : $f(3, 1, 0, 0) = (3 + 1,\ 3 - 1,\ 6) = (4, 2, 6) = b$.
b. *Le principe.* Soit $v \in \mathbb{R}^4$. Par linéarité de f,

$$\begin{aligned} f(v) = b &\iff f(v) = f(v_0) \iff f(v) - f(v_0) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff f(v - v_0) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff v - v_0 \in \mathrm{Ker} f. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc exactement les vecteurs $v = v_0 + w$ avec $w \in \mathrm{Ker} f$: **solution particulière plus noyau**. □
La forme paramétrée. Avec la base (a_1, a_2) du noyau trouvée à la question 1, les solutions sont

$$v = v_0 + z a_1 + t a_2 = (3 - z,\ 1 - t,\ z,\ t), \qquad z, t \in \mathbb{R}.$$

Vérification générale. Pour tous réels z, t :

$$\begin{aligned} (3 - z) + (1 - t) + z + t &= 4, \\ (3 - z) - (1 - t) + z - t &= 2, \\ 2(3 - z) + 2z &= 6, \end{aligned}$$

donc $f(3 - z, 1 - t, z, t) = (4, 2, 6) = b$. *Vérification sur une solution.* Pour $z = 1$ et $t = 2$, on obtient $v = (2, -1, 1, 2)$, et $f(v) = (2 - 1 + 1 + 2,\ 2 + 1 + 1 - 2,\ 4 + 2) = (4, 2, 6)$.
Contrôle par le pivot. On peut aussi résoudre directement le système $f(v) = b$. Les opérations de la question 1 ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$) donnent, avec les seconds membres $4, 2, 6$:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ \quad -2y - 2t = -2 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

le dernier second membre valant $(6 - 2 \times 4) - (2 - 4) = -2 + 2 = 0$. D'où $y = 1 - t$ et $x = 4 - y - z - t = 3 - z$: on retrouve la même famille de solutions.
c. Le vecteur $(1, 0, 0)$ vérifie $1 + 0 - 0 = 1 \neq 0$: il n'appartient pas à $\mathrm{Im} f$, et l'équation $f(v) = (1, 0, 0)$ n'a **aucune** solution. Le pivot le confirme : avec les seconds membres $1, 0, 0$, la dernière ligne devient $0 = (0 - 2) - (0 - 1) = -1$, ce qui est impossible.

Commentaire

Tout l'exercice repose sur deux sous-espaces qui ne vivent pas au même endroit : le noyau est dans l'espace de **départ** $\mathbb{R}^4$, l'image dans l'espace d'**arrivée** $\mathbb{R}^3$. On ne peut donc jamais additionner un vecteur du noyau et un vecteur de l'image, ni comparer leurs équations. Le théorème du rang ne relie que leurs **dimensions**.
La question 5 résume le rôle de chacun pour l'équation $f(v) = b$. L'image dit **s'il y a** des solutions : il en existe si et seulement si $b \in \mathrm{Im} f$. Le noyau dit **combien** il y en a : quand il en existe une, toutes les autres s'en déduisent en lui ajoutant un vecteur du noyau. Ici le noyau est un plan, et les solutions forment un plan de $\mathbb{R}^4$ qui ne passe pas par l'origine, parallèle à $\mathrm{Ker} f$.

Exercice 23 ★★ La dérivation dans R3[X]

Notions : Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes, Noyau, image, injectivité et surjectivité, Matrice d'une application linéaire dans des bases

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et D l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe son polynôme dérivé P'.

1. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} D$ et $\operatorname{Im} D$, en donnant une base de chacun. L'endomorphisme D est-il injectif ? surjectif ?

3. Écrire la matrice $N = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(D)$. Calculer N^2, N^3 et N^4. En déduire que $D^4 = 0$ et que $D^3 \neq 0$, et interpréter.

4. On pose $\varphi = \mathrm{id} + D$, c'est-à-dire $\varphi(P) = P + P'$, et $\psi = \mathrm{id} - D + D^2 - D^3$.

a. Montrer que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa réciproque.

b. Écrire les matrices de φ et de ψ dans la base $\mathcal{B}$ et vérifier le résultat de la question a par un produit matriciel.

5. Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P + P' = X^3$, et le vérifier.

Corrigé

1. Un endomorphisme

D est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. Par définition de la dérivée d'un polynôme,

$$P' = b + 2cX + 3dX^2,$$

qui est de degré au plus 2, donc appartient à $\mathbb{R}_3[X]$. L'application D envoie donc bien $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.
D est linéaire. Soient $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ et $Q = a' + b'X + c'X^2 + d'X^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le polynôme $\lambda P + Q$ a pour coefficients $\lambda a + a'$, $\lambda b + b'$, $\lambda c + c'$, $\lambda d + d'$, donc

$$\begin{aligned} D(\lambda P + Q) &= (\lambda b + b') + 2(\lambda c + c')X + 3(\lambda d + d')X^2 \\ &= \lambda(b + 2cX + 3dX^2) + (b' + 2c'X + 3d'X^2) = \lambda D(P) + D(Q). \end{aligned}$$

Linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même, D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. □

2. Noyau et image

Le noyau. Avec les notations précédentes, $D(P) = 0$ si et seulement si $b + 2cX + 3dX^2$ est le polynôme nul, c'est-à-dire si et seulement si ses coefficients sont nuls : $b = 2c = 3d = 0$, soit $b = c = d = 0$. Les polynômes du noyau sont donc les constantes :

$$\operatorname{Ker} D = \{\, a \mid a \in \mathbb{R} \,\} = \operatorname{Vect}(1).$$

La famille (1), formée d'un vecteur non nul, est libre : c'est une base du noyau, qui est de dimension 1.
L'image. Elle est engendrée par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} D &= \operatorname{Vect}(D(1), D(X), D(X^2), D(X^3)) \\ &= \operatorname{Vect}(0, 1, 2X, 3X^2) = \operatorname{Vect}(1, X, X^2), \end{aligned}$$

la dernière égalité parce qu'un vecteur nul n'ajoute rien et que multiplier un vecteur par un scalaire non nul ne change pas le sous-espace engendré. Donc $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}_2[X]$, de base $(1, X, X^2)$ (sous-famille de la base canonique, donc libre), et $\operatorname{rg} D = 3$.
Injectivité, surjectivité. D n'est pas injectif : son noyau contient le polynôme non nul 1, puisque $D(1) = 0 = D(0)$. D n'est pas surjectif : X^3 n'appartient pas à $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}_2[X]$, il n'est la dérivée d'aucun polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. On contrôle la cohérence avec le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} D + \operatorname{rg} D = 1 + 3 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$.
Attention. Sur $\mathbb{R}_3[X]$, X^3 n'a pas d'antécédent, alors qu'il en a dans $\mathbb{R}[X]$ (par exemple $\frac{1}{4}X^4$). La surjectivité dépend de l'espace d'arrivée **et** de l'espace de départ : changer l'un ou l'autre change la réponse. C'est l'objet de l'exercice 24.

3. La matrice de D et ses puissances

La matrice. La colonne j de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(D)$ contient les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de l'image du j-ième vecteur de $\mathcal{B}$. Or

$$D(1) = 0, \qquad D(X) = 1, \qquad D(X^2) = 2X, \qquad D(X^3) = 3X^2,$$

de coordonnées respectives $(0,0,0,0)$, $(1,0,0,0)$, $(0,2,0,0)$ et $(0,0,3,0)$. Donc

$$N = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les puissances. Dans le produit $N \times N$, la ligne i du résultat est la combinaison des lignes de N dont les coefficients sont ceux de la ligne i de N. La première ligne de N est $(0,1,0,0)$: la première ligne de N^2 est la deuxième ligne de N, soit $(0,0,2,0)$. La deuxième ligne de N est $(0,0,2,0)$: la deuxième ligne de N^2 vaut 2 fois la troisième ligne de N, soit $(0,0,0,6)$. Les deux dernières lignes de N^2 sont nulles, de la même façon. En procédant ainsi pour les produits suivants,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $N^4 = N^3 N = 0_4$, puisque la seule ligne non nulle de N^3, $(0,0,0,6)$, sélectionne 6 fois la quatrième ligne de N, qui est nulle.
Conclusion. La matrice de D^k dans $\mathcal{B}$ est N^k. Comme $N^4 = 0_4$, on a $D^4 = 0$; comme $N^3 \neq 0_4$, on a $D^3 \neq 0$.
Interprétation. $D^k(P)$ est la dérivée k-ième de P. La matrice N^2 se lit $D^2(X^2) = 2$ et $D^2(X^3) = 6X$, la matrice N^3 se lit $D^3(X^3) = 6$, et $D^4 = 0$ dit qu'un polynôme de degré au plus 3 a une dérivée quatrième nulle. Chaque dérivation fait baisser le degré d'au moins une unité, et quatre dérivations épuisent les quatre degrés possibles $0, 1, 2, 3$.

4. L'automorphisme $\varphi = \mathrm{id} + D$

a. *Les deux composées.* Toutes les applications en jeu sont linéaires, et la composition de deux endomorphismes se développe comme un produit : $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w$ (parce que u est linéaire) et $(u + v) \circ w = u \circ w + v \circ w$ (toujours). De plus D commute avec id. Donc

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi &= (\mathrm{id} + D) \circ (\mathrm{id} - D + D^2 - D^3) \\ &= (\mathrm{id} - D + D^2 - D^3) + (D - D^2 + D^3 - D^4) \\ &= \mathrm{id} - D^4 = \mathrm{id}, \end{aligned}$$

les termes intermédiaires s'éliminant deux à deux, et $D^4 = 0$ d'après la question 3. De même,

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi &= (\mathrm{id} - D + D^2 - D^3) \circ (\mathrm{id} + D) \\ &= (\mathrm{id} - D + D^2 - D^3) + (D - D^2 + D^3 - D^4) = \mathrm{id} - D^4 = \mathrm{id}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'endomorphisme φ admet ψ pour réciproque des deux côtés : il est bijectif, c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, et

$$\varphi^{-1} = \mathrm{id} - D + D^2 - D^3. \qquad \square$$

b. *Les matrices.* Par linéarité de $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et parce que la matrice d'une composée est le produit des matrices,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_4 + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = I_4 - N + N^2 - N^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la seconde, on a additionné coefficient par coefficient : la position $(1,2)$ reçoit -1 de $-N$, la position $(1,3)$ reçoit $+2$ de N^2, la position $(1,4)$ reçoit -6 de $-N^3$, et ainsi de suite.
Le produit. Calculons la première ligne de $(I_4 + N)(I_4 - N + N^2 - N^3)$: c'est la ligne $(1,1,0,0)$ appliquée aux colonnes de la seconde matrice, soit 1, puis $-1+1=0$, puis $2-2=0$, puis $-6+6=0$. La deuxième ligne, $(0,1,2,0)$, donne 0, puis 1, puis $-2+2=0$, puis $6-6=0$. La troisième, $(0,0,1,3)$, donne 0, 0, 1, puis $-3+3=0$. La quatrième donne $(0,0,0,1)$. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4,$$

et le produit dans l'autre ordre donne aussi I_4 : par exemple, sa première ligne est $(1,-1,2,-6)$ appliquée aux colonnes de $I_4 + N$, soit 1, puis $1-1=0$, puis $-2+2=0$, puis $-6+6=0$. Pour une matrice carrée, l'un des deux produits suffit d'ailleurs à conclure, et on retrouve ce que la question a établissait.

5. L'antécédent de X^3

L'équation $P + P' = X^3$ s'écrit $\varphi(P) = X^3$. Comme φ est bijectif, elle a une unique solution, $P = \varphi^{-1}(X^3) = \psi(X^3)$:

$$P = X^3 - D(X^3) + D^2(X^3) - D^3(X^3) = X^3 - 3X^2 + 6X - 6.$$

Matriciellement, les coordonnées de $\psi(X^3)$ sont la quatrième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$, soit $(-6,6,-3,1)$: on retrouve $-6 + 6X - 3X^2 + X^3$.
Vérification. $P' = 3X^2 - 6X + 6$, donc

$$P + P' = (X^3 - 3X^2 + 6X - 6) + (3X^2 - 6X + 6) = X^3.$$

Commentaire

La formule $\varphi^{-1} = \mathrm{id} - D + D^2 - D^3$ est celle de $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, mais elle s'arrête : comme $D^4 = 0$, la somme est **finie**, et il n'y a aucune question de convergence. Le même calcul montre que $\mathrm{id} + u$ est inversible dès que u est un endomorphisme dont une puissance est nulle. On pouvait aussi prouver l'injectivité de φ sans calcul. Si $P \neq 0$ est de degré d, alors P' est de degré strictement inférieur à d, donc $P + P'$ a le même terme de plus haut degré que P et n'est pas nul. Le noyau de φ est donc réduit à $\{0\}$, et un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif (exercice 24). Cette preuve donne l'existence de l'antécédent ; le calcul de ψ donne en plus sa **formule**.

Exercice 24 ★★★ Ce que le théorème du rang interdit

Notions : Théorème du rang et ses conséquences

On rappelle le théorème du rang : si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im} f$ est de dimension finie et

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rg} f.$$

1. Montrer qu'il n'existe aucune application linéaire injective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, montrer que si E et F sont de dimension finie et s'il existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ injective, alors $\dim E \leqslant \dim F$.

2. Montrer qu'il n'existe aucune application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Énoncer et démontrer la généralisation.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \text{ injectif} \iff f \text{ surjectif} \iff f \text{ bijectif}.$$

4. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les endomorphismes $D : P \mapsto P'$ et $M : P \mapsto XP$.

a. Montrer que D est surjectif mais pas injectif.

b. Montrer que M est linéaire, injectif, mais pas surjectif.

c. Pourquoi ces deux exemples ne contredisent-ils pas la question 3 ?

5. Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

a. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}\, g$.

b. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im} f)$, puis que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg} f$. On appliquera le théorème du rang à la restriction de g à $\mathrm{Im} f$.

c. Montrer par un exemple dans $\mathbb{R}^2$ que l'inégalité $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg} f, \mathrm{rg}\, g)$ peut être stricte.

6. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ n'est jamais inversible. Vérifier sur

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et montrer que, pour ces matrices, BA est inversible.

Corrigé

Un outil préalable

On se servira plusieurs fois du fait suivant : **si H est un sous-espace d'un espace E de dimension finie n, alors $\dim H \leqslant n$, avec égalité si et seulement si $H = E$.** Pour l'égalité, supposons $\dim H = n$ et prenons une base de H : c'est une famille libre de n vecteurs de E, donc une base de E puisque E est de dimension n. Alors E est engendré par des vecteurs de H, donc $E \subset H$, et comme $H \subset E$, on a $H = E$.

1. Pas d'injection de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$

Raisonnons par l'absurde : soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ injective. Une application linéaire injective a un noyau réduit à $\{0\}$, donc $\dim \mathrm{Ker} f = 0$, et le théorème du rang donne

$$\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker} f = 4 - 0 = 4.$$

Mais $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{rg} f \leqslant 3$ d'après l'outil préalable. On obtient $4 \leqslant 3$: contradiction. Il n'existe donc aucune application linéaire injective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
La généralisation. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ injective, avec E et F de dimension finie. Le même calcul donne $\mathrm{rg} f = \dim E - 0 = \dim E$, et $\mathrm{Im} f \subset F$ donne $\mathrm{rg} f \leqslant \dim F$. Donc $\dim E \leqslant \dim F$. □

2. Pas de surjection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ quelconque. Le théorème du rang donne

$$\mathrm{rg} f = 2 - \dim \mathrm{Ker} f \leqslant 2,$$

puisqu'une dimension est positive. L'image est donc un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension au plus 2 : elle n'est pas égale à $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3. Aucune application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ n'est surjective.
La généralisation. **Si E et F sont de dimension finie et s'il existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective, alors $\dim E \geqslant \dim F$.** En effet, la surjectivité s'écrit $\mathrm{Im} f = F$, donc $\mathrm{rg} f = \dim F$, et le théorème du rang donne $\mathrm{rg} f = \dim E - \dim \mathrm{Ker} f \leqslant \dim E$. □
Les questions 1 et 2 donnent ensemble : **un isomorphisme ne peut exister qu'entre deux espaces de même dimension.**

3. Injectif, surjectif, bijectif : en dimension finie, c'est la même chose

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$. Le théorème du rang s'écrit ici $n = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rg} f$.
Injectif entraîne surjectif. Si f est injectif, $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$, donc $\mathrm{rg} f = n - 0 = n$. Ainsi $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace de E de dimension $n = \dim E$: d'après l'outil préalable, $\mathrm{Im} f = E$, et f est surjectif.
Surjectif entraîne injectif. Si f est surjectif, $\mathrm{Im} f = E$, donc $\mathrm{rg} f = n$, et $\dim \mathrm{Ker} f = n - n = 0$. Le seul sous-espace de dimension 0 est $\{0_E\}$: $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$, et f est injectif.
Bijectif. Être bijectif, c'est être injectif et surjectif. Si f est injectif, il est aussi surjectif d'après le premier point, donc bijectif ; si f est surjectif, il est aussi injectif d'après le second, donc bijectif. Réciproquement, un endomorphisme bijectif est injectif et surjectif. Les trois propriétés sont équivalentes. □
Attention. Ce résultat demande que f aille de E dans **le même** espace E, ou plus généralement dans un espace de même dimension finie. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E \neq \dim F$, il est faux : l'application $(x,y) \mapsto (x,y,0)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est injective sans être surjective.

4. Deux contre-exemples en dimension infinie

a. *La dérivation D.* Sa linéarité a été établie à l'exercice 21.
D est surjectif. Soit $Q = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Posons

$$P = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k+1} X^{k+1}.$$

Alors $P' = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k+1}(k+1)X^k = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k = Q$. Tout polynôme a un antécédent par D.
D n'est pas injectif. Le polynôme constant 1 est non nul et vérifie $D(1) = 0$: $\mathrm{Ker}\, D \neq \{0\}$.
b. *La multiplication par X.* Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par distributivité du produit des polynômes, $M(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q) = \lambda XP + XQ = \lambda M(P) + M(Q)$: l'application M est linéaire, et c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ puisque XP est encore un polynôme.
M est injectif. Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ tel que $M(P) = 0$. Alors $XP = \sum_{k=0}^{N} a_k X^{k+1}$ est le polynôme nul, donc tous ses coefficients sont nuls : $a_0 = a_1 = \cdots = a_N = 0$, et $P = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, M = \{0\}$.

M n'est pas surjectif. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, le coefficient constant de $XP = a_0 X + a_1 X^2 + \cdots$ est nul. Le polynôme 1, dont le coefficient constant vaut 1, n'est donc l'image d'aucun polynôme : $1 \notin \operatorname{Im} M$.
c. La question 3 suppose que E est de **dimension finie**, et c'est cette hypothèse qui manque : $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie, puisque pour tout entier n, il contient la famille libre $(1, X, \dots, X^n)$ de $n+1$ vecteurs, et un espace de dimension finie d ne contient aucune famille libre de plus de d vecteurs. Le théorème du rang ne s'applique pas, et rien n'empêche un endomorphisme d'être injectif sans être surjectif, ou l'inverse.
On ne peut pas non plus « se ramener » à un espace de dimension finie : M n'envoie pas $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même, puisque $M(X^3) = X^4$. Quant à la restriction de D à $\mathbb{R}_3[X]$, elle n'est ni injective ni surjective (exercice 23), ce qui est conforme à la question 3.

5. Le rang d'une composée

a. *L'inclusion* $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$. Soit $z \in \operatorname{Im}(g \circ f)$: il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$. En posant $y = f(x) \in F$, on a $z = g(y)$, donc $z \in \operatorname{Im} g$. Le sous-espace $\operatorname{Im}(g \circ f)$ est donc contenu dans $\operatorname{Im} g$, et sa dimension est au plus celle de $\operatorname{Im} g$:

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g.$$

b. *L'égalité* $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$. Par double inclusion.
Soit $z \in \operatorname{Im}(g \circ f)$: $z = g(f(x))$ pour un $x \in E$, et $f(x) \in \operatorname{Im} f$, donc $z \in g(\operatorname{Im} f)$.
Soit $z \in g(\operatorname{Im} f)$: $z = g(y)$ pour un $y \in \operatorname{Im} f$, et $y = f(x)$ pour un $x \in E$, donc $z = (g \circ f)(x) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.
Le théorème du rang sur une restriction. Notons h la restriction de g au sous-espace $\operatorname{Im} f$: c'est l'application $h : \operatorname{Im} f \to G$, $y \mapsto g(y)$, qui est linéaire puisque g l'est. Son image est $g(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im}(g \circ f)$. L'espace de départ $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie $\operatorname{rg} f$, et le théorème du rang appliqué à h donne

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h = \dim \operatorname{Ker} h + \operatorname{rg}(g \circ f).$$

Comme $\dim \operatorname{Ker} h \geqslant 0$, il vient

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} f.$$

Avec la question a : $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$. □
L'intuition est simple : appliquer g à un sous-espace ne peut pas en augmenter la dimension. La question a se lisait sur une inclusion ; la question b ne se lit sur aucune, puisque $\operatorname{Im}(g \circ f)$ est dans G et $\operatorname{Im} f$ dans F, et c'est pour cela que le théorème du rang est nécessaire.
c. *Une inégalité stricte.* Sur $\mathbb{R}^2$, posons $f(x, y) = (x, 0)$ et $g(x, y) = (y, 0)$, qui sont linéaires. Leurs images valent toutes deux $\operatorname{Vect}((1, 0))$, donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g = 1$. Mais pour tout (x, y),

$$(g \circ f)(x, y) = g(x, 0) = (0, 0),$$

donc $g \circ f = 0$ et $\operatorname{rg}(g \circ f) = 0 < 1 = \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$. L'image de f, la droite $\operatorname{Vect}((1, 0))$, est entièrement écrasée par g, dont c'est précisément le noyau.

6. Un produit qui n'est jamais inversible

Le cas général. Notons $u_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto AX$, et $u_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $X \mapsto BX$, les applications linéaires canoniquement associées. L'application associée à AB est $X \mapsto ABX = u_A(u_B(X))$, c'est-à-dire $u_A \circ u_B$. D'après la question 5,

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(u_A \circ u_B) \leqslant \operatorname{rg} u_B \leqslant \dim \mathbb{R}^2 = 2,$$

la dernière inégalité parce que $\operatorname{Im} u_B$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Or une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si l'endomorphisme associé est bijectif, donc, d'après la question 3, si

et seulement s'il est surjectif, c'est-à-dire de rang 3. Comme $\operatorname{rg}(AB) \leqslant 2$, la matrice AB n'est jamais inversible. □
Sur l'exemple. On calcule

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deuxième et troisième colonnes sont égales, donc le vecteur colonne $X_0 = (0, 1, -1)$ vérifie $ABX_0 = C_2 - C_3 = 0$: le noyau de u_{AB} contient un vecteur non nul, l'endomorphisme associé n'est pas injectif, et AB n'est pas inversible. On le vérifie ligne par ligne : $0 + 2 - 2 = 0$, $0 + 1 - 1 = 0$, $0 + 0 - 0 = 0$.
En revanche,

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dont le critère $ad - bc$ vaut $1 \times 1 - 2 \times 1 = -1 \neq 0$: la matrice BA est inversible, d'inverse

$$(BA)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ce que l'on vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Il n'y a pas de contradiction : BA correspond à $u_B \circ u_A$, qui passe par $\mathbb{R}^3$, espace **plus grand** que l'espace de départ $\mathbb{R}^2$; la question 5 ne donne alors que $\operatorname{rg}(BA) \leqslant 2$, ce qui n'interdit rien dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Commentaire

Tous les résultats de l'exercice sortent d'une même ligne, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$, combinée avec le fait qu'un sous-espace a une dimension au plus égale à celle de l'espace qui le contient. Le théorème du rang est un théorème de **comptage** : la dimension de l'espace de départ se partage entre ce que f écrase (le noyau) et ce que f atteint (l'image). On ne peut pas atteindre plus de dimensions qu'on n'en a au départ, ni en écraser sans en perdre à l'arrivée.
La question 3 est celle qui sert le plus. Pour montrer qu'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est bijectif, il suffit de montrer qu'il est injectif, c'est-à-dire de résoudre $f(x) = 0$, ce qui est souvent bien plus simple que de résoudre $f(x) = y$ pour tout y. Les contre-exemples de la question 4 montrent que ce raccourci n'est pas une évidence : il tient entièrement à la dimension finie.

Exercice 25 ★★★ Noyau égal à l'image

Notions : Théorème du rang et ses conséquences, Noyau, image, injectivité et surjectivité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$.

1. On suppose que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

a. Montrer que n est pair, et que $\mathrm{rg} f = \dfrac{n}{2}$.

b. Montrer que $f^2 = 0$.

c. En déduire qu'il n'existe aucun endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), on pose $f(x, y, z, t) = (z, t, 0, 0)$.

a. Écrire la matrice A de f dans la base canonique et calculer A^2.

b. Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$, et vérifier que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

3. Même question pour l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ de matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique : calculer B^2, puis déterminer $\mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g$.

4. On étudie la réciproque de la question 1b.

a. Montrer que si $f^2 = 0$, alors $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.

b. Montrer par un contre-exemple dans $\mathbb{R}^4$ que $f^2 = 0$ n'entraîne pas $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

c. Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$ si et seulement si $f^2 = 0$ et $\mathrm{rg} f = \dfrac{n}{2}$.

Corrigé

1. Les conséquences de $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$

a. *La parité.* Le théorème du rang donne $n = \dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rg} f$. Puisque $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$, ces deux sous-espaces ont la même dimension : $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg} f$. Donc

$$n = \mathrm{rg} f + \mathrm{rg} f = 2\,\mathrm{rg} f.$$

L'entier n est le double de l'entier $\mathrm{rg} f$: il est pair, et $\mathrm{rg} f = \dfrac{n}{2}$. □

b. *Le carré est nul.* Soit $x \in E$. Le vecteur $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im} f$ par définition de l'image. Comme $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$, il appartient aussi à $\mathrm{Ker} f$, donc $f(f(x)) = 0_E$. Ceci valant pour tout $x \in E$, on a $f^2 = 0$. □

On remarquera que seule l'inclusion $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ a servi ici : c'est le point de départ de la question 4.

c. *Rien dans* $\mathbb{R}^3$. Si un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ vérifiait $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$, la question a donnerait que 3 est pair, ce qui est faux. Un tel endomorphisme n'existe donc pas. On peut le dire autrement : on aurait $\mathrm{rg} f = \frac{3}{2}$, qui n'est pas un entier.

2. Un premier exemple dans $\mathbb{R}^4$

a. *La matrice.* Les colonnes de A sont les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique : $f(e_1) = f(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$, $f(e_2) = (0,0,0,0)$, $f(e_3) = (1,0,0,0) = e_1$ et

$f(e_4) = (0,1,0,0) = e_2$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le carré. La première ligne de A^2 est la combinaison des lignes de A de coefficients $(0,0,1,0)$, c'est-à-dire la troisième ligne de A, qui est nulle ; la deuxième ligne de A^2 est la quatrième ligne de A, nulle aussi ; les deux dernières lignes de A^2 sont nulles puisque celles de A le sont. Donc $A^2 = 0_4$, ce qui se voit aussi sur f : $f(f(x,y,z,t)) = f(z,t,0,0) = (0,0,0,0)$.
b. *Le noyau.* $f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$ si et seulement si $z = 0$ et $t = 0$, les coordonnées x et y étant libres. Donc

$$\mathrm{Ker} f = \{\, (x,y,0,0) \mid x,y \in \mathbb{R} \,\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2).$$

L'image. Elle est engendrée par les images de la base : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(0,0,e_1,e_2) = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Les deux sous-espaces sont égaux au plan $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$, de dimension $2 = \frac{4}{2}$, comme l'annonçait la question 1a.

3. Un second exemple, moins visible

Le carré. L'endomorphisme g s'écrit $g(x,y,z,t) = (x-y,\ x-y,\ z-t,\ z-t)$. La première ligne de B^2 est la combinaison des lignes de B de coefficients $(1,-1,0,0)$, c'est-à-dire la première ligne moins la deuxième : $(1-1,-1+1,0,0) = (0,0,0,0)$. La deuxième ligne de B^2, qui a les mêmes coefficients, est nulle aussi. La troisième est la troisième ligne de B moins la quatrième, $(0,0,1-1,-1+1) = (0,0,0,0)$, et de même pour la quatrième. Donc $B^2 = 0_4$.
On le vérifie sur l'application : $g(g(x,y,z,t)) = g(x-y,x-y,z-t,z-t)$, dont la première composante vaut $(x-y)-(x-y) = 0$, la deuxième aussi, et les deux dernières $(z-t)-(z-t) = 0$.
Le noyau. $g(x,y,z,t) = 0$ si et seulement si $x-y = 0$ et $z-t = 0$, soit $y = x$ et $t = z$. Donc

$$\mathrm{Ker}\, g = \{\, (x,x,z,z) \mid x,z \in \mathbb{R} \,\} = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(0,0,1,1)).$$

L'image. Elle est engendrée par les colonnes de B, à savoir $(1,1,0,0)$, $(-1,-1,0,0)$, $(0,0,1,1)$ et $(0,0,-1,-1)$. La deuxième est l'opposée de la première, la quatrième l'opposée de la troisième, donc

$$\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(0,0,1,1)) = \mathrm{Ker}\, g.$$

Les vecteurs $(1,1,0,0)$ et $(0,0,1,1)$ ne sont pas colinéaires (le premier a une première coordonnée non nulle, le second non), donc ce plan est bien de dimension 2, et le théorème du rang est respecté : $2+2 = 4$.

4. La réciproque

a. Supposons $f^2 = 0$ et soit $y \in \mathrm{Im} f$: il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$, donc $y \in \mathrm{Ker} f$. Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$. □
b. *La réciproque est fausse.* Dans $\mathbb{R}^4$, posons $h(x,y,z,t) = (z,0,0,0)$, qui est linéaire. Pour tout (x,y,z,t),

$$h(h(x,y,z,t)) = h(z,0,0,0) = (0,0,0,0),$$

puisque la troisième coordonnée de $(z,0,0,0)$ est nulle. Donc $h^2 = 0$. Mais $\mathrm{Ker}\, h = \{\, (x,y,z,t) \mid z = 0 \,\} = \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_4)$ est de dimension 3, tandis que $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Vect}(h(e_1),h(e_2),h(e_3),h(e_4)) = \mathrm{Vect}(0,0,e_1,0) = \mathrm{Vect}(e_1)$ est de dimension 1. Des sous-espaces de dimensions différentes ne sont pas égaux : $\mathrm{Ker}\, h \neq \mathrm{Im}\, h$.
Un contre-exemple encore plus simple est l'endomorphisme nul : son carré est nul, son noyau est $\mathbb{R}^4$ et son image $\{0\}$. On a préféré h, qui est non nul, pour montrer que l'échec ne tient pas à un cas dégénéré : l'inclusion $\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Ker}\, h$ est vraie, mais stricte.

c. *Le sens direct.* Si $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$, la question 1 donne $f^2 = 0$ et $\mathrm{rg} f = \frac{n}{2}$.
Le sens réciproque. Supposons $f^2 = 0$ et $\mathrm{rg} f = \frac{n}{2}$. D'après la question a, $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$. D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker} f = n - \mathrm{rg} f = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} = \dim \mathrm{Im} f.$$

Ainsi $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace de $\mathrm{Ker} f$ de même dimension finie. Une base de $\mathrm{Im} f$ est alors une famille libre de $\frac{n}{2}$ vecteurs dans l'espace $\mathrm{Ker} f$, de dimension $\frac{n}{2}$: c'est une base de $\mathrm{Ker} f$, donc $\mathrm{Ker} f$ est engendré par des vecteurs de $\mathrm{Im} f$, et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Im} f$. Avec l'inclusion inverse, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$. □
Pour le contre-exemple h de la question b, c'est la condition de rang qui manque : $\mathrm{rg}\, h = 1 \neq 2 = \frac{4}{2}$.
Attention. Une inclusion entre sous-espaces ne devient une égalité que si les **dimensions** sont égales, et cela n'a de sens qu'en dimension finie. C'est le geste qui conclut la question 4c, et c'est le même qu'à l'exercice 24 : inclusion plus égalité des dimensions entraîne égalité.

Commentaire

L'égalité $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$ est une contrainte très forte : elle fixe la dimension de l'espace (paire), le rang ($\frac{n}{2}$) et le carré ($f^2 = 0$). En dimension 2, l'exemple le plus simple est $(x, y) \mapsto (y, 0)$, dont le noyau et l'image sont tous deux la droite $\mathrm{Vect}(e_1)$. L'exemple de la question 2 en est le « doublement » en dimension 4, et celui de la question 3 un endomorphisme du même type, dont le noyau et l'image ne se lisent plus à vue sur la matrice.
La question 4 montre la différence entre une inclusion et une égalité. La condition $f^2 = 0$ dit seulement que l'image est **dans** le noyau ; elle laisse libre la taille de l'image, qui peut aller de 0 jusqu'à la moitié de n (c'est l'une des questions de l'exercice 34, consacré aux endomorphismes de carré nul). L'égalité, elle, demande que l'image soit aussi grande que possible.

Exercice 26 ★★★★ Noyaux et images itérés

Notions : Noyau, image, injectivité et surjectivité, Théorème du rang et ses conséquences

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^0 = \mathrm{id}_E$ et $f^{k+1} = f \circ f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et l'on note, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$N_k = \operatorname{Ker} f^k, \qquad I_k = \operatorname{Im} f^k.$$

En particulier $N_0 = \{0_E\}$ et $I_0 = E$. On admet que $f^j \circ f^l = f^{j+l}$ pour tous entiers j, l.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.

2. On suppose qu'il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$. Montrer que $N_{k+1} = N_{k+2}$, puis que $N_m = N_k$ pour tout entier $m \geqslant k$.

3. On suppose dans cette question que E est de dimension finie n.

a. Montrer qu'il existe un entier $k \leqslant n$ tel que $N_k = N_{k+1}$. On note p le plus petit d'entre eux.

b. Montrer que la suite (N_k) est strictement croissante jusqu'au rang p, puis constante, et qu'il en est de même, dans l'ordre décroissant, de la suite (I_k), avec le même rang p.

4. On revient à un espace E quelconque. Montrer que

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2.$$

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

a. Calculer A^2 et A^3, puis A^k pour tout $k \geqslant 2$.

b. Déterminer $\operatorname{Ker} u^k$ et $\operatorname{Im} u^k$ pour $k = 1, 2, 3$, avec leurs dimensions. Quel est l'entier p de la question 3 ?

c. Vérifier sur cet exemple le résultat de la question 4, pour u puis pour u^2.

Corrigé

1. Les deux suites sont emboîtées

Les noyaux croissent. Soit $x \in N_k$, c'est-à-dire $f^k(x) = 0_E$. Alors

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E,$$

la dernière égalité parce qu'une application linéaire envoie le vecteur nul sur le vecteur nul. Donc $x \in N_{k+1}$, et $N_k \subset N_{k+1}$.
Les images décroissent. Soit $y \in I_{k+1}$: il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Comme $f^{k+1} = f^k \circ f$, on a $y = f^k(f(x))$, qui est l'image par f^k du vecteur $f(x)$: donc $y \in I_k$, et $I_{k+1} \subset I_k$. □
Par transitivité de l'inclusion, on en déduit $N_k \subset N_m$ et $I_m \subset I_k$ dès que $k \leqslant m$.

2. Une égalité suffit pour que tout s'arrête

Le pas suivant. Supposons $N_k = N_{k+1}$. L'inclusion $N_{k+1} \subset N_{k+2}$ est donnée par la question 1 ; montrons l'autre. Soit $x \in N_{k+2}$. Alors

$$0_E = f^{k+2}(x) = f^{k+1}(f(x)),$$

donc le vecteur $f(x)$ appartient à N_{k+1}. Par hypothèse $N_{k+1} = N_k$, donc $f(x) \in N_k$, c'est-à-dire $f^k(f(x)) = 0_E$, soit $f^{k+1}(x) = 0_E$. Ainsi $x \in N_{k+1}$, et $N_{k+2} \subset N_{k+1}$. Finalement $N_{k+1} = N_{k+2}$.
Tous les pas suivants. Pour $m \geqslant k$, notons $\mathcal{P}(m)$ la propriété « $N_m = N_{m+1}$ ». Elle est vraie pour $m = k$ par hypothèse, et le raisonnement précédent, mené avec m à la place de k, montre que $\mathcal{P}(m)$ entraîne $\mathcal{P}(m+1)$. Par récurrence, $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \geqslant k$, d'où la chaîne d'égalités

$$N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = \cdots,$$

c'est-à-dire $N_m = N_k$ pour tout $m \geqslant k$. □
Attention. Le point délicat est le choix du vecteur auquel on applique l'hypothèse. Celle-ci parle de N_k et N_{k+1}, alors que x est dans N_{k+2} : il faut l'appliquer non pas à x, mais à $f(x)$, qui « remonte » d'un cran. Appliquer l'hypothèse directement à x ne mène nulle part.

3. En dimension finie, la suite s'arrête forcément

a. On utilise le fait suivant, conséquence de la caractérisation des sous-espaces par leur dimension : **si $H \subset K$ sont deux sous-espaces d'un espace de dimension finie et si $H \neq K$, alors** $\dim H < \dim K$**.** En effet $\dim H \leqslant \dim K$, et l'égalité des dimensions, jointe à l'inclusion, forcerait $H = K$ (une base de H serait une famille libre de $\dim K$ vecteurs de K, donc une base de K).
Raisonnons par l'absurde, en supposant que $N_k \neq N_{k+1}$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. D'après la question 1 et le fait ci-dessus, on a alors $\dim N_k < \dim N_{k+1}$, donc $\dim N_{k+1} \geqslant \dim N_k + 1$, pour $k = 0, 1, \dots, n$. En ajoutant ces $n+1$ inégalités, et puisque $\dim N_0 = 0$,

$$\dim N_{n+1} \geqslant \dim N_0 + (n+1) = n+1.$$

Or N_{n+1} est un sous-espace de E, donc $\dim N_{n+1} \leqslant n$. Contradiction. Il existe donc un entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ tel que $N_k = N_{k+1}$, et l'ensemble de ces entiers, partie non vide de $\mathbb{N}$, a un plus petit élément p, qui vérifie $p \leqslant n$. □
b. *Les noyaux.* Pour $k < p$, on a $N_k \neq N_{k+1}$ par minimalité de p, et $N_k \subset N_{k+1}$: l'inclusion est stricte, et $\dim N_k < \dim N_{k+1}$. Pour $m \geqslant p$, la question 2 appliquée à l'entier p donne $N_m = N_p$. La suite des noyaux est donc strictement croissante jusqu'au rang p, puis constante :

$$N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_p = N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots$$

Les images. Le théorème du rang, appliqué à l'endomorphisme f^k de E, donne pour tout k

$$\dim I_k = n - \dim N_k.$$

Pour $k < p$, on a donc $\dim I_{k+1} = n - \dim N_{k+1} < n - \dim N_k = \dim I_k$: l'inclusion $I_{k+1} \subset I_k$ de la question 1 est stricte. Pour $m \geqslant p$, on a $\dim I_m = n - \dim N_m = n - \dim N_p = \dim I_p$, et $I_m \subset I_p$ d'après la question 1 : un sous-espace contenu dans un autre et de même dimension finie lui est égal, donc $I_m = I_p$. Ainsi

$$I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \cdots \supsetneq I_p = I_{p+1} = I_{p+2} = \cdots$$

Les deux suites deviennent stationnaires au **même** rang $p \leqslant n$. □
Attention. Le lien entre les deux suites passe entièrement par le théorème du rang, donc par la dimension finie. Sans elle, rien n'oblige les images à s'arrêter quand les noyaux s'arrêtent : pour la multiplication par X dans $\mathbb{R}[X]$ (exercice 24), tous les noyaux sont réduits à $\{0\}$, alors que les images $X^k\mathbb{R}[X]$ décroissent strictement indéfiniment.

4. Intersection nulle et noyau stable

Sens direct. Supposons $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\}$. L'inclusion $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$ est le cas $k = 1$ de la question 1. Soit $x \in \mathrm{Ker} f^2$. Le vecteur $y = f(x)$ appartient à $\mathrm{Im} f$, et $f(y) = f^2(x) = 0_E$, donc il appartient aussi à $\mathrm{Ker} f$. Il est dans l'intersection, donc $y = 0_E$, c'est-à-dire $f(x) = 0_E$: $x \in \mathrm{Ker} f$. Ainsi $\mathrm{Ker} f^2 \subset \mathrm{Ker} f$, et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
Sens réciproque. Supposons $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$. L'inclusion $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$ est vraie car ces deux sous-espaces contiennent 0_E. Soit $y \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$. Comme $y \in \mathrm{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; comme $y \in \mathrm{Ker} f$, on a $f^2(x) = f(y) = 0_E$. Donc $x \in \mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$, et $y = f(x) = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\}$. □
Cette équivalence ne demande aucune hypothèse de dimension. Elle dit, en termes de la question 3 : l'intersection $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$ est nulle si et seulement si la suite des noyaux est stationnaire dès le rang 1.

5. Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

a. *Les puissances.* Les deux premières lignes de A sont égales à $(1, -1, 1)$, la troisième vaut $(0, 0, 1)$. Pour la première ligne de A^2, on calcule les produits de $(1, -1, 1)$ par les colonnes de A :

$$\begin{aligned} 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 &= 0, \\ 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) + 1 \times 0 &= 0, \\ 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 &= 1. \end{aligned}$$

La deuxième ligne de A^2 est la même, puisque la deuxième ligne de A est la même. La troisième ligne, $(0, 0, 1)$, sélectionne la troisième ligne de A, soit $(0, 0, 1)$. Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $A^3 = A^2 A$, chaque ligne de A^2 vaut $(0, 0, 1)$ et sélectionne la troisième ligne de A, qui vaut $(0, 0, 1)$: donc $A^3 = A^2$. Par récurrence, $A^k = A^2$ pour tout $k \geqslant 2$: c'est vrai pour $k = 2$, et si $A^k = A^2$, alors $A^{k+1} = A^k A = A^2 A = A^3 = A^2$.
b. *Le noyau de u.* Un vecteur (x, y, z) est dans $\mathrm{Ker}\, u$ si et seulement si

$$\begin{cases} x - y + z = 0 & (L_1) \\ x - y + z = 0 & (L_2) \\ z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme la deuxième ligne en $0 = 0$, et il reste le système échelonné $x - y + z = 0$, $z = 0$, de pivots x et z, avec y libre. La remontée donne $z = 0$ puis $x = y - z = y$. Donc

$$\mathrm{Ker}\, u = \{\, (y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R} \,\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 0)), \qquad \dim \mathrm{Ker}\, u = 1.$$

L'image de u. Elle est engendrée par les colonnes de A, $(1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$ et $(1, 1, 1)$. La deuxième est l'opposée de la première, donc $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (1, 1, 1))$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (leurs troisièmes coordonnées sont 0 et 1, alors que les premières sont égales et non nulles), donc $\dim \mathrm{Im}\, u = 2$. Théorème du rang : $1 + 2 = 3$.
Le noyau et l'image de u^2. La matrice A^2 donne $u^2(x, y, z) = (z, z, z)$. Donc $u^2(x, y, z) = 0$ si et seulement si $z = 0$, et

$$\mathrm{Ker}\, u^2 = \{\, (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2), \qquad \dim \mathrm{Ker}\, u^2 = 2.$$

Les colonnes de A^2 sont $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$, donc $\mathrm{Im}\, u^2 = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$, de dimension 1. Théorème du rang : $2 + 1 = 3$.

Pour u^3. Comme $A^3 = A^2$, on a $u^3 = u^2$, donc $\operatorname{Ker} u^3 = \operatorname{Ker} u^2$ et $\operatorname{Im} u^3 = \operatorname{Im} u^2$.
Bilan. Les dimensions des noyaux successifs N_0, N_1, N_2, N_3 valent $0, 1, 2, 2$, et celles des images I_0, I_1, I_2, I_3 valent $3, 2, 1, 1$. Le premier rang où deux noyaux consécutifs coïncident est $p = 2$: on a $N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 = N_3$, et d'après la question 2, $N_k = N_2$ pour tout $k \geqslant 2$, ce que confirme $A^k = A^2$. On a bien $p = 2 \leqslant 3 = n$.
c. *Pour u.* On a $\operatorname{Ker} u \neq \operatorname{Ker} u^2$ (dimensions 1 et 2), donc la question 4 prévoit que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \neq \{0\}$. C'est le cas : le vecteur $(1, 1, 0)$ est dans $\operatorname{Ker} u$, et il est aussi dans $\operatorname{Im} u$, puisque c'est la première colonne de A, c'est-à-dire $u(e_1)$. On le vérifie : $u(1, 1, 0) = (1 - 1 + 0,\ 1 - 1 + 0,\ 0) = (0, 0, 0)$.
Pour u^2. Appliquons la question 4 à l'endomorphisme $v = u^2$. On a $\operatorname{Ker} v^2 = \operatorname{Ker} u^4 = \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} v$, puisque $A^4 = A^2$. La question 4 prévoit donc $\operatorname{Ker} u^2 \cap \operatorname{Im} u^2 = \{0\}$. Vérifions-le : un vecteur de $\operatorname{Im} u^2$ s'écrit $\lambda(1, 1, 1)$, et il appartient à $\operatorname{Ker} u^2$ si et seulement si sa troisième coordonnée λ est nulle, c'est-à-dire s'il est nul.

Commentaire

Les questions 1 et 2 valent dans n'importe quel espace ; c'est la dimension finie, à la question 3, qui force l'arrêt, par un argument de comptage : une suite strictement croissante d'entiers compris entre 0 et n a au plus $n+1$ termes. La borne $p \leqslant n$ est atteinte : pour l'endomorphisme w de $\mathbb{R}^3$ défini par $w(x, y, z) = (y, z, 0)$, on trouve $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Vect}(e_1)$, $\operatorname{Ker} w^2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ (car $w^2(x, y, z) = (z, 0, 0)$) et $w^3 = 0$, donc les dimensions valent $0, 1, 2, 3, 3, \ldots$ et $p = 3$.
Dans l'exemple de la question 5, au rang $p = 2$, le noyau $\operatorname{Ker} u^2$ (le plan $z = 0$) et l'image $\operatorname{Im} u^2$ (la droite dirigée par $(1, 1, 1)$) ont une intersection nulle et des dimensions de somme 3 : tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit alors de façon unique comme la somme d'un vecteur de l'un et d'un vecteur de l'autre, par exemple $(a, b, c) = (a - c, b - c, 0) + c(1, 1, 1)$. On dit que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u^2 \oplus \operatorname{Im} u^2$; selon les facs, cette notion de somme directe est vue dans ce chapitre ou en L2. C'est un phénomène général : au rang de stationnarité p, on a toujours $E = N_p \oplus I_p$, ce que la question 4, appliquée à f^p, permet de démontrer.

Exercice 27 ★ Écrire la matrice d'une application linéaire

Notions : Matrice d'une application linéaire dans des bases

Les trois parties sont indépendantes. Elles demandent le même geste dans trois espaces différents.

1. Une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ 3x - y + 4z).$$

a. Écrire la matrice F de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa taille ?

b. Calculer $f(2, 1, -1)$ par un produit matriciel, puis contrôler avec la formule de f.

2. Une application définie sur des polynômes. On considère

$$\psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(P) = (P(0),\ P(1),\ P'(0)).$$

a. Montrer que ψ est linéaire.

b. Écrire la matrice Ψ de ψ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Calculer $\psi(2 - 3X + 5X^2)$ par un produit matriciel, et contrôler par un calcul direct.

d. Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\psi(Q) = (1, 0, 2)$. Est-il unique ?

3. La transposition. On considère $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $T(M) = M^\top$, et la base $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où E_{ij} est la matrice dont le seul coefficient non nul vaut 1 et se trouve en ligne i, colonne j.

a. Justifier que T est linéaire, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$.

b. Calculer le carré de cette matrice. Était-ce prévisible ?

c. Retrouver la transposée de $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par un produit matriciel.

Corrigé

La règle, une fois pour toutes. Soit $u : E \to F$ linéaire, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F, de dimension n. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ a n lignes et p colonnes, et sa j-ième colonne contient les **coordonnées dans $\mathcal{C}$ de l'image** $u(b_j)$. On calcule donc les images des vecteurs de la base de départ, on les décompose dans la base d'arrivée, et on range ces coordonnées en colonnes. Toutes les questions qui suivent appliquent cette règle.

1. L'application f

a. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On calcule les images :

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 3), \qquad f(e_2) = (2, -1), \qquad f(e_3) = (-1, 4).$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les coordonnées d'un vecteur sont ses deux composantes. On range ces trois images en colonnes :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, $F \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$: autant de lignes que la dimension de l'espace d'**arrivée**, autant de colonnes que la dimension de l'espace de **départ**.
Attention. On remarque que la première ligne de F contient les coefficients de x, y, z dans la première composante $x+2y-z$, et la seconde ligne ceux de $3x-y+4z$. C'est un raccourci de lecture commode, mais il ne vaut que pour les bases canoniques. La définition, celle qui marche dans toutes les bases, est la règle des colonnes : colonne j égale aux coordonnées de l'image du j-ième vecteur de base. Écrire la matrice « à l'envers », avec les images en lignes, donnerait ici une matrice 3×2, ce qui suffit à détecter l'erreur.

b. Les coordonnées de $(2,1,-1)$ dans la base canonique forment la colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et l'on multiplie :

$$F\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times 1 + (-1)\times(-1) \\ 3\times 2 + (-1)\times 1 + 4\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $f(2,1,-1) = (5,1)$. Contrôle avec la formule : $x+2y-z = 2+2+1 = 5$ et $3x-y+4z = 6-1-4 = 1$. Les deux calculs concordent.

2. L'application ψ

a. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'évaluation en un point et la dérivation sont compatibles avec les combinaisons linéaires : $(\lambda P+Q)(0) = \lambda P(0)+Q(0)$, de même en 1, et $(\lambda P+Q)' = \lambda P'+Q'$, donc $(\lambda P+Q)'(0) = \lambda P'(0)+Q'(0)$. Composante par composante, on obtient

$$\psi(\lambda P + Q) = \lambda\psi(P) + \psi(Q).$$

L'application ψ est linéaire.
b. On calcule l'image de chacun des trois polynômes de la base, en se souvenant que la dérivée de 1 est nulle, celle de X vaut 1 et celle de X^2 vaut $2X$:

- $\psi(1) = (1,1,0)$;
- $\psi(X) = (0,1,1)$;
- $\psi(X^2) = (0,1,0)$, puisque $(X^2)' = 2X$ s'annule en 0.

En rangeant ces images en colonnes :

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour $P = a+bX+cX^2$, on a $P(0) = a$, $P(1) = a+b+c$ et $P'(0) = b$, et l'on retrouve bien les trois lignes de Ψ.
c. Les coordonnées de $2-3X+5X^2$ dans la base $(1, X, X^2)$ sont $(2,-3,5)$. Le produit donne

$$\Psi\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2-3+5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

donc $\psi(2-3X+5X^2) = (2,4,-3)$. Contrôle direct avec $P = 2-3X+5X^2$: $P(0) = 2$, $P(1) = 2-3+5 = 4$, et $P' = -3+10X$ donne $P'(0) = -3$.
Attention. Le produit par Ψ ne porte pas sur « le polynôme » mais sur la colonne de ses **coordonnées**. Une matrice agit sur des coordonnées ; c'est le choix de la base qui fait le lien entre le vecteur et sa colonne.

d. Cherchons $Q = a + bX + cX^2$. D'après la question b, la condition $\psi(Q) = (1, 0, 2)$ s'écrit

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b + c = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

La première et la troisième équation donnent $a = 1$ et $b = 2$, puis la deuxième donne $c = -a - b = -3$. Le système a une **unique** solution, donc il existe un unique polynôme qui convient :

$$Q = 1 + 2X - 3X^2.$$

Vérification : $Q(0) = 1$, $Q(1) = 1 + 2 - 3 = 0$, et $Q' = 2 - 6X$ donne $Q'(0) = 2$.

3. La transposition

a. *Linéarité.* Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après les règles de calcul sur la transposée, $(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top$, c'est-à-dire $T(\lambda M + N) = \lambda T(M) + T(N)$. L'application T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Coordonnées dans $\mathcal{B}$. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'écrit $M = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$: ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont (a, b, c, d), lues ligne par ligne, **dans l'ordre fixé par la base**.

Images des vecteurs de base. Transposer échange la ligne et la colonne du coefficient non nul :

$$T(E_{11}) = E_{11}, \qquad T(E_{12}) = E_{21}, \qquad T(E_{21}) = E_{12}, \qquad T(E_{22}) = E_{22}.$$

Les coordonnées de E_{21} dans $\mathcal{B}$ sont $(0, 0, 1, 0)$, celles de E_{12} sont $(0, 1, 0, 0)$. En rangeant les quatre images en colonnes :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice 4×4 : l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4, même si ses éléments s'écrivent en carrés 2×2.

b. Notons $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$. Multiplier à gauche par S échange les deuxième et troisième lignes ; appliqué à S elle-même, cela remet ses lignes 2 et 3 dans l'ordre, donc

$$S^2 = I_4.$$

C'était prévisible : $(M^\top)^\top = M$ pour toute matrice M, donc $T \circ T = \mathrm{id}$, et la matrice d'une composée est le produit des matrices, d'où $S^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T \circ T) = I_4$.

c. Les coordonnées de M_0 dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 2, 3, 4)$, et

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On relit cette colonne dans la base $\mathcal{B}$: $1 \cdot E_{11} + 3E_{12} + 2E_{21} + 4E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, qui est bien $M_0^\top$.

Attention. L'ordre des vecteurs dans la base fait partie de la base. Dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$, la colonne $(1, 2, 3, 4)$ ne représenterait plus M_0 mais $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$: une même colonne désigne des vecteurs différents selon la base. Toujours écrire la base utilisée avant d'écrire une matrice ou une colonne de coordonnées.

Commentaire

Les trois parties montrent que la matrice d'une application linéaire ne dépend pas de la nature des objets : vecteurs de $\mathbb{R}^3$, polynômes ou matrices, on fait toujours la même chose, images des vecteurs de la base de départ, coordonnées dans la base d'arrivée, rangement en colonnes. Le travail délicat est en amont : savoir lire les coordonnées d'un polynôme ou d'une matrice dans la base choisie. Une fois cette traduction faite, tout calcul sur ψ ou sur T devient un calcul de produit matriciel, comme on l'a vu en résolvant $\psi(Q) = (1, 0, 2)$ par un simple système.

Exercice 28 ★★ Une application définie sur une base

Notions : Matrice d'une application linéaire dans des bases, Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(e_1) = (1,0,1), \qquad f(e_2) = (0,1,1), \qquad f(e_3) = (1,1,2).$$

a. Pourquoi ces trois conditions définissent-elles une application linéaire, et une seule ? Écrire sa matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

b. Calculer $f(2,-1,3)$, puis $f(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque.

c. Déterminer une base du noyau de f. L'application f est-elle injective ? Quel est son rang ?

2. On pose $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. En déduire qu'il existe une unique application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$g(u_1) = (1,1,0), \qquad g(u_2) = (2,1,1), \qquad g(u_3) = (2,2,2).$$

c. Exprimer e_1, e_2, e_3 à l'aide de u_1, u_2, u_3, et en déduire la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont $g(u_1)$, $g(u_2)$, $g(u_3)$ est-elle la matrice de g dans la base canonique ?

3. Calculer la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{C}$ et vérifier le résultat sur le vecteur $(2,-1,3)$. Calculer aussi AB : que représente ce produit ?

Corrigé

1. L'endomorphisme f

a. Le cours donne le résultat suivant : si $(b_1, \dots, b_p)$ est une base de E et $(w_1, \dots, w_p)$ une famille **quelconque** de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que $u(b_j) = w_j$ pour tout j. L'unicité vient de ce que tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_j x_j b_j$, ce qui force $u(x) = \sum_j x_j w_j$ par linéarité ; l'existence vient de ce que cette formule définit bien une application linéaire, les coordonnées x_j étant uniques et dépendant linéairement de x.
Ici (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et l'on impose les images des trois vecteurs : f existe et est unique. Sa matrice s'obtient en rangeant les images en colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Par produit matriciel :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+3 \\ 0-1+3 \\ 2-1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

donc $f(2,-1,3) = (5,2,7)$. On peut le contrôler par linéarité : $f(2,-1,3) = 2f(e_1) - f(e_2) + 3f(e_3) = (2,0,2) - (0,1,1) + (3,3,6) = (5,2,7)$.
De même, pour (x,y,z) quelconque, $f(x,y,z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$, c'est-à-dire

$$f(x,y,z) = (x+z,\ y+z,\ x+y+2z).$$

c. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f$ si et seulement si

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1.$$

La troisième ligne est devenue égale à la deuxième : il reste deux équations, $x=-z$ et $y=-z$, avec z libre. Donc

$$\mathrm{Ker} f = \{(-z,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,-1)).$$

Le vecteur $(1,1,-1)$ est non nul, il forme donc à lui seul une famille libre : c'est une base du noyau. Vérification : $f(1,1,-1) = (1-1,\ 1-1,\ 1+1-2) = (0,0,0)$.
Le noyau n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc f **n'est pas injective**. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg} f = 3 - \dim \mathrm{Ker} f = 3 - 1 = 2$.
On pouvait le voir sur les données : $f(e_3) = (1,1,2) = f(e_1) + f(e_2)$, donc $f(e_1 + e_2 - e_3) = 0$ par linéarité. C'est exactement le vecteur $(1,1,-1)$ trouvé.

2. L'application g, définie sur une base non canonique

a. Soient a,b,c des réels tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $a=b=c=0$. Composante par composante, la relation s'écrit

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Le système est déjà triangulaire. On remonte : $c=0$, puis $b=-c=0$, puis $a=-b-c=0$. La famille (u_1,u_2,u_3) est donc libre. C'est une famille libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3 : c'est une base.
b. C'est le même théorème qu'en 1.a, appliqué cette fois à la base $\mathcal{B}'$: on peut prescrire librement les images des vecteurs d'une base, et une seule application linéaire réalise ce choix. Il est essentiel que $\mathcal{B}'$ soit une **base** : si la famille était liée, les images imposées pourraient être incompatibles avec la linéarité ; si elle n'était pas génératrice, l'application ne serait pas déterminée partout.
c. *Les vecteurs canoniques dans $\mathcal{B}'$.* On lit sur les définitions que $u_1 = e_1$, $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Par différences successives :

$$e_1 = u_1, \qquad e_2 = u_2 - u_1, \qquad e_3 = u_3 - u_2.$$

Images des vecteurs canoniques. Par linéarité de g :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= g(u_1) = (1,1,0), \\ g(e_2) &= g(u_2) - g(u_1) = (2,1,1) - (1,1,0) = (1,0,1), \\ g(e_3) &= g(u_3) - g(u_2) = (2,2,2) - (2,1,1) = (0,1,1). \end{aligned}$$

En rangeant ces images en colonnes :

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification sur $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$:

$$B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},$$

qui sont bien $g(u_2)$ et $g(u_3)$.

La matrice proposée. Non, la matrice $\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ n'est pas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)$, puisqu'elle diffère de B. Ses colonnes sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}'$, écrites dans la base canonique : c'est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(g)$, avec $\mathcal{B}'$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée. Elle agit sur les coordonnées **dans** $\mathcal{B}'$ d'un vecteur, et non sur ses composantes.

Attention. C'est l'erreur la plus fréquente sur ce type de question. Ranger les vecteurs $g(u_j)$ en colonnes ne donne la matrice de g dans la base canonique que si les u_j sont les vecteurs canoniques. Dans tout autre cas, il faut d'abord exprimer les e_j à l'aide des u_j, comme ci-dessus, ou passer par une matrice de passage.

3. La composée $g \circ f$

Le produit. La matrice d'une composée est le produit des matrices, **dans le même ordre** que la composée : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = BA$. Calculons-le ligne par colonne :

$$BA = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient en ligne 2, colonne 3 vaut $1\times 1 + 0\times 1 + 1\times 2 = 3$.

Vérification sur $(2,-1,3)$. Par la question 1.b, $f(2,-1,3) = (5,2,7)$, puis

$$g(5,2,7) = B\begin{pmatrix}5\\2\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+2\\5+7\\2+7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\12\\9\end{pmatrix}.$$

Et directement :

$$BA\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1+6\\4-1+9\\2-2+9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\12\\9\end{pmatrix}.$$

Les deux chemins donnent $(g \circ f)(2,-1,3) = (7,12,9)$.

Le produit dans l'autre ordre.

$$AB = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\\2&3&3\end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de $f \circ g$, une autre application : $AB \neq BA$. Sur le même vecteur, $AB\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\\10\end{pmatrix}$, qui n'est pas $(7,12,9)$.

Attention. Dans $g \circ f$, on applique d'abord f puis g, et la matrice de f est **à droite**, au contact de la colonne X sur laquelle elle agit en premier : $(BA)X = B(AX)$. Écrire AB pour $g \circ f$ revient à appliquer les deux applications dans le mauvais ordre.

Une dernière observation relie les questions 1 et 3. Comme $f(1,1,-1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, on a aussi $(g \circ f)(1,1,-1) = g(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$, et l'on contrôle en effet que

$$BA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-2 \\ 2+1-3 \\ 1+2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

le noyau de f est contenu dans celui de $g \circ f$.

Commentaire

L'exercice repose sur un seul théorème, employé deux fois : une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base, et ces images peuvent être choisies sans contrainte. Avec la base canonique, la matrice se lit immédiatement. Avec une autre base, les images données ne sont pas les colonnes cherchées, et il faut un calcul intermédiaire pour revenir aux vecteurs canoniques. Ce calcul est ici facile parce que u_1, u_2, u_3 s'obtiennent par sommes successives ; dans le cas général, il se fait avec la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}'$, ce que les exercices suivants installent.

Exercice 29 ★★ Changer de base pour calculer des puissances

Notions : Matrice de passage et formules de changement de base, Matrice d'une application linéaire dans des bases

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$. On pose

$$u_1 = (1,0,1), \qquad u_2 = (1,1,1), \qquad u_3 = (0,1,1).$$

1. Écrire la matrice P dont les colonnes sont les coordonnées de u_1, u_2, u_3 dans $\mathcal{C}$. Montrer par la méthode de Gauss-Jordan que P est inversible et calculer P^{-1}. En déduire que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et que $P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}'}$.

2. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$, et en déduire, sans autre calcul, la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Vérifier ce résultat en calculant $P^{-1}AP$.

3. Montrer que $A = PA'P^{-1}$, puis que $A^n = PA'^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

4. En déduire l'expression explicite de A^n en fonction de n. Contrôler le résultat pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, en calculant A^2 directement.

Corrigé

1. La matrice P et son inverse

Les colonnes de P sont les composantes de u_1, u_2, u_3 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gauss-Jordan. On écrit P à gauche et I_3 à droite, et l'on fait sur les lignes des deux blocs les mêmes opérations, jusqu'à obtenir I_3 à gauche :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On annule d'abord le coefficient en bas à gauche, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Le bloc de gauche est triangulaire avec des pivots égaux à 1, tous non nuls : P est **inversible**. On remonte pour faire apparaître des zéros au-dessus des pivots. D'abord $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Le bloc de droite est l'inverse cherché :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification. Calculons PP^{-1} ligne par colonne. Première ligne de P, $(1,1,0)$, contre les trois colonnes de P^{-1} : $0+1+0=1$, puis $-1+1+0=0$, puis $1-1+0=0$. On procède de même pour les deux autres lignes, et l'on obtient

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Conséquence. Une matrice carrée est inversible si et seulement si ses colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$. Les colonnes de P sont les coordonnées de u_1, u_2, u_3 : la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Et par définition, la matrice de passage $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}'}$ est celle dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{C}$: c'est exactement P.

2. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$

On calcule l'image de chaque vecteur de $\mathcal{B}'$ par produit matriciel :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0-1 \\ -1+0+1 \\ -1+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1-1 \\ -1+2+1 \\ -1+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-1 \\ 0+2+1 \\ 0+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$f(u_1) = u_1, \qquad f(u_2) = 2u_2, \qquad f(u_3) = 3u_3.$$

Lecture de A'. La j-ième colonne de $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ contient les coordonnées de $f(u_j)$ **dans la base** $\mathcal{B}'$. Or $f(u_1) = 1\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 0\cdot u_3$ a pour coordonnées $(1,0,0)$, $f(u_2)$ a pour coordonnées $(0,2,0)$ et $f(u_3)$ a pour coordonnées $(0,0,3)$. Donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans la base $\mathcal{B}'$, l'endomorphisme f agit de la façon la plus simple qui soit : il multiplie chaque vecteur de base par un nombre.
Vérification par la formule de changement de base. La formule du cours s'écrit $A' = P^{-1}AP$. Le produit AP a pour colonnes Au_1, Au_2, Au_3, déjà calculées :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On multiplie à gauche par P^{-1} :

$$P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Détaillons une ligne : la deuxième ligne de P^{-1}, $(1, 1, -1)$, donne contre les trois colonnes de AP les coefficients $1 + 0 - 1 = 0$, puis $2 + 2 - 2 = 2$, puis $0 + 3 - 3 = 0$. On retrouve bien A'.
Attention. La formule est $A' = P^{-1}AP$, avec P^{-1} à gauche, et non PAP^{-1}. Pour ne pas se tromper, on peut la relire de droite à gauche sur une colonne X' de coordonnées dans $\mathcal{B}'$: P la convertit en coordonnées canoniques, A applique f, puis P^{-1} reconvertit le résultat dans $\mathcal{B}'$.

3. Les puissances de A

La relation $A = PA'P^{-1}$. On part de $A' = P^{-1}AP$ et l'on multiplie à gauche par P, à droite par P^{-1} :

$$PA'P^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = (PP^{-1})A(PP^{-1}) = I_3\, A\, I_3 = A.$$

La relation $A^n = PA'^nP^{-1}$, par récurrence sur $n \geqslant 0$. Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ et $PA'^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$: la propriété est vraie. Soit $n \geqslant 0$ tel que $A^n = PA'^nP^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = A^nA = (PA'^nP^{-1})(PA'P^{-1}) = PA'^n(P^{-1}P)A'P^{-1} = PA'^{n+1}P^{-1},$$

puisque $P^{-1}P = I_3$. La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.
Les facteurs $P^{-1}P$ intermédiaires se simplifient deux à deux : c'est tout l'intérêt de l'écriture.
Attention. On n'écrit pas $(PA'P^{-1})^n = P^nA'^nP^{-n}$. Le produit matriciel n'est pas commutatif, on ne peut pas regrouper les facteurs P entre eux. La simplification vient uniquement des paires $P^{-1}P$ qui se trouvent côte à côte.

4. L'expression explicite de A^n

Les puissances de A'. Une matrice diagonale se met à la puissance coefficient par coefficient : le produit de deux matrices diagonales est la matrice diagonale des produits, donc par récurrence

$$A'^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Le produit PA'^n. Multiplier à droite par une matrice diagonale multiplie chaque colonne par le coefficient diagonal correspondant :

$$PA'^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 3^n \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix}.$$

Le produit par P^{-1}. On multiplie chaque ligne de PA'^n par les colonnes $(0, 1, -1)$, $(-1, 1, 0)$ et $(1, -1, 1)$ de P^{-1}.

- Ligne $(1, 2^n, 0)$: on obtient 2^n, puis $-1 + 2^n$, puis $1 - 2^n$.
- Ligne $(0, 2^n, 3^n)$: on obtient $2^n - 3^n$, puis 2^n, puis $-2^n + 3^n$.
- Ligne $(1, 2^n, 3^n)$: on obtient $2^n - 3^n$, puis $-1 + 2^n$, puis $1 - 2^n + 3^n$.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 2^n - 3^n & 2^n & 3^n - 2^n \\ 2^n - 3^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n + 3^n \end{pmatrix}.$$

Contrôle pour $n = 0$. On remplace 2^0 et 3^0 par 1 : la première ligne devient $(1, 0, 0)$, la deuxième $(0, 1, 0)$, la troisième $(0, 0, 1 - 1 + 1) = (0, 0, 1)$. On retrouve $I_3 = A^0$.
Contrôle pour $n = 1$. On remplace 2^1 par 2 et 3^1 par 3 : la première ligne devient $(2, 1, -1)$, la deuxième $(-1, 2, 1)$, la troisième $(-1, 1, 1 - 2 + 3) = (-1, 1, 2)$. On retrouve A.
Contrôle pour $n = 2$. La formule donne, avec $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -5 & 4 & 5 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculons A^2 directement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -5 & 4 & 5 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient en ligne 3, colonne 3 vaut $(-1) \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times 2 = 6$, et celui en ligne 2, colonne 1 vaut $(-1) \times 2 + 2 \times (-1) + 1 \times (-1) = -5$. Les deux calculs concordent.

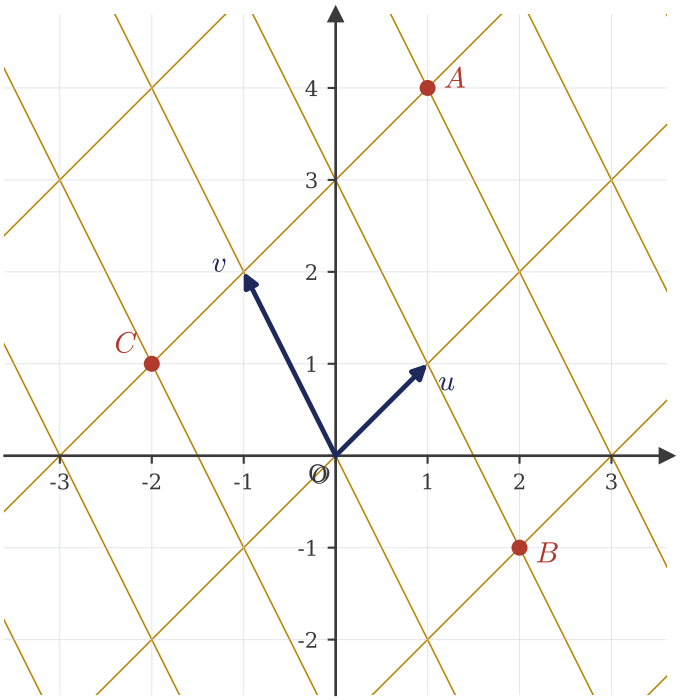
Commentaire

Calculer A^n directement est sans espoir : les coefficients de A^2, A^3, A^4 ne laissent deviner aucune formule. Le changement de base remplace ce problème par un problème trivial, les puissances d'une matrice diagonale, au prix de trois produits matriciels. Toute la difficulté a été évacuée dans le choix de la base $\mathcal{B}'$, qui était **donnée** par l'énoncé. Comment trouver une telle base, et savoir si elle existe, est précisément l'objet de la réduction des endomorphismes, étudiée en L2 : on sait seulement ici l'exploiter une fois qu'on la tient.
On notera aussi le rôle des contrôles. Le cas $n = 0$ et le cas $n = 1$ ne coûtent rien et détectent presque toutes les erreurs de produit ; le cas $n = 2$, qui demande un calcul indépendant de la formule, est le seul qui teste vraiment le passage par P^{-1}.

Exercice 30 ★ Coordonnées dans deux bases

Notions : Matrice de passage et formules de changement de base, Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète

Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$, on considère les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (-1, 2)$. La figure représente, tracés depuis l'origine O, les vecteurs u et v, la grille oblique formée par les droites $O + su + tv$ où s ou t est entier, et en fond très clair la grille canonique. Trois points A, B, C y sont placés.



1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Lire sur la grille oblique les coordonnées de A, B et C dans la base $\mathcal{B}'$ (on identifie un point M au vecteur $\overrightarrow{OM}$).

3. Écrire la matrice de passage $P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}'}$. En déduire, par la formule $X = PX'$, les coordonnées canoniques de A, B et C, et contrôler sur la grille canonique.

4. On considère le point $W = (3, 0)$, qui n'est pas tracé. Calculer P^{-1}, puis les coordonnées de W dans $\mathcal{B}'$. Vérifier le résultat, puis placer W sur la figure.

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 0)$, $\varepsilon_2 = (1, 0, 1)$ et $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$, et $\mathcal{B}'' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

a. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre par le pivot le système qui donne les réels α, β, γ tels que $(a, b, c) = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3$. En déduire que $\mathcal{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire $Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}''}$ et Q^{-1}.

b. Le vecteur x a pour coordonnées $(2, -1, 3)$ dans $\mathcal{B}''$. Quelles sont ses composantes ?

c. Quelles sont les coordonnées de $(5, 3, 4)$ dans $\mathcal{B}''$?

Corrigé

1. La base $\mathcal{B}'$

Les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (-1, 2)$ ne sont pas colinéaires : si l'on avait $v = \lambda u$, la première composante donnerait $\lambda = -1$ et la seconde $\lambda = 2$, ce qui est contradictoire, et u n'est pas nul. En dimension 2, deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, et une famille libre de 2 vecteurs dans un espace de dimension 2 est une base. Donc $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
On peut aussi invoquer le critère des matrices 2×2 : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ des composantes de u et v en colonnes a pour $ad - bc$ la valeur $1 \times 2 - (-1) \times 1 = 3 \neq 0$, elle est inversible.

2. Lecture sur la grille oblique

Dire que M a pour coordonnées (s, t) dans $\mathcal{B}'$, c'est dire que $\overrightarrow{OM} = su + tv$: depuis O, on fait s pas dans la direction de u, puis t pas dans la direction de v. Sur la grille oblique, cela revient à compter les mailles parallèlement à u, puis parallèlement à v.

- Pour atteindre A, on fait deux pas selon u, puis un pas selon v : $\overrightarrow{OA} = 2u+v$, coordonnées $(2, 1)$ dans $\mathcal{B}'$.
- Pour atteindre B, un pas selon u, puis un pas **en arrière** selon v : $\overrightarrow{OB} = u-v$, coordonnées $(1, -1)$.
- Pour atteindre C, un pas en arrière selon u, puis un pas selon v : $\overrightarrow{OC} = -u+v$, coordonnées $(-1, 1)$.

On remarque que $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB}$: les points B et C sont symétriques par rapport à O, ce que la figure confirme.
Attention. Les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ ne se lisent pas sur la grille canonique tracée en fond. Le point A est à une unité de l'axe vertical sur cette grille, alors que sa première coordonnée dans $\mathcal{B}'$ vaut 2. On suit les lignes de la grille oblique, qui sont parallèles à u et à v : s et t se comptent comme sur un quadrillage ordinaire, mais déformé.

3. La matrice de passage et les coordonnées canoniques

Par définition, les colonnes de $P = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}'}$ sont les coordonnées dans l'**ancienne** base $\mathcal{C}$ des vecteurs de la **nouvelle** base $\mathcal{B}'$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La formule $X = PX'$ relie la colonne X des coordonnées dans $\mathcal{C}$ et la colonne X' des coordonnées dans $\mathcal{B}'$. Appliquons-la aux trois points :

$$P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad P \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$P \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $A = (1, 4)$, $B = (2, -1)$ et $C = (-2, 1)$. Sur la grille canonique, A est bien une unité à droite de l'axe vertical et quatre unités au-dessus de l'axe horizontal, et de même pour B et C. Ce calcul n'est rien d'autre que $2u + v = (2, 2) + (-1, 2) = (1, 4)$, écrit sous forme matricielle : la formule $X = PX'$ fait la combinaison linéaire des colonnes de P avec les coefficients X'.
Attention. La matrice $P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}'}$ s'appelle « de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}'$ », mais la formule $X = PX'$ calcule les **anciennes** coordonnées à partir des **nouvelles**. C'est le sens naturel, puisque les colonnes de P décrivent les nouveaux vecteurs dans l'ancienne base. Pour aller dans l'autre sens, il faut P^{-1} : c'est la question suivante.

4. Le point W et la matrice P^{-1}

Calcul de P^{-1}. Pour une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $ad - bc \neq 0$, le cours donne

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ici $ad - bc = 3$, donc

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : $PP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+1 & 1-1 \\ 2-2 & 1+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = I_2$.
Coordonnées de W. De $X = PX'$, on tire $X' = P^{-1}X$ en multipliant à gauche par P^{-1}. Pour $W = (3, 0)$:

$$X' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le point W a pour coordonnées $(2, -1)$ dans $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OW} = 2u - v$.
Vérification. $2u - v = (2, 2) - (-1, 2) = (3, 0)$. C'est bien W.
Sur la figure. On place W grâce à la grille canonique, trois unités à droite de O, sur la ligne horizontale qui passe par O. On constate qu'il tombe sur un nœud de la grille oblique, atteint depuis O par deux pas selon u puis un pas en arrière selon v : la lecture confirme le calcul. On peut aussi contrôler les coordonnées de A par P^{-1} : $\frac{1}{3}(2 \times 1 + 4,\ -1 + 4) = (2, 1)$.

5. Un changement de base dans $\mathbb{R}^3$

a. L'égalité $(a, b, c) = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3$ s'écrit, composante par composante :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha + \gamma = b \\ \beta + \gamma = c \end{cases}$$

On élimine α de la deuxième équation, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ -\beta + \gamma = b - a \\ \beta + \gamma = c \end{cases}$$

puis β de la troisième, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ -\beta + \gamma = b - a \\ 2\gamma = -a + b + c \end{cases}$$

Le système est triangulaire, avec trois pivots non nuls. On remonte :

$$\gamma = \frac{-a + b + c}{2},$$

$$\beta = \gamma - (b - a) = \frac{-a + b + c - 2b + 2a}{2} = \frac{a - b + c}{2},$$

$$\alpha = a - \beta = \frac{2a - a + b - c}{2} = \frac{a + b - c}{2}.$$

Vérification de la première composante : $\alpha+\beta=\dfrac{(a+b-c)+(a-b+c)}{2}=a$, et de même pour les deux autres.
Conséquence. Pour **tout** (a,b,c), le système a une solution, et une seule. L'existence dit que $\mathcal{B}''$ est génératrice, l'unicité (appliquée à $(a,b,c)=(0,0,0)$, qui donne $\alpha=\beta=\gamma=0$) dit qu'elle est libre : $\mathcal{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Les deux matrices. La matrice de passage a pour colonnes les composantes de ε_1, ε_2, ε_3 :

$$Q=P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}''}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Les formules obtenues expriment les nouvelles coordonnées (α,β,γ) en fonction des anciennes (a,b,c) : c'est la relation $X'=Q^{-1}X$, et on lit Q^{-1} sur les coefficients de a, b, c :

$$Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

Résoudre le système pour un second membre quelconque, c'est donc exactement inverser la matrice de passage.
b. La colonne $X'=(2,-1,3)$ donne les composantes par $X=QX'$:

$$Q\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1+0\\2+0+3\\0-1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}.$$

Donc $x=(1,5,2)$. Contrôle : $2\varepsilon_1-\varepsilon_2+3\varepsilon_3=(2,2,0)-(1,0,1)+(0,3,3)=(1,5,2)$.
c. Avec $(a,b,c)=(5,3,4)$, les formules de la question a donnent

$$\alpha=\frac{5+3-4}{2}=2,\qquad \beta=\frac{5-3+4}{2}=3,\qquad \gamma=\frac{-5+3+4}{2}=1.$$

Les coordonnées de $(5,3,4)$ dans $\mathcal{B}''$ sont $(2,3,1)$. Contrôle en réinjectant : $2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3=(2,2,0)+(3,0,3)+(0,1,1)=(5,3,4)$.

Commentaire

Un même vecteur a autant de colonnes de coordonnées que de bases : W s'écrit $(3,0)$ dans $\mathcal{C}$ et $(2,-1)$ dans $\mathcal{B}'$, et ces deux colonnes désignent le même point de la figure. La matrice de passage est l'outil qui traduit l'une en l'autre. Elle se construit sans calcul, à partir des nouveaux vecteurs écrits dans l'ancienne base, et elle traduit dans le sens « nouvelles coordonnées vers anciennes ». Le sens inverse, celui dont on a le plus souvent besoin, coûte une inversion : une formule en dimension 2, un système en dimension 3.

Exercice 31 ★★ Somme directe et projection dans l'espace

Notions : Somme directe, supplémentaires, projecteurs et symétries

Selon les facs, la somme directe, les sous-espaces supplémentaires et les projecteurs sont vus en L1 ou repoussés en L2 ; ils sont traités dans ce chapitre.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan Π d'équation $x+y+z=0$ et la droite $D=\mathrm{Vect}(d)$, où $d=(1,2,3)$.

1. Donner une base de Π. Le vecteur d appartient-il à Π ?

2. Soit $w=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique couple $(w_\Pi, w_D)\in \Pi\times D$ tel que $w=w_\Pi+w_D$, et donner w_Π et w_D en fonction de a, b, c. En déduire que $\mathbb{R}^3=\Pi\oplus D$. Retrouver ce résultat à l'aide des dimensions.

3. Décomposer le vecteur $w_0=(1,0,5)$.

4. On note p la projection sur Π parallèlement à D, c'est-à-dire l'application $w\mapsto w_\Pi$. Écrire la matrice M_p de p dans la base canonique et vérifier que $M_p^2=M_p$. Que valent $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$?

5. On note s la symétrie par rapport à Π parallèlement à D, définie par $s(w)=w_\Pi-w_D$. Exprimer s à l'aide de p, écrire sa matrice M_s dans la base canonique, vérifier que $M_s^2=I_3$ et calculer $s(w_0)$.

6. Écrire les matrices de p et de s dans une base de $\mathbb{R}^3$ formée d'une base de Π suivie de d. Pourquoi ces matrices s'obtiennent-elles sans calcul ?

7. On remplace D par la droite $D'=\mathrm{Vect}((1,0,0))$, qui est aussi un supplémentaire de Π. Calculer le projeté de w_0 sur Π parallèlement à D'. Que peut-on en conclure ?

Corrigé

1. Une base du plan Π

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a $(x,y,z)\in\Pi$ si et seulement si $x=-y-z$, c'est-à-dire si et seulement si

$$(x,y,z)=(-y-z,\ y,\ z)=y(-1,1,0)+z(-1,0,1),\qquad y,z\in\mathbb{R}.$$

Donc $\Pi=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ avec $v_1=(-1,1,0)$ et $v_2=(-1,0,1)$. La famille (v_1,v_2) est génératrice de Π. Elle est libre : si $\alpha v_1+\beta v_2=0_{\mathbb{R}^3}$, alors $(-\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta)=(0,0,0)$, et les deux dernières composantes donnent $\alpha=\beta=0$. C'est une base de Π, qui est donc de dimension 2.
Le vecteur $d=(1,2,3)$ vérifie $1+2+3=6\neq 0$: il n'appartient pas à Π.

2. Décomposition d'un vecteur quelconque

On raisonne par **analyse et synthèse**.
Analyse. Supposons $w=w_\Pi+w_D$ avec $w_\Pi\in\Pi$ et $w_D\in D$. Comme $w_D\in D$, il existe un réel λ tel que $w_D=\lambda d=(\lambda,2\lambda,3\lambda)$, et alors

$$w_\Pi=w-\lambda d=(a-\lambda,\ b-2\lambda,\ c-3\lambda).$$

La condition $w_\Pi\in\Pi$ s'écrit $(a-\lambda)+(b-2\lambda)+(c-3\lambda)=0$, soit $a+b+c-6\lambda=0$, et donc nécessairement

$$\lambda=\frac{a+b+c}{6}.$$

Le réel λ est imposé, donc $w_D=\lambda d$ et $w_\Pi=w-\lambda d$ aussi : **si** une décomposition existe, elle est unique.
Synthèse. Posons $\lambda=\dfrac{a+b+c}{6}$, $w_D=\lambda d$ et $w_\Pi=w-\lambda d$. Alors $w_D\in D$, $w_\Pi+w_D=w$, et la somme des composantes de w_Π vaut $a+b+c-6\lambda=0$, donc $w_\Pi\in\Pi$. La décomposition **existe**.

Explicitement :

$$w_D = \frac{a+b+c}{6}(1,2,3), \qquad w_\Pi = (a,b,c) - \frac{a+b+c}{6}(1,2,3).$$

Conclusion. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de Π et d'un vecteur de D : c'est la définition de $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$. On dit que Π et D sont **supplémentaires** dans $\mathbb{R}^3$.
Par les dimensions. Le cours donne une autre caractérisation en dimension finie : $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. Ici, soit $w \in \Pi \cap D$: on a $w = \lambda d = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$ et $\lambda + 2\lambda + 3\lambda = 0$, donc $6\lambda = 0$, $\lambda = 0$ et $w = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi $\Pi \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, et $\dim \Pi + \dim D = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. On retrouve $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$.
Attention. L'intersection réduite à $\{0_E\}$ ne suffit pas seule : deux droites distinctes de $\mathbb{R}^3$ ont une intersection nulle sans être supplémentaires, leur somme n'étant qu'un plan. La condition sur les dimensions est indispensable.

3. Décomposition de $w_0 = (1, 0, 5)$

Ici $a + b + c = 6$, donc $\lambda = 1$, puis

$$w_D = (1,2,3), \qquad w_\Pi = (1,0,5) - (1,2,3) = (0,-2,2).$$

Contrôle : $0 - 2 + 2 = 0$, donc $w_\Pi \in \Pi$, et $(0,-2,2) + (1,2,3) = (1,0,5)$.

4. La matrice de la projection p

Expression de p. D'après la question 2, $p(a,b,c) = w_\Pi = (a,b,c) - \dfrac{a+b+c}{6}(1,2,3)$, soit

$$p(a,b,c) = \frac{1}{6}(5a - b - c,\ -2a + 4b - 2c,\ -3a - 3b + 3c).$$

Par exemple la première composante vaut $a - \dfrac{a+b+c}{6} = \dfrac{6a - a - b - c}{6}$. Cette formule montre au passage que p est linéaire.
Matrice. On lit les coefficients de a, b, c ligne par ligne :

$$M_p = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On peut contrôler une colonne : $p(e_1) = (1,0,0) - \dfrac{1}{6}(1,2,3) = \dfrac{1}{6}(5,-2,-3)$, qui est bien la première colonne.
Vérification de $M_p^2 = M_p$. Posons $R = 6M_p$, la matrice à coefficients entiers. Alors $M_p^2 = \dfrac{1}{36}R^2$, et il s'agit de montrer que $R^2 = 6R$. On calcule :

$$R^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -6 & -6 \\ -12 & 24 & -12 \\ -18 & -18 & 18 \end{pmatrix}.$$

Détaillons la première ligne : $25 + 2 + 3 = 30$, puis $-5 - 4 + 3 = -6$, puis $-5 + 2 - 3 = -6$. On constate que $R^2 = 6R$, donc $M_p^2 = \dfrac{6R}{36} = \dfrac{R}{6} = M_p$, c'est-à-dire $p \circ p = p$.
Ce résultat était attendu : si $w = w_\Pi + w_D$, alors $p(w) = w_\Pi$, et w_Π se décompose en $w_\Pi + 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $p(w_\Pi) = w_\Pi$. Projeter deux fois revient à projeter une fois.
Noyau et image. On a $p(w) = 0$ si et seulement si $w_\Pi = 0$, c'est-à-dire $w = w_D \in D$: donc $\operatorname{Ker} p = D$. Tout vecteur de Π est égal à son projeté, et tout projeté est dans Π : donc $\operatorname{Im} p = \Pi$. Le théorème du rang est respecté, $\dim \operatorname{Ker} p + \operatorname{rg} p = 1 + 2 = 3$.

5. La symétrie s

Expression. Pour tout w, $s(w) = w_\Pi - w_D = w_\Pi - (w - w_\Pi) = 2w_\Pi - w$. Donc

$$s = 2p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, \qquad M_s = 2M_p - I_3.$$

Matrice. $2M_p = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, et l'on retranche $1 = \dfrac{3}{3}$ sur la diagonale :

$$M_s = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérification de $M_s^2 = I_3$. Posons $S = 3M_s$; il s'agit de montrer que $S^2 = 9I_3$.

$$S^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la deuxième ligne $(-2, 1, -2)$ contre la deuxième colonne $(-1, 1, -3)$ donne $2 + 1 + 6 = 9$, et contre la troisième colonne $(-1, -2, 0)$ elle donne $2 - 2 + 0 = 0$. Donc $M_s^2 = \dfrac{1}{9} \cdot 9I_3 = I_3$, c'est-à-dire $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$: appliquer deux fois la symétrie change deux fois le signe de la composante sur D, ce qui la remet en place.
On pouvait aussi le déduire de $p^2 = p$: $(2p - \mathrm{id})^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{id} = 4p - 4p + \mathrm{id} = \mathrm{id}$, le développement étant licite car p et id commutent.
Image de w_0. Avec la décomposition de la question 3, $s(w_0) = w_\Pi - w_D = (0, -2, 2) - (1, 2, 3) = (-1, -4, -1)$. Contrôle par la matrice : $\dfrac{1}{3}(2 - 5,\ -2 - 10,\ -3 + 0) = (-1, -4, -1)$.

6. Les matrices dans une base adaptée

Notons $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, d)$. C'est une base de $\mathbb{R}^3$: puisque $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$, la concaténation d'une base de Π et d'une base de D est une base de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs v_1 et v_2 sont dans Π, donc $p(v_1) = v_1$, $p(v_2) = v_2$, et d est dans D, donc $p(d) = 0$. De même $s(v_1) = v_1$, $s(v_2) = v_2$ et $s(d) = -d$. D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aucun calcul n'est nécessaire, parce que chaque vecteur de $\mathcal{B}'$ est déjà décomposé : il est tout entier dans Π ou tout entier dans D. On peut contrôler sur M_p : $M_p v_1 = \dfrac{1}{6}(-5-1,\ 2+4,\ 3-3) = (-1, 1, 0) = v_1$.
C'est la base qui rend p lisible : M_p et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p)$ représentent la même application, et l'on vérifierait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = P^{-1} M_p P$ avec $P = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}'}$, $\mathcal{C}$ désignant la base canonique.

7. Une autre direction de projection

Décomposons $w_0 = (1, 0, 5)$ selon Π et $D' = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$. On cherche μ tel que $w_0 - \mu(1, 0, 0) = (1 - \mu, 0, 5)$ soit dans Π : $(1 - \mu) + 0 + 5 = 0$, donc $\mu = 6$. Le projeté de w_0 sur Π parallèlement à D' est

$$(1 - 6,\ 0,\ 5) = (-5, 0, 5),$$

qui est bien dans Π puisque $-5 + 0 + 5 = 0$.

On trouve $(-5, 0, 5)$, alors que la projection parallèlement à D donnait $(0, -2, 2)$. **Une projection n'est pas déterminée par le seul plan sur lequel on projette** : il faut aussi la direction, c'est-à-dire le supplémentaire. Dire « la projection sur Π » sans préciser « parallèlement à D » n'a pas de sens.

Commentaire

La question 2 contient toute la théorie de l'exercice : l'analyse et la synthèse prouvent à la fois l'existence, l'unicité, et donnent la formule de la projection. Les questions suivantes ne font qu'exploiter cette formule. On retiendra deux réflexes. D'abord, une projection se vérifie par $p \circ p = p$ et une symétrie par $s \circ s = \mathrm{id}$, ce qui détecte la plupart des erreurs de calcul sur les matrices. Ensuite, dans une base formée d'une base de Π et d'une base de D, les deux matrices deviennent diagonales avec des 1, des 0 ou des -1 : c'est le moyen le plus sûr de se souvenir de ce que font p et s.

Exercice 32 ★★★ Un projecteur se reconnaît à son carré

Notions : Somme directe, supplémentaires, projecteurs et symétries, Noyau, image, injectivité et surjectivité

Selon les facs, la somme directe et les projecteurs sont vus en L1 ou en L2 ; ils sont traités dans ce chapitre.

Rappel. Si $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, et la **projection sur F parallèlement à G** est l'application $x \mapsto x_F$. Elle est linéaire et vérifie $p \circ p = p$. Cet exercice démontre la réciproque.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie ou non, et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$: un vecteur est dans l'image de p si et seulement si p le laisse fixe.

2. Montrer que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0_E\}$.

3. Montrer que tout $x \in E$ s'écrit $x = (x - p(x)) + p(x)$ avec $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $p(x) \in \operatorname{Im} p$. En déduire que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

4. Conclure que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

5. *Application.* Soit $n \geqslant 1$ et $q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $q(M) = \dfrac{1}{2}(M + M^\top)$. Montrer que q est linéaire et que $q \circ q = q$. Déterminer $\operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker} q$, et en déduire une décomposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en somme directe. Décomposer $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

6. *Une matrice.* On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice, dans la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2. En déduire que f est une projection, dont on précisera le plan sur lequel elle projette (par une équation et une base) et la direction parallèlement à laquelle elle projette. Décomposer le vecteur $(1, 2, 3)$ selon ces deux sous-espaces.

Corrigé

Dans les questions 1 à 4, on utilise une seule hypothèse, $p(p(x)) = p(x)$ pour tout $x \in E$, et l'on n'utilise jamais la dimension.

1. L'image est l'ensemble des vecteurs fixes

On procède par double inclusion.
Inclusion $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. Soit $y \in \operatorname{Im} p$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Alors

$$p(y) = p(p(x)) = p(x) = y,$$

donc $(p - \mathrm{id}_E)(y) = p(y) - y = 0_E$, c'est-à-dire $y \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.
Inclusion $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Im} p$. Soit $y \in E$ tel que $p(y) = y$. Alors $y = p(y)$ est l'image de y par p, donc $y \in \operatorname{Im} p$.
Les deux inclusions donnent $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. □
Attention. La seconde inclusion est vraie pour **tout** endomorphisme : un vecteur fixe est toujours dans l'image. C'est la première qui utilise l'hypothèse $p \circ p = p$. Pour $p = 2\,\mathrm{id}_E$, par exemple, l'image est E tout entier alors que le seul vecteur fixe est 0_E.

2. Le noyau et l'image ne se rencontrent qu'en 0_E

Soit $y \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$. Comme $y \in \operatorname{Im} p$, la question 1 donne $p(y) = y$. Comme $y \in \operatorname{Ker} p$, on a $p(y) = 0_E$. Donc $y = p(y) = 0_E$. L'inclusion réciproque $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$ est vraie parce que noyau et image sont des sous-espaces vectoriels. Ainsi $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0_E\}$. □

3. Tout vecteur se décompose

Soit $x \in E$. L'égalité $x = (x - p(x)) + p(x)$ est évidente. Le vecteur $p(x)$ est dans $\operatorname{Im} p$ par définition de l'image. Et par linéarité de p, puis par hypothèse,

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E,$$

donc $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$.
On a ainsi montré que $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$. Avec la question 2, la somme est directe : $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. □
Rappelons pourquoi l'intersection nulle donne l'unicité de la décomposition. Si $x = a + b = a' + b'$ avec $a, a' \in \operatorname{Ker} p$ et $b, b' \in \operatorname{Im} p$, alors $a - a' = b' - b$ est à la fois dans $\operatorname{Ker} p$ et dans $\operatorname{Im} p$, donc nul : $a = a'$ et $b = b'$.
Attention. La décomposition n'a pas été devinée. Si l'on cherche à écrire $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Ker} p$ et $b \in \operatorname{Im} p$, on applique p : $p(x) = p(a) + p(b) = 0_E + b$, d'après la question 1. Donc $b = p(x)$ est forcé, et $a = x - p(x)$ aussi. C'est l'analyse d'un raisonnement par analyse et synthèse, et la synthèse est le calcul ci-dessus.

4. Conclusion : p est une projection

Posons $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$. D'après la question 3, $E = F \oplus G$, et la projection π sur F parallèlement à G est bien définie. Soit $x \in E$. L'écriture $x = p(x) + (x - p(x))$ est une décomposition de x avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$; par unicité de la décomposition, c'est **la** décomposition de x selon $F \oplus G$, et sa composante sur F est $p(x)$. Donc $\pi(x) = p(x)$ pour tout x, c'est-à-dire $p = \pi$. □
En résumé, pour un endomorphisme p,

$$p \circ p = p \iff p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker} p.$$

Un endomorphisme qui vérifie $p \circ p = p$ s'appelle un **projecteur**.

5. Application : la partie symétrique d'une matrice

Linéarité. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top$,

$$q(\lambda M + N) = \frac{1}{2}(\lambda M + N + \lambda M^\top + N^\top) = \lambda q(M) + q(N).$$

La relation $q \circ q = q$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice $q(M)$ est symétrique : $q(M)^\top = \frac{1}{2}(M^\top + M) = q(M)$. Donc

$$q(q(M)) = \frac{1}{2}(q(M) + q(M)^\top) = \frac{1}{2}(q(M) + q(M)) = q(M).$$

L'application q est un projecteur.
Image. D'après la question 1, $\operatorname{Im} q$ est l'ensemble des M telles que $q(M) = M$. Or

$$q(M) = M \iff M + M^\top = 2M \iff M^\top = M.$$

Donc $\operatorname{Im} q = S_n$, l'ensemble des matrices symétriques.

Noyau. De même, $q(M) = 0_n \iff M + M^\top = 0_n \iff M^\top = -M$. Donc $\operatorname{Ker} q = A_n$, l'ensemble des matrices antisymétriques.
Conclusion. D'après les questions 3 et 4,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_n \oplus S_n,$$

et q est la projection sur S_n parallèlement à A_n. La décomposition de M est $M = (M - q(M)) + q(M)$, avec $M - q(M) = \frac{1}{2}(M - M^\top)$ antisymétrique et $q(M) = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ symétrique.
Pour M_1. On a $M_1^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, donc

$$q(M_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix},$$

$$M_1 - q(M_1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

La première est symétrique, la seconde antisymétrique, et leur somme vaut M_1.
On n'a eu besoin d'aucune base ni d'aucun calcul de dimension : la relation $q \circ q = q$ fait tout le travail.

6. Une matrice de projecteur

Le carré de A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Détaillons la première ligne $(2, -1, -1)$ contre les trois colonnes : $4-1-1 = 2$, puis $-2+0+1 = -1$, puis $-2+1+0 = -1$. Les deux autres lignes se calculent de même. Ainsi $f \circ f = f$: d'après la question 4, f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.
Le noyau. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent $z = x$ et $y = x$, et la première est alors vérifiée : $2x - x - x = 0$. Donc

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1, 1, 1)),$$

une droite. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = 3 - 1 = 2$: l'image est un plan.
L'image, par la question 1. On a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$, de matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les trois lignes sont égales, et $(x, y, z) \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si $x - y - z = 0$. L'image est le plan d'équation $x = y + z$. En écrivant $(x, y, z) = (y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$, on obtient la base $((1, 1, 0), (1, 0, 1))$, libre car ses vecteurs ne sont pas colinéaires.
Contrôle : chaque colonne de A est dans l'image, et vérifie bien l'équation, puisque $2 = 1 + 1$, $-1 = 0 + (-1)$ et $-1 = -1 + 0$.

Conclusion. L'endomorphisme f est la projection sur le plan $x = y + z$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}((1,1,1))$.
Décomposition de $(1,2,3)$. D'après la question 3, la composante sur l'image est $f(1,2,3)$ et la composante sur le noyau est $(1,2,3) - f(1,2,3)$. Or

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2-3\\1+0-3\\1-2+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix},$$

donc

$$(1,2,3) = (4,4,4) + (-3,-2,-1),$$

avec $(4,4,4) = 4(1,1,1)$ dans le noyau, et $(-3,-2,-1)$ dans l'image puisque $-3 = -2 + (-1)$.
Attention. Pour un nombre réel, $x^2 = x$ force $x = 0$ ou $x = 1$. Pour une matrice, $A^2 = A$ n'entraîne pas $A = 0_3$ ou $A = I_3$: la matrice A ci-dessus n'est ni l'une ni l'autre. L'égalité $A(A - I_3) = 0_3$ ne permet pas de conclure qu'un des facteurs est nul, puisque le produit de deux matrices non nulles peut être nul.

Commentaire

Le résultat central de l'exercice transforme une propriété **géométrique**, être une projection parallèlement à un supplémentaire, en une propriété **algébrique** que l'on teste par un seul calcul, $p \circ p = p$. Il fournit en plus le mode d'emploi : l'espace sur lequel on projette est l'ensemble des vecteurs fixes, la direction est le noyau, et la décomposition d'un vecteur est $x = (x - p(x)) + p(x)$, sans aucun système à résoudre. On l'a vu deux fois : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où il redonne la décomposition en partie symétrique et partie antisymétrique, et sur la matrice A, où une équation de l'image s'est lue directement sur $A - I_3$.
La démonstration n'utilise pas la dimension finie : elle vaut dans n'importe quel espace vectoriel, ce qui est rare pour un résultat qui concerne noyau et image.

Exercice 33 ★★★ Un endomorphisme des matrices carrées d'ordre 2

Notions : Applications linéaires, endomorphismes et isomorphismes, Noyau, image, injectivité et surjectivité, Matrice d'une application linéaire dans des bases, Théorème du rang et ses conséquences

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = AM - MA.$$

On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où E_{ij} a un seul coefficient non nul, égal à 1, en ligne i et colonne j.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculer $\varphi(M)$. En déduire la matrice $\Phi = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

3. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \mathrm{Vect}(I_2, A)$. Que représente ce noyau ?

4. En déduire le rang de φ, puis une base de $\operatorname{Im}\varphi$. Décrire les matrices de $\operatorname{Im}\varphi$.

5. Existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AM - MA = I_2$?

6. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ n'est pas réduit à la matrice nulle, alors que $\dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = 4$. Le théorème du rang l'interdisait-il ?

Corrigé

1. Linéarité

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les produits AM et MA sont des matrices 2×2, donc $\varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition, et compatibilité avec la multiplication par un scalaire,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A \\ &= \lambda AM + AN - \lambda MA - NA \\ &= \lambda(AM - MA) + (AN - NA) = \lambda\varphi(M) + \varphi(N). \end{aligned}$$

L'application φ est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est un espace de dimension 4.

2. Calcul de $\varphi(M)$ et matrice de φ

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On calcule les deux produits :

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}.$$

Multiplier à gauche par A ajoute la deuxième ligne à la première ; multiplier à droite par A ajoute la première colonne à la deuxième. Par différence :

$$\varphi(M) = \begin{pmatrix} a+c-a & b+d-a-b \\ c-c & d-c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Images des vecteurs de base. On applique cette formule aux quatre matrices de $\mathcal{B}$:

— E_{11} correspond à $(a,b,c,d)=(1,0,0,0)$, donc $\varphi(E_{11})=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}=-E_{12}$;
— E_{12} correspond à $(0,1,0,0)$, donc $\varphi(E_{12})=0_2$;
— E_{21} correspond à $(0,0,1,0)$, donc $\varphi(E_{21})=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=E_{11}-E_{22}$;
— E_{22} correspond à $(0,0,0,1)$, donc $\varphi(E_{22})=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=E_{12}$.

Matrice. Les coordonnées de ces images dans $\mathcal{B}$ sont respectivement $(0,-1,0,0)$, $(0,0,0,0)$, $(1,0,0,-1)$ et $(0,1,0,0)$. En les rangeant en colonnes :

$$\Phi=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Contrôle. Pour $M_2=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, de coordonnées $(1,2,3,4)$, le produit matriciel donne

$$\Phi\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1+4\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\0\\-3\end{pmatrix},$$

et la formule donne $\varphi(M_2)=\begin{pmatrix}3&4-1\\0&-3\end{pmatrix}$, de coordonnées $(3,3,0,-3)$. Les deux calculs concordent.
Attention. Φ est une matrice 4×4, et non 2×2 : elle représente une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace de dimension 4, dans lui-même. Elle agit sur la colonne des **quatre coordonnées** de M, pas sur la matrice M elle-même. Confondre Φ avec A, ou chercher à écrire $\varphi(M)$ comme un produit ΦM, n'a pas de sens.

3. Le noyau

Soit $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. D'après la question 2,

$$M\in\operatorname{Ker}\varphi\iff\begin{pmatrix}c&d-a\\0&-c\end{pmatrix}=0_2\iff c=0\text{ et }d=a.$$

Donc

$$\operatorname{Ker}\varphi=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\{aI_2+bE_{12}\mid a,b\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}(I_2,E_{12}).$$

Le lien avec A. On remarque que $A=I_2+E_{12}$, donc $E_{12}=A-I_2$. Toute combinaison de I_2 et E_{12} est donc une combinaison de I_2 et A, et réciproquement : $\operatorname{Vect}(I_2,E_{12})=\operatorname{Vect}(I_2,A)$. Ainsi

$$\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Vect}(I_2,A).$$

Une base. La famille (I_2,A) est libre : si $\alpha I_2+\beta A=0_2$, alors $\begin{pmatrix}\alpha+\beta&\beta\\0&\alpha+\beta\end{pmatrix}=0_2$, d'où $\beta=0$ puis $\alpha=0$. Elle est génératrice du noyau, c'est une base, et $\dim\operatorname{Ker}\varphi=2$.
Interprétation. $\varphi(M)=0_2$ signifie $AM=MA$: le noyau de φ est l'ensemble des matrices **qui commutent avec** A. On savait d'avance que I_2 et A en font partie, comme toute combinaison linéaire de I_2 et A. Le calcul montre qu'il n'y en a pas d'autres.

4. Le rang et l'image

Rang. D'après le théorème du rang appliqué à φ, endomorphisme d'un espace de dimension 4,

$$\operatorname{rg}\varphi = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Ker}\varphi = 4 - 2 = 2.$$

On le retrouve sur Φ : sa troisième ligne est nulle, sa quatrième est l'opposée de la première, et les deux premières lignes, $(0,0,1,0)$ et $(-1,0,0,1)$, ne sont pas proportionnelles.
Base de l'image. L'image est engendrée par les images des vecteurs de la base : $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(-E_{12},\ 0_2,\ E_{11}-E_{22},\ E_{12}) = \operatorname{Vect}(E_{12},\ E_{11}-E_{22})$, puisque l'on peut retirer la matrice nulle et les vecteurs colinéaires à un autre. Les matrices E_{12} et $E_{11}-E_{22}$ ne sont pas colinéaires (l'une a ses coefficients diagonaux nuls, pas l'autre, et $E_{12} \neq 0_2$) : la famille $(E_{12},\ E_{11}-E_{22})$ est libre, de cardinal égal au rang 2, c'est une base de $\operatorname{Im}\varphi$.
Description. Une matrice de l'image s'écrit $xE_{12} + y(E_{11}-E_{22}) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & -y \end{pmatrix}$. Donc $\operatorname{Im}\varphi$ est l'ensemble des matrices **triangulaires supérieures dont les deux coefficients diagonaux sont opposés**. On le voyait déjà sur la formule $\varphi(M) = \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}$.

5. L'équation $AM - MA = I_2$

Résoudre $AM - MA = I_2$ revient à chercher un antécédent de I_2 par φ. Or I_2 est triangulaire supérieure, mais ses coefficients diagonaux valent 1 et 1, qui ne sont pas opposés : $I_2 \notin \operatorname{Im}\varphi$. L'équation n'a **aucune solution**.
On peut le vérifier directement : $AM - MA = I_2$ s'écrirait $\begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $c = 1$ et $-c = 1$, ce qui est contradictoire.

6. Le noyau et l'image se rencontrent

La matrice E_{12} est dans le noyau, d'après la question 3 ($\varphi(E_{12}) = 0_2$), et dans l'image, puisque $E_{12} = \varphi(E_{22})$. Elle est non nulle, donc $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi \neq \{0_2\}$; plus précisément, cette intersection contient la droite $\operatorname{Vect}(E_{12})$.
Conséquence sur la somme. Selon les facs, la somme de deux sous-espaces et les supplémentaires sont vus en L1 ou en L2 ; on les utilise ici seulement pour mesurer ce qui se passe. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi &= \operatorname{Vect}(I_2, E_{12}) + \operatorname{Vect}(E_{12}, E_{11}-E_{22}) \\ &= \operatorname{Vect}(I_2,\ E_{12},\ E_{11}-E_{22}). \end{aligned}$$

Ces trois matrices forment une famille libre : si $\alpha I_2 + \beta E_{12} + \gamma(E_{11}-E_{22}) = 0_2$, alors $\begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta \\ 0 & \alpha-\gamma \end{pmatrix} = 0_2$, d'où $\beta = 0$ et $\alpha+\gamma = \alpha-\gamma = 0$, donc $\alpha = \gamma = 0$. La somme est donc de dimension 3 seulement : elle n'est pas égale à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par exemple, E_{21} n'en fait pas partie, puisque toutes les matrices de cette somme sont triangulaires supérieures.
Le théorème du rang n'interdisait donc rien de tel.
Attention. Le théorème du rang dit que $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et rien de plus. Il ne dit pas que le noyau et l'image sont supplémentaires : ici ils ne le sont pas, puisqu'ils ont une droite en commun. Ce sont les projecteurs (exercice 32) qui ont cette propriété supplémentaire, et φ n'en est pas un : $\varphi(\varphi(E_{21})) = \varphi(E_{11}-E_{22}) = -E_{12} - E_{12} = -2E_{12}$, qui n'est pas $\varphi(E_{21})$.

Commentaire

L'exercice montre comment on étudie une application linéaire sur un espace de matrices : on la traduit en une matrice 4×4 en choisissant une base, ou, plus rapidement ici, on calcule $\varphi(M)$

sur une matrice générale et on lit tout sur la formule $\begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}$. Le noyau a un sens concret, celui des matrices qui commutent avec A, et l'image se décrit par deux conditions simples. Le théorème du rang relie les deux dimensions et évite un calcul, mais la question 6 rappelle ses limites : il compte les dimensions, il ne dit rien de la position du noyau par rapport à l'image.

Exercice 34 ★★★★ Endomorphismes de carré nul

Notions : Théorème du rang et ses conséquences, Bases, coordonnées et dimension, théorème de la base incomplète, Matrice d'une application linéaire dans des bases, Matrice de passage et formules de changement de base

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$, et 0 l'application nulle de E dans E.

1. Montrer que $f^2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.

2. On suppose $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg} f \leqslant \dfrac{n}{2}$.

3. Dans cette question et la suivante, $n = 3$, $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Montrer que $\mathrm{rg} f = 1$ et $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.

4. *Une base adaptée.*

a. Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0_E$, et montrer que $f(x) \in \mathrm{Ker} f$.

b. Justifier qu'il existe $y \in \mathrm{Ker} f$ tel que $(f(x), y)$ soit une base de $\mathrm{Ker} f$.

c. Montrer que $\mathcal{B}' = (f(x), y, x)$ est une base de E.

d. Écrire la matrice $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Combien a-t-elle de coefficients non nuls ?

5. *Application.* On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier que $A^2 = 0_3$ et déterminer le rang de A.

b. Appliquer la construction de la question 4 avec $x = e_1$: donner $f(x)$, une équation de $\mathrm{Ker} f$, un vecteur y convenable, et la matrice de passage $P = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}'}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

c. Vérifier que $AP = PN$, et en déduire une expression de A à l'aide de P, N et P^{-1}.

Corrigé

1. Carré nul et inclusion de l'image dans le noyau

Sens direct. Supposons $f^2 = 0$. Soit $z \in \mathrm{Im} f$: il existe $t \in E$ tel que $z = f(t)$. Alors $f(z) = f(f(t)) = f^2(t) = 0_E$, donc $z \in \mathrm{Ker} f$. Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.
Réciproque. Supposons $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$. Soit $t \in E$. Le vecteur $f(t)$ appartient à $\mathrm{Im} f$, donc à $\mathrm{Ker} f$, donc $f(f(t)) = 0_E$. Ceci valant pour tout $t \in E$, on a $f^2 = 0$. □

2. Une majoration du rang

Supposons $f^2 = 0$. D'après la question 1, $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker} f$, donc sa dimension est inférieure ou égale :

$$\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f \leqslant \dim \mathrm{Ker} f.$$

D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker} f = n - \mathrm{rg} f$. En reportant :

$$\mathrm{rg} f \leqslant n - \mathrm{rg} f, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 2\,\mathrm{rg} f \leqslant n,$$

d'où $\mathrm{rg} f \leqslant \dfrac{n}{2}$. □
Un endomorphisme de carré nul a donc un noyau « gros », au moins la moitié de l'espace, puisqu'il doit contenir toute l'image.

3. Le cas de la dimension 3

D'après la question 2, $\mathrm{rg} f \leqslant \dfrac{3}{2}$. Le rang est un entier naturel, donc $\mathrm{rg} f \in \{0, 1\}$. Or $f \neq 0$: il existe un vecteur dont l'image n'est pas nulle, donc $\mathrm{Im} f \neq \{0_E\}$ et $\mathrm{rg} f \geqslant 1$. Ainsi

$$\mathrm{rg} f = 1, \qquad \dim \mathrm{Ker} f = 3 - \mathrm{rg} f = 2,$$

la seconde égalité venant du théorème du rang. □

4. Construction d'une base adaptée

a. Dire que $f \neq 0$, c'est dire que f n'est pas l'application nulle : il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0_E$. On fixe un tel x. Le vecteur $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im} f$, et $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$ d'après la question 1 : donc $f(x) \in \mathrm{Ker} f$. Autrement dit, $f(f(x)) = 0_E$, ce qui est aussi une conséquence directe de $f^2 = 0$.
On note que $x \notin \mathrm{Ker} f$, puisque $f(x) \neq 0_E$. C'est ce qui empêchera x de se confondre avec les deux autres vecteurs de la base.
b. Le vecteur $f(x)$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker} f$: la famille $(f(x))$ à un seul élément est libre dans $\mathrm{Ker} f$. D'après le théorème de la base incomplète, appliqué dans l'espace $\mathrm{Ker} f$, qui est de dimension 2 d'après la question 3, on peut compléter cette famille libre en une base de $\mathrm{Ker} f$, à l'aide de vecteurs de $\mathrm{Ker} f$. Une base de $\mathrm{Ker} f$ a deux éléments : il suffit d'ajouter un vecteur $y \in \mathrm{Ker} f$, et $(f(x), y)$ est une base de $\mathrm{Ker} f$.
Concrètement, y est n'importe quel vecteur du noyau non colinéaire à $f(x)$: il en existe, sinon $\mathrm{Ker} f$ serait la droite $\mathrm{Vect}(f(x))$, de dimension 1.
c. *Liberté.* Soient a, b, c des réels tels que

$$af(x) + by + cx = 0_E. \qquad (*)$$

Montrons que $a = b = c = 0$. On applique f aux deux membres de $(*)$. Par linéarité,

$$af(f(x)) + bf(y) + cf(x) = f(0_E) = 0_E.$$

Or $f(f(x)) = 0_E$ d'après la question a, et $f(y) = 0_E$ puisque $y \in \mathrm{Ker} f$. Il reste $cf(x) = 0_E$. Comme $f(x) \neq 0_E$, on en déduit $c = 0$.
En reportant dans $(*)$, il vient $af(x) + by = 0_E$. La famille $(f(x), y)$ est libre, puisque c'est une base de $\mathrm{Ker} f$: donc $a = b = 0$.
Ainsi $a = b = c = 0$, et la famille $(f(x), y, x)$ est libre.
Conclusion. C'est une famille libre de 3 vecteurs dans E, qui est de dimension 3 : c'est une base de E. □
Attention. Le geste décisif est d'**appliquer** f à la relation $(*)$: il fait disparaître les deux vecteurs du noyau et isole le coefficient c. On ne peut pas conclure en disant seulement « les trois vecteurs sont deux à deux non colinéaires » : ce critère ne prouve pas la liberté d'une famille de trois vecteurs. Il faut partir d'une relation quelconque et montrer que ses coefficients sont nuls, comme ci-dessus.
d. On calcule l'image de chaque vecteur de $\mathcal{B}'$, et on l'écrit dans $\mathcal{B}'$:

— $f(f(x)) = 0_E$, de coordonnées $(0,0,0)$;
— $f(y) = 0_E$, de coordonnées $(0,0,0)$;
— $f(x) = 1 \cdot f(x) + 0 \cdot y + 0 \cdot x$, de coordonnées $(1,0,0)$.

En rangeant ces coordonnées en colonnes :

$$N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle a un **seul** coefficient non nul, égal à 1, en ligne 1 et colonne 3. On contrôle que $N^2 = 0_3$: la troisième colonne de N^2 est N appliquée à la troisième colonne de N, c'est-à-dire N appliquée à la colonne $(1,0,0)$, qui donne la première colonne de N, nulle ; les deux autres colonnes de N^2 sont nulles puisque celles de N le sont.
L'ordre $(f(x), y, x)$ est un choix. Avec la base $(x, f(x), y)$, on trouverait le coefficient 1 en ligne 2 et colonne 1 : la matrice change avec l'ordre des vecteurs, mais elle a toujours un seul coefficient non nul.

5. Application numérique

a. *Le carré.* Les lignes de A sont $L_1 = (1,1,3)$, $L_2 = 2L_1$ et $L_3 = -L_1$, et ses colonnes sont $C_1 = C_2 = (1,2,-1)$ et $C_3 = 3C_1$. Le coefficient (i,j) de A^2 est le produit de la ligne i par la colonne j ; tous ces produits sont des multiples de

$$L_1 C_1 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times (-1) = 0.$$

Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient en ligne 2, colonne 3 vaut $2 \times 3 + 2 \times 6 + 6 \times (-3) = 6 + 12 - 18 = 0$.
Le rang. Les trois colonnes de A sont colinéaires au vecteur non nul $(1,2,-1)$, donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((1,2,-1))$ et $\mathrm{rg} A = 1$. C'est conforme à la question 3, puisque $A^2 = 0_3$ et $A \neq 0_3$.
b. *Le vecteur $f(x)$.* Pour $x = e_1$, l'image $f(e_1)$ est la première colonne de A : $f(x) = (1,2,-1)$, qui est non nul. Le choix $x = e_1$ est donc licite.
Le noyau. Le système $AX = 0$ se réduit, puisque $L_2 = 2L_1$ et $L_3 = -L_1$, à la seule équation

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 0,$$

où l'on a noté (x_1, x_2, x_3) les composantes pour éviter toute confusion avec le vecteur x. C'est un plan, de dimension 2, conformément à la question 3. On vérifie que $f(x) = (1,2,-1)$ en fait partie : $1 + 2 - 3 = 0$.
Le vecteur y. Il faut un vecteur du noyau non colinéaire à $(1,2,-1)$. Le vecteur $y = (1,-1,0)$ convient : $1 - 1 + 0 = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker} f$, et y n'est pas colinéaire à $(1,2,-1)$, puisque sa troisième composante est nulle alors que $y \neq 0$ et que celle de $(1,2,-1)$ ne l'est pas. D'après la question 4.b, $(f(x), y)$ est une base de $\mathrm{Ker} f$.
La matrice de passage. Ses colonnes sont les composantes de $f(x)$, y, x, dans cet ordre :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversibilité et inverse. La question 4.c garantit déjà que $\mathcal{B}'$ est une base, donc que P est inversible. Calculons P^{-1} en résolvant $PX = Y$ pour $Y = (s_1, s_2, s_3)$ quelconque, avec $X =$

(α, β, γ) :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = s_1 \\ 2\alpha - \beta = s_2 \\ -\alpha = s_3 \end{cases}$$

Le système se résout en partant de la dernière ligne : $\alpha = -s_3$, puis $\beta = 2\alpha - s_2 = -s_2 - 2s_3$, puis

$$\gamma = s_1 - \alpha - \beta = s_1 + s_3 + s_2 + 2s_3 = s_1 + s_2 + 3s_3.$$

Il a une unique solution pour tout Y, ce qui confirme que P est inversible, et l'on lit P^{-1} sur les coefficients de s_1, s_2, s_3 :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérification :

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la première ligne $(1, 1, 1)$ donne $0+0+1 = 1$, puis $0-1+1 = 0$, puis $-1-2+3 = 0$.
c. *Le produit AP.* Ses colonnes sont $Af(x)$, Ay et Ax. Les deux premières sont nulles, puisque $f(x)$ et y sont dans le noyau, et la troisième est $Ae_1 = (1, 2, -1)$. Le calcul le confirme :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la première ligne $(1, 1, 3)$ contre la première colonne $(1, 2, -1)$ donne $1+2-3 = 0$, et contre la deuxième colonne $(1, -1, 0)$ elle donne $1 - 1 + 0 = 0$.
Le produit PN. Multiplier P à droite par N donne une matrice dont les deux premières colonnes sont nulles, car celles de N le sont, et dont la troisième colonne est P appliquée à $(1, 0, 0)$, c'est-à-dire la première colonne de P :

$$PN = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a bien $AP = PN$.
Conséquence. En multipliant à droite par P^{-1}, on obtient

$$A = PNP^{-1}, \qquad \text{et de façon équivalente} \qquad N = P^{-1}AP.$$

La seconde égalité est la formule de changement de base : N est la matrice de f dans $\mathcal{B}'$, et $P = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}'}$. Contrôle sur la troisième colonne de $P^{-1}(AP)$, la seule non nulle : P^{-1} appliquée à $(1, 2, -1)$ donne $(0 + 0 + 1,\ 0 - 2 + 2,\ 1 + 2 - 3) = (1, 0, 0)$, qui est bien la troisième colonne de N.
Attention. Vérifier $AP = PN$ plutôt que $P^{-1}AP = N$ est un choix délibéré : on évite un produit par P^{-1}, source fréquente d'erreurs, et l'égalité $AP = PN$ se lit colonne par colonne comme « f envoie chaque vecteur de $\mathcal{B}'$ sur ce que dit N ». Mais elle n'entraîne $A = PNP^{-1}$ que parce que P est **inversible**, ce qui a été établi en 5.b.

Commentaire

La question 2 est l'exemple type d'utilisation du théorème du rang : une inclusion entre deux sous-espaces donne une inégalité entre dimensions, et le théorème du rang transforme cette inégalité en une contrainte sur le seul rang. La majoration $\operatorname{rg} f \leqslant \dfrac{n}{2}$ est optimale : l'exercice 25 en donne, dans $\mathbb{R}^4$, un exemple de rang 2.
La construction de la question 4 montre plus : en dimension 3, **tous** les endomorphismes non nuls de carré nul ont la même matrice N, à condition de choisir la base. Les vecteurs x et y ne sont pas uniques, et la matrice P non plus (avec $y = (3, 0, -1)$, par exemple, on obtiendrait une autre matrice P et la même matrice N), mais le résultat l'est. Selon les facs, cette situation porte un nom dès la L1 ou seulement en L2 : on dit que A et N sont **semblables**. On en déduit qu'une matrice 3×3 non nulle de carré nul s'écrit toujours PNP^{-1}, et réciproquement toute matrice de cette forme est de carré nul, puisque $(PNP^{-1})^2 = PN^2P^{-1} = 0_3$.