Devoir surveillé — Algèbre linéaire : systèmes, matrices et espaces vectoriels

L1 maths — 180 min

Durée : 180 min — Barème : 20 points. Calculatrice selon les consignes de l'énoncé. La rédaction et la clarté comptent.

Consignes générales. Durée : 3 h. Documents et calculatrices interdits. Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants ; l'exercice 4 est un problème en trois parties, chacune s'appuyant sur les précédentes, mais on peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes. Le barème est indiqué question par question et totalise 20 points. La rédaction est notée : « soient », « montrons que », le nom du théorème employé et une conclusion écrite en toutes lettres valent des points. Le déterminant d'une matrice d'ordre 3 ou plus n'est pas un outil de ce sujet.

Exercice 1 (3 points) : Cinq affirmations à trancher

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer : une preuve si elle est vraie, un contre-exemple vérifié si elle est fausse. Chaque affirmation vaut 0,6 point ; une réponse sans justification ne rapporte rien.

1. La famille $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3, alors $F \cap G \neq \{0\}$.

3. Il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((1,0,0))$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((0,1,0))$.

4. Soient E un espace vectoriel, (u,v,w) une famille libre de E et x un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(u,v,w)$. Alors la famille (u,v,w,x) est libre.

5. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas inversibles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (4 points) : Trois tickets de caisse

Une papeterie vend des cahiers, des stylos et des classeurs, à des prix unitaires notés respectivement x, y et z (en euros). On dispose de trois tickets de caisse :

— ticket 1 : 1 cahier, 2 stylos et 1 classeur, pour 9 euros ;
— ticket 2 : 2 cahiers, 1 stylo et 3 classeurs, pour 13 euros ;
— ticket 3 : 3 cahiers, 3 stylos et 4 classeurs, pour c euros, le montant c étant mal imprimé.

1. *(0,75 pt)* Écrire le système linéaire (S_c) d'inconnues x, y, z traduisant les trois tickets. À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer pour quelle valeur de c ce système admet des solutions. Un client affirme avoir payé 21 euros au ticket 3 : est-ce possible ?

2. *(1 pt)* On prend la valeur de c trouvée à la question 1. Résoudre (S_c) et écrire l'ensemble des solutions sous la forme $X_0 + \mathrm{Vect}(K)$, où X_0 est une solution à coordonnées entières positives et K un vecteur de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera. Interpréter concrètement le vecteur K, puis déterminer les valeurs du paramètre pour lesquelles les trois prix sont strictement positifs.

3. *(0,5 pt)* Un quatrième client achète 1 cahier et 5 stylos. Montrer que, quel que soit le prix exact des articles, il paie forcément 14 euros. Son ticket permet-il de déterminer les prix ?

4. *(1,25 pt)* Un cinquième client achète 1 cahier, 1 stylo et 1 classeur pour 7 euros. On note

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que M est inversible et calculer M^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan. En déduire les trois prix, puis, plus généralement, les prix x, y, z en fonction des montants a, b, d des tickets 1, 2 et 5, lorsque ces montants sont quelconques.

5. *(0,5 pt)* On note A la matrice du système (S_c). Donner le rang de A, une base de $\mathrm{Ker}A$, et vérifier sur cet exemple le théorème du rang.

Exercice 3 (4,5 points) : Les fonctions affines par morceaux sur [0, 2]

On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$, et E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}$ dont la restriction à $[0,1]$ est affine et la restriction à $[1,2]$ est affine. Autrement dit, $f \in E$ lorsqu'il existe des réels a, b, c, d tels que

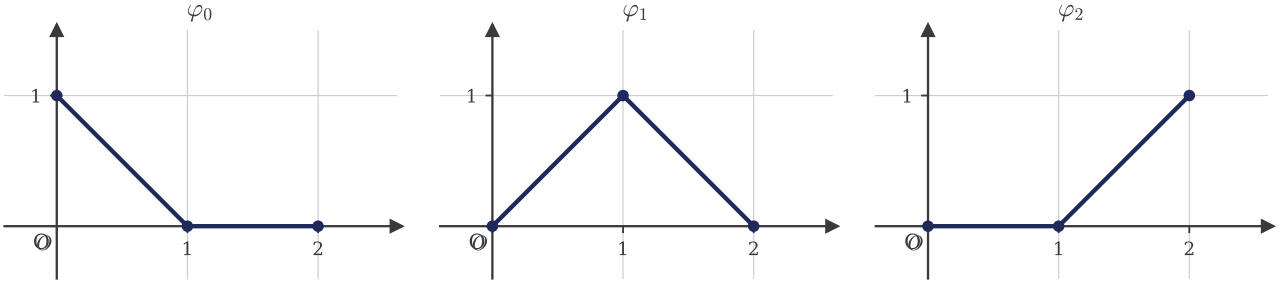
$$f(x) = ax + b \ \text{ pour } x \in [0,1] \qquad \text{et} \qquad f(x) = cx + d \ \text{ pour } x \in [1,2].$$

1. *(0,75 pt)* Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$. Pourquoi une fonction de E est-elle automatiquement continue en 1 ?

2. *(0,75 pt)* On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(f) = \big(f(0), f(1), f(2)\big)$. Montrer que φ est linéaire et injective.

3. *(0,75 pt)* Montrer que φ est surjective. En déduire la dimension de E.

4. *(0,75 pt)* On note φ_0, φ_1, φ_2 les fonctions de E telles que $\varphi(\varphi_0) = (1,0,0)$, $\varphi(\varphi_1) = (0,1,0)$ et $\varphi(\varphi_2) = (0,0,1)$, représentées ci-dessous. Donner leurs expressions sur $[0,1]$ et sur $[1,2]$, justifier que $\mathcal{B} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une base de E, et montrer que les coordonnées de $f \in E$ dans cette base sont $\big(f(0), f(1), f(2)\big)$.



5. *(1 pt)* On pose $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ et $g_3(x) = |x - 1|$ pour $x \in [0,2]$. Vérifier que g_1, g_2, g_3 appartiennent à E, écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}' = (g_1, g_2, g_3)$, et montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ de la fonction $h \in E$ telle que $h(0) = 1$, $h(1) = 4$ et $h(2) = 3$, puis écrire $h(x)$ à l'aide d'une seule formule valable sur $[0,2]$.

6. *(0,5 pt)* On considère $\Delta : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Delta(f) = \big(f(1) - f(0),\ f(2) - f(1)\big)$, qui associe à f ses deux pentes. Écrire la matrice de Δ dans la base $\mathcal{B}$ de E et la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$, puis montrer sans calcul supplémentaire que Δ est surjective. Interpréter.

Exercice 4 (8,5 points) : Problème : les endomorphismes de carré égal à moins l'identité

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel **réel** de dimension finie $n \geqslant 1$, et l'on étudie les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ f = -\mathrm{id}_E.$$

On note $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de la rotation d'un quart de tour du plan, qui vérifie $R^2 = -I_2$.

Partie A : un exemple dans $\mathbb{R}^4$ (2,5 points)

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.1. *(0,5 pt)* Calculer A^2 et en déduire que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$.

A.2. *(0,5 pt)* On pose $x = e_1$ et $y = e_3$. Calculer $f(x)$ et $f(y)$, puis montrer que $\mathcal{B}' = (x, f(x), y, f(y))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

A.3. *(0,75 pt)* Sans calculer de nouveau produit matriciel, écrire la matrice J de f dans la base $\mathcal{B}'$.

A.4. *(0,75 pt)* On note P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$. Écrire P, calculer P^{-1} en exprimant e_1, e_2, e_3, e_4 dans la base $\mathcal{B}'$, puis vérifier l'égalité $AP = PJ$. Quelle relation entre A, P et J en déduit-on ?

Partie B : propriétés générales (3 points)

Dans cette partie et la suivante, $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.

B.1. *(0,5 pt)* Montrer que f est bijective et préciser f^{-1}.

B.2. *(0,75 pt)* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ (f + \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et en déduire que $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est bijective. En déduire que, pour tout vecteur $x \neq 0_E$, les vecteurs x et $f(x)$ ne sont pas colinéaires, puis que la famille $(x, f(x))$ est libre.

B.3. *(0,75 pt)* Soient F un sous-espace vectoriel de E stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$), y un vecteur de E n'appartenant pas à F, et a, b deux réels tels que $ay + bf(y) \in F$. Montrer que $a = b = 0$. *On pourra appliquer f au vecteur $z = ay + bf(y)$, puis former une combinaison de z et de $f(z)$ qui fasse disparaître $f(y)$.*

B.4. *(1 pt)* Soient $k \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_k$ des vecteurs de E tels que la famille

$$\mathcal{B}_k = (x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_k, f(x_k))$$

soit libre. On note $F_k = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_k)$.

a. Montrer que F_k est stable par f.

b. Soit $y \in E$ n'appartenant pas à F_k. Montrer que la famille $(x_1, f(x_1), \ldots, x_k, f(x_k), y, f(y))$ est libre.

Partie C : le théorème de structure (3 points)

C.1. *(1,25 pt)* Démontrer que n est pair et que, si l'on note $n = 2p$, il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de E tels que $\mathcal{B} = (x_1, f(x_1), \ldots, x_p, f(x_p))$ soit une base de E. On décrira une construction pas à pas, et l'on justifiera qu'elle s'arrête.

C.2. *(0,5 pt)* Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Comparer au résultat de la partie A.

C.3. *(0,5 pt)* En déduire qu'il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$. À quels endroits de la partie B a-t-on utilisé que les scalaires sont réels ? Donner un espace vectoriel complexe de dimension 1 muni d'un endomorphisme g vérifiant $g \circ g = -\mathrm{id}$.

C.4. *(0,75 pt)* Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_2$ si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PRP^{-1}$. Application : vérifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = -I_2$ et donner une matrice P explicite.