Devoir surveillé — Algèbre linéaire : systèmes, matrices et espaces vectoriels

L1 maths — 180 min

Durée : 180 min — Barème : 20 points. Calculatrice selon les consignes de l'énoncé. La rédaction et la clarté comptent.

Exercice 1 (3 points) : Cinq affirmations à trancher

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer : une preuve si elle est vraie, un contre-exemple vérifié si elle est fausse. Chaque affirmation vaut 0,6 point ; une réponse sans justification ne rapporte rien.

1. La famille $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3, alors $F \cap G \neq \{0\}$.

3. Il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,0,0))$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((0,1,0))$.

4. Soient E un espace vectoriel, (u,v,w) une famille libre de E et x un vecteur de E n'appartenant pas à $\operatorname{Vect}(u,v,w)$. Alors la famille (u,v,w,x) est libre.

5. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas inversibles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé

1. Faux. Notons $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (4,5,6)$ et $v_3 = (7,8,9)$. Les trois vecteurs ont des coordonnées en progression arithmétique, ce qui suggère de regarder $v_1 + v_3$ et $2v_2$:

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = (1-8+7,\ 2-10+8,\ 3-12+9) = (0,0,0).$$

C'est une relation linéaire à coefficients $(1,-2,1)$ non tous nuls : la famille est **liée**, donc ce n'est pas une base. Une base est en particulier libre, et une seule relation non triviale suffit à le réfuter.
Si l'on ne voit pas la relation, le pivot la fabrique. On cherche les réels a, b, c tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, soit le système

$$\begin{cases} a + 4b + 7c = 0 \\ 2a + 5b + 8c = 0 \\ 3a + 6b + 9c = 0 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donnent $-3b - 6c = 0$ et $-6b - 12c = 0$, la seconde étant le double de la première : il reste deux équations pour trois inconnues, donc une infinité de solutions. Avec $c = 1$ on trouve $b = -2$ puis $a = -4b - 7c = 8 - 7 = 1$: c'est la relation annoncée.
2. Vrai. Soient (f_1,f_2,f_3) une base de F et (g_1,g_2,g_3) une base de G. La famille $(f_1,f_2,f_3,g_1,g_2,g_3)$ compte six vecteurs de $\mathbb{R}^5$, espace de dimension 5 : elle est donc **liée**, car une famille libre d'un espace de dimension 5 a au plus cinq vecteurs. Il existe ainsi des réels a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3, **non tous nuls**, tels que

$$a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 + b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3 = 0.$$

Posons $w = a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$. D'une part $w \in F$, comme combinaison linéaire de vecteurs de F. D'autre part la relation donne $w = -(b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3)$, donc $w \in G$. Ainsi $w \in F \cap G$.
Reste à voir que $w \neq 0$. Supposons $w = 0$. Alors $a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 = 0$, et la liberté de (f_1,f_2,f_3) impose $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; de même $b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3 = -w = 0$ impose $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Tous les coefficients seraient nuls, ce qui contredit leur choix. Donc $w \neq 0$, et $F \cap G \neq \{0\}$. □
Remarque. Les étudiants qui connaissent la formule de Grassmann (vue en L1 ou en L2 selon les facs) concluent en une ligne : $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) \geqslant 3 + 3 - 5 = 1$. La démonstration ci-dessus n'utilise que le lemme « plus de vecteurs que la dimension entraîne liée », et c'est en fait la preuve de Grassmann dans ce cas particulier.
3. Faux. Supposons qu'un tel endomorphisme f existe. Le théorème du rang, appliqué à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, donne

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

Or les deux sous-espaces imposés sont des droites, engendrées chacune par un vecteur non nul : $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et $\dim \operatorname{Im} f = 1$, de somme $2 \neq 3$. C'est absurde, donc aucun endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ n'a ce noyau et cette image. □

Attention. L'argument porte sur les **dimensions**, pas sur la position des deux droites : aucune paire de droites de $\mathbb{R}^3$ ne peut être le noyau et l'image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. En revanche, avec $\operatorname{Im} f$ remplacé par un plan, de tels endomorphismes existent.

4. Vrai. Soient a, b, c, d des scalaires tels que

$$au + bv + cw + dx = 0_E.$$

Montrons que $a = b = c = d = 0$.

Le coefficient de x d'abord. Supposons $d \neq 0$. On peut alors diviser par d :

$$x = -\frac{a}{d}\,u - \frac{b}{d}\,v - \frac{c}{d}\,w,$$

ce qui montre que $x \in \operatorname{Vect}(u, v, w)$, contrairement à l'hypothèse. Donc $d = 0$.

Les autres ensuite. La relation devient $au + bv + cw = 0_E$, et la liberté de (u, v, w) donne $a = b = c = 0$.

Tous les coefficients sont nuls : la famille (u, v, w, x) est libre. □

C'est l'argument qui fait marcher le théorème de la base incomplète : on prolonge une famille libre par un vecteur pris **hors** de l'espace qu'elle engendre, et la liberté se conserve. L'ordre du raisonnement compte : on isole d'abord le coefficient du vecteur ajouté, le seul sur lequel l'hypothèse porte.

5. Faux. Les matrices élémentaires

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas inversibles : pour une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le critère du cours est $ad - bc \neq 0$, et ici $ad - bc = 1 \times 0 - 0 \times 0 = 0$ dans les deux cas. (On peut aussi remarquer que $E_{11} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: le système homogène a une solution non nulle.)

Pourtant leur somme vaut $E_{11} + E_{22} = I_2$, qui est inversible. L'ensemble des matrices non inversibles n'est donc pas stable par addition : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. □

On remarquera qu'il contient bien la matrice nulle : vérifier la présence de 0 ne suffit jamais, c'est la stabilité qui décide, et c'est elle qu'un contre-exemple doit mettre en défaut.

Exercice 2 (4 points) : Trois tickets de caisse

Une papeterie vend des cahiers, des stylos et des classeurs, à des prix unitaires notés respectivement x, y et z (en euros). On dispose de trois tickets de caisse :

— ticket 1 : 1 cahier, 2 stylos et 1 classeur, pour 9 euros ;
— ticket 2 : 2 cahiers, 1 stylo et 3 classeurs, pour 13 euros ;
— ticket 3 : 3 cahiers, 3 stylos et 4 classeurs, pour c euros, le montant c étant mal imprimé.

1. *(0,75 pt)* Écrire le système linéaire (S_c) d'inconnues x, y, z traduisant les trois tickets. À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer pour quelle valeur de c ce système admet des solutions. Un client affirme avoir payé 21 euros au ticket 3 : est-ce possible ?

2. *(1 pt)* On prend la valeur de c trouvée à la question 1. Résoudre (S_c) et écrire l'ensemble des solutions sous la forme $X_0 + \mathrm{Vect}(K)$, où X_0 est une solution à coordonnées entières positives et K un vecteur de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera. Interpréter concrètement le vecteur K, puis déterminer les valeurs du paramètre pour lesquelles les trois prix sont strictement positifs.

3. *(0,5 pt)* Un quatrième client achète 1 cahier et 5 stylos. Montrer que, quel que soit le prix exact des articles, il paie forcément 14 euros. Son ticket permet-il de déterminer les prix ?

4. *(1,25 pt)* Un cinquième client achète 1 cahier, 1 stylo et 1 classeur pour 7 euros. On note

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que M est inversible et calculer M^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan. En déduire les trois prix, puis, plus généralement, les prix x, y, z en fonction des montants a, b, d des tickets 1, 2 et 5, lorsque ces montants sont quelconques.

5. *(0,5 pt)* On note A la matrice du système (S_c). Donner le rang de A, une base de $\mathrm{Ker}A$, et vérifier sur cet exemple le théorème du rang.

Corrigé

1. Chaque ticket donne une équation, le coefficient de chaque inconnue étant le nombre d'articles correspondants :

$$(S_c) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y + 3z = 13 \\ 3x + 3y + 4z = c \end{cases}$$

On élimine x des lignes 2 et 3 à l'aide de la ligne 1, qui a un pivot égal à 1 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 & \\ \quad -3y + z = 13 - 18 = -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad -3y + z = c - 27 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

Les lignes 2 et 3 ont le même premier membre ; l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ fait disparaître toutes les inconnues de la troisième ligne :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 & \\ \quad -3y + z = -5 & \\ \qquad 0 = c - 27 + 5 = c - 22 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires conservent l'ensemble des solutions. La dernière ligne est une **condition de compatibilité** : si $c \neq 22$, elle s'écrit $0 = c - 22$ avec un second membre non nul, et

le système n'a aucune solution ; si $c = 22$, elle se réduit à $0 = 0$ et il reste un système échelonné de deux équations, qui a des solutions (question 2).
Le système admet des solutions si et seulement si $c = 22$. Un ticket 3 de 21 euros est donc **impossible** : quels que soient les prix, le ticket 3 vaut exactement la somme des tickets 1 et 2, puisque 3 cahiers, 3 stylos et 4 classeurs, c'est le contenu des tickets 1 et 2 réunis ($1+2=3$, $2+1=3$, $1+3=4$). Le pivot l'a découvert tout seul : la ligne nulle obtenue exprime $L_3 = L_1 + L_2$, et la condition $c = 9 + 13$.
2. Avec $c = 22$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ \quad -3y + z = -5 \end{cases}$$

Les inconnues principales sont x et z ; on prend y comme paramètre, et l'on pose $y = t$ avec $t \in \mathbb{R}$. La deuxième équation donne $z = 3t - 5$, puis la première

$$x = 9 - 2t - z = 9 - 2t - 3t + 5 = 14 - 5t.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \big\{(14 - 5t,\ t,\ 3t - 5) \;\big|\; t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Mise sous la forme demandée. Pour $t = 2$ on obtient la solution $X_0 = (4, 2, 1)$, à coordonnées entières positives. En posant $t = 2 + s$, il vient $14 - 5t = 4 - 5s$, $t = 2 + s$ et $3t - 5 = 1 + 3s$, d'où

$$\mathcal{S} = \big\{(4, 2, 1) + s(-5, 1, 3) \;\big|\; s \in \mathbb{R}\big\} = X_0 + \mathrm{Vect}(K), \qquad K = (-5, 1, 3).$$

Vérification. X_0 est solution : $4+4+1 = 9$, $8+2+3 = 13$, $12+6+4 = 22$. Et K est solution du système homogène : $-5+2+3 = 0$, $-10+1+9 = 0$, $-15+3+12 = 0$. C'est la structure annoncée par le cours : **une solution particulière plus les solutions du système homogène**.
Interprétation de K. Le vecteur $K = (-5, 1, 3)$ est un « panier fantôme » : retirer 5 cahiers et ajouter 1 stylo et 3 classeurs ne change le montant d'aucun des trois tickets. Autrement dit, si les prix (x, y, z) conviennent, les prix $(x - 5s, y + s, z + 3s)$ conviennent aussi : baisser le cahier de $5s$ euros en montant le stylo de s et le classeur de $3s$ laisse les trois totaux inchangés. C'est pour cela que les tickets 1 à 3 ne suffisent pas à connaître les prix.
Prix positifs. En revenant au paramètre $t = y$, il faut

$$14 - 5t > 0, \qquad t > 0, \qquad 3t - 5 > 0,$$

c'est-à-dire $t < \dfrac{14}{5}$, $t > 0$ et $t > \dfrac{5}{3}$. Les trois conditions réunies donnent

$$\frac{5}{3} < y < \frac{14}{5},$$

soit un prix du stylo strictement compris entre environ 1,67 et 2,80 euros. Il y a donc une infinité de triplets de prix plausibles, ce qui confirme qu'il manque une information.
3. Le contenu du ticket 4 est $(1, 5, 0)$ (un cahier, cinq stylos, aucun classeur). Cherchons-le comme combinaison des tickets 1 et 2, c'est-à-dire des réels λ, μ tels que

$$\lambda(1, 2, 1) + \mu(2, 1, 3) = (1, 5, 0).$$

Les trois coordonnées donnent $\lambda + 2\mu = 1$, $2\lambda + \mu = 5$ et $\lambda + 3\mu = 0$. La dernière donne $\lambda = -3\mu$, et la première devient $-3\mu + 2\mu = 1$, d'où $\mu = -1$ et $\lambda = 3$; la deuxième est alors vérifiée : $2 \times 3 - 1 = 5$. Ainsi

$$(1, 5, 0) = 3 \times (1, 2, 1) - (2, 1, 3) :$$

le ticket 4, c'est trois fois le ticket 1 moins le ticket 2. Par linéarité du montant, quels que soient les prix vérifiant les tickets 1 et 2,

$$x + 5y = 3(x + 2y + z) - (2x + y + 3z) = 3 \times 9 - 13 = 14.$$

Le client paie forcément 14 euros. Son ticket **n'apporte aucune information** : l'équation $x + 5y = 14$ est conséquence des deux premières, elle ne réduit pas l'ensemble des solutions. On le vérifie sur la forme paramétrée : $(14 - 5t) + 5t = 14$ pour tout t.

4. *Inversibilité et inverse par Gauss-Jordan.* On applique à la matrice augmentée $(M \mid I_3)$ des opérations sur les lignes jusqu'à obtenir $(I_3 \mid M^{-1})$; si un pivot nul apparaissait sans échange possible, M ne serait pas inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On échange L_2 et L_3 pour disposer d'un pivot plus simple, puis on fait $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

La matrice de gauche est triangulaire à pivots $1, -1, 1$ tous non nuls : M **est inversible**. On termine : $L_2 \leftarrow -L_2$ donne la ligne $(0, 1, 0 \mid 1, 0, -1)$, puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$ donne la ligne $(1, 0, 0 \mid 1 - 2 - 1,\ 0 - 0 - 1,\ 0 + 2 + 3)$. D'où

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right), \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vérification. La première ligne de M fois les colonnes de M^{-1} donne $-2+2+1 = 1$, $-1+0+1 = 0$ et $5 - 2 - 3 = 0$; la deuxième $-4 + 1 + 3 = 0$, $-2 + 0 + 3 = 1$, $10 - 1 - 9 = 0$; la troisième $-2 + 1 + 1 = 0$, $-1 + 0 + 1 = 0$, $5 - 1 - 3 = 1$. On a bien $MM^{-1} = I_3$, ce qui suffit pour une matrice carrée.

Les prix. Les tickets 1, 2 et 5 forment le système $MX = B$ avec $X = (x, y, z)$ en colonne et $B = (9, 13, 7)$ en colonne. Comme M est inversible, ce système a une unique solution, $X = M^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 - 13 + 35 \\ 9 + 0 - 7 \\ 9 + 13 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le cahier coûte 4 euros, le stylo 2 euros et le classeur 1 euro. C'est la solution X_0 de la question 2, ce qui est rassurant : elle correspond à $t = 2$, bien dans l'intervalle $\left]\frac{5}{3}, \frac{14}{5}\right[$, et elle vérifie $4 + 2 + 1 = 7$.

Cas général. Pour des montants quelconques a, b, d :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a - b + 5d \\ a - d \\ a + b - 3d \end{pmatrix}.$$

Calculer M^{-1} une fois pour toutes permet de résoudre tous les systèmes de même matrice par un simple produit. On notera que le prix du stylo vaut $y = a - d$: c'est la différence entre le ticket 1 et le ticket 5, qui ne diffèrent que d'un stylo.

5. *Rang.* La réduction de la question 1 a laissé deux lignes non nulles à pivots 1 et -3, et une ligne nulle : $\mathrm{rg}A = 2$. On peut le dire autrement : la troisième ligne est la somme des deux premières, et les deux premières ne sont pas proportionnelles.

Noyau. $\mathrm{Ker}A$ est l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$, qui s'échelonne de la même façon en $x + 2y + z = 0$ et $-3y + z = 0$. Avec $y = s$ on trouve $z = 3s$ et $x = -2s - 3s = -5s$:

$$\mathrm{Ker}A = \{s(-5, 1, 3) \mid s \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-5, 1, 3)).$$

Le vecteur $K = (-5, 1, 3)$ est non nul, il forme donc une base de $\mathrm{Ker}A$, qui est de dimension 1.

Théorème du rang. Pour l'application $X \mapsto AX$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$: $\dim \mathrm{Ker}A + \mathrm{rg}A = 1 + 2 = 3$, qui est bien la dimension de l'espace de départ. La question 2 en était une lecture concrète : un paramètre libre dans les solutions, c'est une dimension de noyau ; deux tickets indépendants, c'est un rang 2. Pour connaître les prix, il fallait un rang 3, ce qu'apporte le ticket 5 et non le ticket 4.

Exercice 3 (4,5 points) : Les fonctions affines par morceaux sur [0, 2]

On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$, et E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}$ dont la restriction à $[0,1]$ est affine et la restriction à $[1,2]$ est affine. Autrement dit, $f \in E$ lorsqu'il existe des réels a, b, c, d tels que

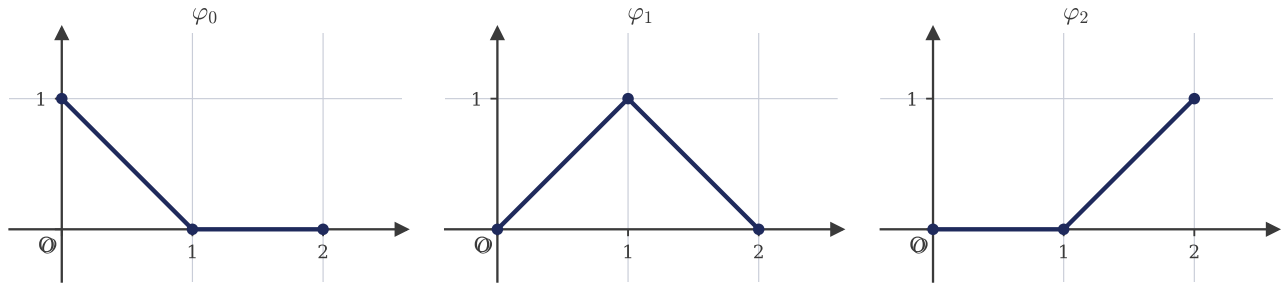
$$f(x) = ax + b \ \text{ pour } x \in [0,1] \qquad \text{et} \qquad f(x) = cx + d \ \text{ pour } x \in [1,2].$$

1. *(0,75 pt)* Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$. Pourquoi une fonction de E est-elle automatiquement continue en 1 ?

2. *(0,75 pt)* On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(f) = \big(f(0), f(1), f(2)\big)$. Montrer que φ est linéaire et injective.

3. *(0,75 pt)* Montrer que φ est surjective. En déduire la dimension de E.

4. *(0,75 pt)* On note φ_0, φ_1, φ_2 les fonctions de E telles que $\varphi(\varphi_0) = (1,0,0)$, $\varphi(\varphi_1) = (0,1,0)$ et $\varphi(\varphi_2) = (0,0,1)$, représentées ci-dessous. Donner leurs expressions sur $[0,1]$ et sur $[1,2]$, justifier que $\mathcal{B} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une base de E, et montrer que les coordonnées de $f \in E$ dans cette base sont $\big(f(0), f(1), f(2)\big)$.



5. *(1 pt)* On pose $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ et $g_3(x) = |x - 1|$ pour $x \in [0,2]$. Vérifier que g_1, g_2, g_3 appartiennent à E, écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}' = (g_1, g_2, g_3)$, et montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ de la fonction $h \in E$ telle que $h(0) = 1$, $h(1) = 4$ et $h(2) = 3$, puis écrire $h(x)$ à l'aide d'une seule formule valable sur $[0,2]$.

6. *(0,5 pt)* On considère $\Delta : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Delta(f) = \big(f(1) - f(0),\ f(2) - f(1)\big)$, qui associe à f ses deux pentes. Écrire la matrice de Δ dans la base $\mathcal{B}$ de E et la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$, puis montrer sans calcul supplémentaire que Δ est surjective. Interpréter.

Corrigé

1. *E est inclus dans $\mathcal{F}$ et contient la fonction nulle.* Par définition, $E \subset \mathcal{F}$. La fonction nulle est dans E, avec $a = b = c = d = 0$.
Stabilité par combinaison linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe des réels a, b, c, d et a', b', c', d' tels que

$$f(x) = ax + b, \quad g(x) = a'x + b' \quad \text{pour } x \in [0,1],$$

$$f(x) = cx + d, \quad g(x) = c'x + d' \quad \text{pour } x \in [1,2].$$

Alors, pour $x \in [0,1]$,

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(ax + b) + \mu(a'x + b') = (\lambda a + \mu a')\,x + (\lambda b + \mu b'),$$

et de même, pour $x \in [1,2]$, $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda c + \mu c')\,x + (\lambda d + \mu d')$. La restriction de $\lambda f + \mu g$ à chacun des deux intervalles est donc affine : $\lambda f + \mu g \in E$.
Conclusion. E est une partie de $\mathcal{F}$ qui contient la fonction nulle et qui est stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$. □

Continuité en 1. Le point 1 appartient aux deux intervalles. Une fonction $f \in E$ étant une fonction, elle n'a qu'une valeur en 1, et les deux formules doivent la donner toutes les deux : $f(1) = a + b = c + d$. Or $x \mapsto ax + b$ est continue sur $[0, 1]$ et $x \mapsto cx + d$ sur $[1, 2]$; les limites de f à gauche et à droite en 1 valent donc $a + b$ et $c + d$, qui sont égales à $f(1)$. La continuité en 1 n'est pas une hypothèse supplémentaire : elle est imposée par le fait que 1 est commun aux deux morceaux. Les fonctions de E sont les fonctions continues dont le graphe est formé de deux segments.

2. *Linéarité.* Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par définition des opérations sur les fonctions, $(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda f(t) + \mu g(t)$ pour tout t, donc

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \big(\lambda f(0) + \mu g(0),\ \lambda f(1) + \mu g(1),\ \lambda f(2) + \mu g(2)\big) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g).$$

L'application φ est linéaire.

Injectivité. Comme φ est linéaire, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Soit $f \in E$ tel que $\varphi(f) = (0, 0, 0)$, avec les réels a, b, c, d de la définition. Sur $[0, 1]$: $f(0) = b = 0$ et $f(1) = a + b = 0$, donc $a = b = 0$, et f est nulle sur $[0, 1]$. Sur $[1, 2]$: $f(1) = c + d = 0$ et $f(2) = 2c + d = 0$; par différence $c = 0$, puis $d = 0$, et f est nulle sur $[1, 2]$. Donc f est la fonction nulle : $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, et φ est injective. □

Le fond de l'argument est qu'une fonction affine sur un segment est déterminée par ses valeurs aux deux extrémités : deux points déterminent une droite.

3. *Surjectivité.* Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons $f \in E$ telle que $\varphi(f) = (\alpha, \beta, \gamma)$. On relie les points $(0, \alpha)$ et $(1, \beta)$, puis $(1, \beta)$ et $(2, \gamma)$ par des segments, ce qui conduit à poser

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + (\beta - \alpha)\, x & \text{si } x \in [0, 1], \\ \beta + (\gamma - \beta)(x - 1) & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

La définition est cohérente en $x = 1$, où les deux formules donnent $\alpha + \beta - \alpha = \beta$ et $\beta + 0 = \beta$. Chacune des deux formules est affine en x (la seconde s'écrit $(\gamma - \beta)\, x + (2\beta - \gamma)$), donc $f \in E$. Enfin $f(0) = \alpha$, $f(1) = \beta$ et $f(2) = \beta + \gamma - \beta = \gamma$: on a bien $\varphi(f) = (\alpha, \beta, \gamma)$. L'application φ est surjective.

Dimension. L'application φ est linéaire, injective et surjective : c'est un **isomorphisme** de E sur $\mathbb{R}^3$. Deux espaces isomorphes ont la même dimension, donc

$$\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

On pourra remarquer que E est un sous-espace d'un espace de dimension infinie, $\mathcal{F}$, et qu'il est pourtant de dimension finie : c'est l'isomorphisme qui l'a montré, sans exhiber de base au préalable.

4. *Expressions.* D'après la formule de la question 3, appliquée successivement à $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{sur } [0, 1] \\ 0 & \text{sur } [1, 2] \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} x & \text{sur } [0, 1] \\ 2 - x & \text{sur } [1, 2] \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0, 1] \\ x - 1 & \text{sur } [1, 2] \end{cases}$$

Ces fonctions sont uniques, par injectivité de φ. On reconnaît sur la figure les trois « chapeaux » : chacun vaut 1 en un seul des trois points 0, 1, 2 et 0 aux deux autres.

Base. Les fonctions φ_0, φ_1, φ_2 sont les images de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ par l'isomorphisme φ^{-1}. Or l'image d'une base par un isomorphisme est une base. Donc $\mathcal{B}$ est une base de E.

On peut aussi le vérifier directement. *Liberté* : si $\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0$, on évalue en 0, 1, 2 et l'on obtient $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. *Cardinal* : trois vecteurs libres dans un espace de dimension 3 forment une base.
Coordonnées. Soit $f \in E$, et posons $g = f(0)\,\varphi_0 + f(1)\,\varphi_1 + f(2)\,\varphi_2$, qui est dans E. Par linéarité,

$$\varphi(g) = f(0)\,(1,0,0) + f(1)\,(0,1,0) + f(2)\,(0,0,1) = \big(f(0), f(1), f(2)\big) = \varphi(f).$$

L'injectivité de φ donne $g = f$, c'est-à-dire

$$f = f(0)\,\varphi_0 + f(1)\,\varphi_1 + f(2)\,\varphi_2.$$

Les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$ sont donc $\big(f(0), f(1), f(2)\big)$, par unicité des coordonnées dans une base. □ Autrement dit, dans cette base, **la coordonnée d'une fonction est sa valeur en un nœud** : c'est ce qui rend cette base si commode, et c'est l'idée des éléments finis.
5. *Appartenance à E.* La fonction constante g_1 et la fonction g_2 sont affines sur $[0,2]$ tout entier, donc sur chacun des deux intervalles. Pour g_3, on supprime la valeur absolue selon le signe de $x-1$:

$$g_3(x) = 1 - x \ \text{ sur } [0,1], \qquad g_3(x) = x - 1 \ \text{ sur } [1,2],$$

deux expressions affines : $g_3 \in E$.
Matrice de passage. Ses colonnes sont les coordonnées de g_1, g_2, g_3 dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire, d'après la question 4, leurs valeurs en 0, 1, 2 :

$$g_1 : (1,1,1), \qquad g_2 : (0,1,2), \qquad g_3 : (1,0,1),$$

d'où

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}'$ est une base. Une famille de trois vecteurs de E est une base si et seulement si la matrice de leurs coordonnées dans une base est inversible, ce que l'on teste par le pivot. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, donnent successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trois pivots non nuls (1, 1, 2) : P est de rang 3, donc inversible, et $\mathcal{B}'$ est une base de E.
Coordonnées de h. Dans $\mathcal{B}$, les coordonnées de h sont $X = (1,4,3)$ d'après la question 4. Ses coordonnées $X' = (p,q,r)$ dans $\mathcal{B}'$ vérifient la formule de changement de base $X = PX'$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} p + r = 1 \\ p + q = 4 \\ p + 2q + r = 3 \end{cases}$$

Les deux premières donnent $r = 1 - p$ et $q = 4 - p$; la troisième devient $p + 8 - 2p + 1 - p = 3$, soit $9 - 2p = 3$, d'où $p = 3$, puis $q = 1$ et $r = -2$. Les coordonnées de h dans $\mathcal{B}'$ sont $(3, 1, -2)$, c'est-à-dire

$$h(x) = 3 + x - 2\,|x-1| \qquad \text{pour tout } x \in [0,2].$$

Vérification. $h(0) = 3 + 0 - 2 = 1$, $h(1) = 3 + 1 - 0 = 4$, $h(2) = 3 + 2 - 2 = 3$. Le sens de la formule $X = PX'$ est le piège classique : P donne les **anciennes** coordonnées en fonction des **nouvelles**, d'où le système à résoudre plutôt qu'un simple produit.

6. *Matrice.* L'application Δ est linéaire (même argument qu'à la question 2 : chaque composante est une combinaison des valeurs de f). Ses colonnes sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}$, écrites dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta(\varphi_0) = (0-1,\ 0-0) = (-1,0), \quad \Delta(\varphi_1) = (1-0,\ 0-1) = (1,-1), \quad \Delta(\varphi_2) = (0,1),$$

donc

$$\mathrm{Mat}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Noyau. $f \in \operatorname{Ker}\Delta$ si et seulement si $f(1) - f(0) = 0$ et $f(2) - f(1) = 0$, c'est-à-dire $f(0) = f(1) = f(2)$. D'après la question 4, $f = f(0)(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2)$, et $\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = g_1$ puisque ses valeurs en 0, 1, 2 sont $(1,1,1)$. Donc

$$\operatorname{Ker}\Delta = \mathrm{Vect}(g_1),$$

l'ensemble des fonctions constantes, de dimension 1.
Surjectivité. Le théorème du rang appliqué à $\Delta \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^2)$ donne $\operatorname{rg}\Delta = \dim E - \dim\operatorname{Ker}\Delta = 3 - 1 = 2 = \dim\mathbb{R}^2$. Le sous-espace $\operatorname{Im}\Delta$ de $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 : il est égal à $\mathbb{R}^2$, et Δ est surjective.
Interprétation. On peut choisir librement les deux pentes d'une fonction affine par morceaux, et deux fonctions qui ont les mêmes pentes diffèrent d'une constante : c'est l'analogue discret du fait que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Exercice 4 (8,5 points) : Problème : les endomorphismes de carré égal à moins l'identité

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel **réel** de dimension finie $n \geqslant 1$, et l'on étudie les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ f = -\mathrm{id}_E.$$

On note $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de la rotation d'un quart de tour du plan, qui vérifie $R^2 = -I_2$.

Partie A : un exemple dans $\mathbb{R}^4$ (2,5 points)

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.1. *(0,5 pt)* Calculer A^2 et en déduire que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$.

A.2. *(0,5 pt)* On pose $x = e_1$ et $y = e_3$. Calculer $f(x)$ et $f(y)$, puis montrer que $\mathcal{B}' = (x, f(x), y, f(y))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

A.3. *(0,75 pt)* Sans calculer de nouveau produit matriciel, écrire la matrice J de f dans la base $\mathcal{B}'$.

A.4. *(0,75 pt)* On note P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$. Écrire P, calculer P^{-1} en exprimant e_1, e_2, e_3, e_4 dans la base $\mathcal{B}'$, puis vérifier l'égalité $AP = PJ$. Quelle relation entre A, P et J en déduit-on ?

Partie B : propriétés générales (3 points)

Dans cette partie et la suivante, $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.

B.1. *(0,5 pt)* Montrer que f est bijective et préciser f^{-1}.

B.2. *(0,75 pt)* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ (f + \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et en déduire que $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est bijective. En déduire que, pour tout vecteur $x \neq 0_E$, les vecteurs x et $f(x)$ ne sont pas colinéaires, puis que la famille $(x, f(x))$ est libre.

B.3. *(0,75 pt)* Soient F un sous-espace vectoriel de E stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$), y un vecteur de E n'appartenant pas à F, et a, b deux réels tels que $ay + bf(y) \in F$. Montrer que $a = b = 0$. *On pourra appliquer f au vecteur $z = ay + bf(y)$, puis former une combinaison de z et de $f(z)$ qui fasse disparaître $f(y)$.*

B.4. *(1 pt)* Soient $k \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_k$ des vecteurs de E tels que la famille

$$\mathcal{B}_k = (x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \ldots, x_k, f(x_k))$$

soit libre. On note $F_k = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_k)$.

a. Montrer que F_k est stable par f.

b. Soit $y \in E$ n'appartenant pas à F_k. Montrer que la famille $(x_1, f(x_1), \ldots, x_k, f(x_k), y, f(y))$ est libre.

Partie C : le théorème de structure (3 points)

C.1. *(1,25 pt)* Démontrer que n est pair et que, si l'on note $n = 2p$, il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de E tels que $\mathcal{B} = (x_1, f(x_1), \ldots, x_p, f(x_p))$ soit une base de E. On décrira une construction pas à pas, et l'on justifiera qu'elle s'arrête.

C.2. *(0,5 pt)* Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Comparer au résultat de la partie A.

C.3. *(0,5 pt)* En déduire qu'il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$. À quels endroits de la partie B a-t-on utilisé que les scalaires sont réels ? Donner un espace vectoriel complexe de dimension 1 muni d'un endomorphisme g vérifiant $g \circ g = -\mathrm{id}$.

C.4. *(0,75 pt)* Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_2$ si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PRP^{-1}$. Application : vérifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = -I_2$ et donner une matrice P explicite.

Corrigé

Partie A

A.1. On calcule $A^2 = A \times A$ coefficient par coefficient. Les lignes de A sont $(0,0,0,-1)$, $(1,0,-1,0)$, $(0,1,0,-1)$, $(1,0,0,0)$ et ses colonnes $(0,1,0,1)$, $(0,0,1,0)$, $(0,-1,0,0)$, $(-1,0,-1,0)$. Par exemple, le coefficient $(1,1)$ vaut $0\times 0+0\times 1+0\times 0+(-1)\times 1=-1$, le coefficient $(2,3)$ vaut $1\times 0+0\times(-1)+(-1)\times 0+0\times 0=0$, le coefficient $(3,3)$ vaut $0\times 0+1\times(-1)+0\times 0+(-1)\times 0=-1$. Le calcul complet donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_4.$$

Une façon rapide de le contrôler est de suivre les vecteurs de base : $f(e_1) = e_2 + e_4$ (première colonne), puis $f(e_2+e_4) = f(e_2)+f(e_4) = e_3 + (-e_1 - e_3) = -e_1$. De même $f(e_3) = -e_2$ et $f(-e_2) = -e_3$.
Comme la matrice de $f \circ f$ dans la base canonique est $A \times A = A^2$, on a $\mathrm{Mat}(f\circ f) = -I_4 = \mathrm{Mat}(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$, et deux endomorphismes qui ont la même matrice dans une même base sont égaux : $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$.

A.2. Les images se lisent sur les colonnes de A : $f(x) = f(e_1)$ est la première colonne et $f(y) = f(e_3)$ la troisième,

$$f(x) = (0,1,0,1) = e_2 + e_4, \qquad f(y) = (0,-1,0,0) = -e_2.$$

$\mathcal{B}'$ est génératrice. Exprimons chaque vecteur de la base canonique à l'aide de $\mathcal{B}'$:

$$e_1 = x, \qquad e_2 = -f(y), \qquad e_3 = y, \qquad e_4 = (e_2+e_4) - e_2 = f(x) + f(y).$$

Les quatre vecteurs de la base canonique appartiennent à $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}')$, qui est un sous-espace : il contient donc $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4) = \mathbb{R}^4$. La famille $\mathcal{B}'$ engendre $\mathbb{R}^4$.
Conclusion. $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice de quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, espace de dimension 4 : c'est une base. □

A.3. La colonne j de J contient les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ de l'image du j-ième vecteur de $\mathcal{B}'$. On utilise $f \circ f = -\mathrm{id}$ au lieu de recalculer :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0\cdot x + 1\cdot f(x) + 0\cdot y + 0\cdot f(y), \\ f(f(x)) &= -x, \\ f(y) &= 0\cdot x + 0\cdot f(x) + 0\cdot y + 1\cdot f(y), \\ f(f(y)) &= -y. \end{aligned}$$

D'où

$$J = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0_2 \\ 0_2 & R \end{pmatrix}.$$

Une matrice pleine de coefficients épars est devenue, dans une base bien choisie, deux copies de la rotation d'un quart de tour : c'est tout l'objet du problème de montrer que cela n'a rien d'un hasard.

A.4. *La matrice P.* Ses colonnes sont les coordonnées dans la base canonique des vecteurs de $\mathcal{B}'$, à savoir $x = (1,0,0,0)$, $f(x) = (0,1,0,1)$, $y = (0,0,1,0)$, $f(y) = (0,-1,0,0)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice P^{-1}. C'est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base canonique : ses colonnes sont les coordonnées de e_1, e_2, e_3, e_4 dans $\mathcal{B}'$, déjà obtenues à la question A.2. Dans l'ordre $(x, f(x), y, f(y))$, on a $e_1 \mapsto (1,0,0,0)$, $e_2 = -f(y) \mapsto (0,0,0,-1)$, $e_3 \mapsto (0,0,1,0)$ et $e_4 = f(x) + f(y) \mapsto (0,1,0,1)$, d'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Contrôle. La deuxième ligne de P, $(0,1,0,-1)$, fois les colonnes de P^{-1} donne successivement 0, $0+0+0+1=1$, 0 et $1-1=0$; la quatrième ligne, $(0,1,0,0)$, donne 0, 0, 0, 1. Les deux autres lignes de P sont celles de I_4 et reproduisent les lignes correspondantes de P^{-1}, qui sont bien $(1,0,0,0)$ et $(0,0,1,0)$. Donc $PP^{-1} = I_4$.

Vérification de $AP = PJ$. Les colonnes de AP sont A fois les colonnes de P, c'est-à-dire $f(x)$, $f(f(x))$, $f(y)$, $f(f(y))$, soit $(0,1,0,1)$, $(-1,0,0,0)$, $(0,-1,0,0)$, $(0,0,-1,0)$. Les colonnes de PJ sont P fois les colonnes de J : la première colonne de J est $(0,1,0,0)$, et P la transforme en la deuxième colonne de P, $(0,1,0,1)$; la deuxième est $(-1,0,0,0)$, transformée en $-(1,0,0,0)$; la troisième $(0,0,0,1)$ donne la quatrième colonne de P, $(0,-1,0,0)$; la quatrième $(0,0,-1,0)$ donne $-(0,0,1,0)$. Dans les deux cas,

$$AP = PJ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche par P^{-1}, on obtient $J = P^{-1}AP$, ce qui est exactement la formule de changement de base $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,P$; de façon équivalente, $A = PJP^{-1}$.

Partie B

B.1. L'hypothèse s'écrit $f \circ (-f) = -(f \circ f) = \mathrm{id}_E$, et de même $(-f) \circ f = \mathrm{id}_E$. L'application $-f$ est donc une réciproque de f des deux côtés : f est bijective et

$$f^{-1} = -f.$$

(Ici $-f$ désigne l'endomorphisme $x \mapsto -f(x)$; les égalités utilisent la linéarité de f, qui donne $f(-f(x)) = -f(f(x))$.)

B.2. *Le calcul.* Soit $x \in E$. Par linéarité de f,

$$\begin{aligned}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(f(x) + \lambda x) &= f\big(f(x)\big) + \lambda f(x) - \lambda f(x) - \lambda^2 x \\ &= -x - \lambda^2 x = -(1+\lambda^2)\,x.\end{aligned}$$

Donc $(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ (f + \lambda\,\mathrm{id}_E) = -(1+\lambda^2)\,\mathrm{id}_E$, et le même calcul, en échangeant les rôles de λ et $-\lambda$, donne $(f + \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \lambda\,\mathrm{id}_E) = -(1+\lambda^2)\,\mathrm{id}_E$.

La bijectivité. Comme λ est réel, $1+\lambda^2 \geqslant 1 > 0$. Posons $g = -\dfrac{1}{1+\lambda^2}(f + \lambda \mathrm{id}_E)$. Les deux égalités précédentes donnent $(f-\lambda\mathrm{id}_E)\circ g = \mathrm{id}_E$ et $g\circ(f-\lambda\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$: l'endomorphisme $f-\lambda\mathrm{id}_E$ est bijectif, de réciproque g.
Pas de colinéarité. Soit $x \neq 0_E$, et supposons qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors $(f-\lambda\mathrm{id}_E)(x) = 0_E$, donc $x \in \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$ puisque cet endomorphisme est injectif. C'est absurde. Ainsi $f(x)$ n'est jamais un multiple de x lorsque $x \neq 0_E$.
Liberté. Soient α, β deux réels tels que $\alpha x + \beta f(x) = 0_E$. Si $\beta \neq 0$, on obtient $f(x) = -\dfrac{\alpha}{\beta}x$, ce qui vient d'être exclu ; donc $\beta = 0$. Il reste $\alpha x = 0_E$ avec $x \neq 0_E$, donc $\alpha = 0$. La famille $(x, f(x))$ est libre. □
Géométriquement : aucune droite vectorielle n'est envoyée sur elle-même par f. C'est le comportement d'une rotation d'un quart de tour, et c'est ce que la suite du problème va généraliser.
B.3. Posons $z = ay + bf(y)$, qui appartient à F par hypothèse. Comme F est stable par f, on a aussi $f(z) \in F$, et par linéarité

$$f(z) = af(y) + bf(f(y)) = af(y) - by.$$

Formons $az - bf(z)$, qui appartient à F puisque F est un sous-espace :

$$az - bf(z) = a^2y + abf(y) - abf(y) + b^2y = (a^2+b^2)\,y.$$

Supposons $a^2+b^2 \neq 0$. Alors

$$y = \frac{1}{a^2+b^2}\left(az - bf(z)\right) \in F,$$

ce qui contredit l'hypothèse $y \notin F$. Donc $a^2+b^2 = 0$, et comme a et b sont **réels**, une somme de deux carrés réels n'est nulle que si chacun l'est : $a = b = 0$. □
B.4.a. Par définition, F_k est engendré par les vecteurs x_i et $f(x_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Leurs images par f sont $f(x_i)$, qui appartient à F_k, et $f(f(x_i)) = -x_i$, qui appartient aussi à F_k. Soit maintenant $w \in F_k$, qui s'écrit $w = \sum_{i=1}^{k}(\alpha_i x_i + \beta_i f(x_i))$. Par linéarité,

$$f(w) = \sum_{i=1}^{k}(\alpha_i f(x_i) - \beta_i x_i),$$

qui est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}_k$, donc un élément de F_k. Ainsi $f(F_k) \subset F_k$. □
B.4.b. Soient des réels $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k, a, b$ tels que

$$\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i x_i + \beta_i f(x_i)) + ay + bf(y) = 0_E.$$

Montrons qu'ils sont tous nuls. La relation s'écrit

$$ay + bf(y) = -\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i x_i + \beta_i f(x_i)) \in F_k.$$

Le sous-espace F_k est stable par f (question a), $y \notin F_k$, et $ay + bf(y) \in F_k$: la question B.3 s'applique et donne $a = b = 0$. La relation se réduit alors à $\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i x_i + \beta_i f(x_i)) = 0_E$, et la liberté de $\mathcal{B}_k$ donne $\alpha_i = \beta_i = 0$ pour tout i. La famille prolongée est libre. □
On reconnaît la structure de l'affirmation 4 de l'exercice 1, à ceci près qu'on ajoute **deux** vecteurs d'un coup, y et $f(y)$; l'hypothèse $y \notin F_k$ ne suffirait pas sans la stabilité de F_k, et c'est la question B.3 qui fait le travail.

Partie C

C.1. *Initialisation.* Comme $n \geqslant 1$, l'espace E n'est pas réduit à $\{0_E\}$: choisissons $x_1 \neq 0_E$. D'après B.2, la famille $\mathcal{B}_1 = (x_1, f(x_1))$ est libre.

Étape de construction. Supposons construits $x_1, \dots, x_k$ tels que $\mathcal{B}_k$ soit libre, et notons $F_k = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_k)$.

— Si $F_k = E$, la famille $\mathcal{B}_k$ est libre et génératrice de E : c'est une base de E, et l'on s'arrête.
— Sinon, il existe un vecteur $y \in E$ qui n'appartient pas à F_k. On pose $x_{k+1} = y$, et la question B.4.b assure que $\mathcal{B}_{k+1} = (x_1, f(x_1), \dots, x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ est libre.

La construction s'arrête. À l'étape k, la famille $\mathcal{B}_k$ est une famille libre de $2k$ vecteurs de E, espace de dimension n ; or une famille libre d'un espace de dimension n a au plus n vecteurs, donc $2k \leqslant n$. L'entier k augmentant de 1 à chaque étape où l'on ne s'arrête pas, il ne peut dépasser $\dfrac{n}{2}$: la construction s'arrête après un nombre fini d'étapes, en un rang $k = p$ où $F_p = E$.

Conclusion. En ce rang, $\mathcal{B}_p$ est une base de E à $2p$ vecteurs, donc $n = \dim E = 2p$: **la dimension n est paire**, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_p = (x_1, f(x_1), \dots, x_p, f(x_p))$ est la base cherchée. □

C.2. Pour chaque i, l'image du vecteur x_i est $f(x_i)$, qui est le vecteur suivant de la base, et l'image de $f(x_i)$ est $f(f(x_i)) = -x_i$. Les colonnes d'indices $2i-1$ et $2i$ de la matrice n'ont donc de coefficients non nuls que sur les lignes $2i-1$ et $2i$, où elles valent $(0,1)$ et $(-1,0)$: on y lit le bloc $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est donc diagonale par blocs, avec p blocs égaux à R :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} R & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & R & \cdots & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & \cdots & R \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 4$, c'est exactement la matrice J de la partie A, où la construction avait été menée avec $x_1 = e_1$ et $x_2 = e_3$; on avait bien $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1, f(e_1)) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 + e_4)$, puisque tout vecteur de ce plan a sa troisième coordonnée nulle.

C.3. *Pas de racine carrée de $-I_3$.* Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$, et notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. La matrice de $f \circ f$ est $A^2 = -I_3$, donc $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. D'après C.1, la dimension 3 serait paire : c'est absurde. Il n'existe donc aucune telle matrice. □ Le même argument montre qu'aucune matrice réelle d'ordre impair n'a pour carré $-I_n$, sans aucun déterminant.

Où sert le caractère réel ? À deux endroits de la partie B. En B.2, on a utilisé $1 + \lambda^2 \neq 0$, qui tombe en défaut pour $\lambda = i$. En B.3, on a utilisé que $a^2 + b^2 = 0$ entraîne $a = b = 0$, ce qui est faux pour $a = 1$ et $b = i$.

Le contre-exemple complexe. Prenons $E = \mathbb{C}$, vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension 1 (base (1)), et $g(z) = iz$. L'application g est $\mathbb{C}$-linéaire, et $g(g(z)) = i^2 z = -z$: on a bien $g \circ g = -\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ en dimension 1, impaire. Ici $g(1) = i \cdot 1$ est colinéaire à 1, exactement ce que B.2 interdisait dans le cas réel.

C.4. *Sens direct.* Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_2$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé, qui vérifie $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. D'après C.1 avec $n = 2$, donc $p = 1$, il existe x_1 tel que $\mathcal{B} = (x_1, f(x_1))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$, et d'après C.2 la matrice de f dans cette base est R. Si P désigne la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, la formule de changement de base donne $R = P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = PRP^{-1}$, avec $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ comme toute matrice de passage.

Réciproque. Si $A = PRP^{-1}$ avec P inversible, alors

$$A^2 = PRP^{-1}PRP^{-1} = PR^2P^{-1} = P(-I_2)P^{-1} = -PP^{-1} = -I_2.$$

Application. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1\times 1 + (-2)\times 1 & 1\times(-2) + (-2)\times(-1) \\ 1\times 1 + (-1)\times 1 & 1\times(-2) + (-1)\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

On suit la construction : $x_1 = e_1 = (1, 0)$, non nul, et $f(x_1)$ est la première colonne de A, soit $(1, 1)$. Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice P étant inversible puisque $1 \times 1 - 1 \times 0 = 1 \neq 0$. *Vérification de $AP = PR$:*

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad PR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux produits coïncident, donc $A = PRP^{-1}$. □
Commentaire. On dit que A et R sont **semblables** ; selon les facs, cette notion est nommée dès la L1 ou attendue en L2, et le problème n'en avait pas besoin. Ce qu'il faut retenir est le mécanisme : une relation algébrique sur f (ici $f \circ f = -\mathrm{id}_E$) permet de **fabriquer une base adaptée** vecteur après vecteur, grâce à deux outils du chapitre, le prolongement d'une famille libre et la borne « une famille libre a au plus n vecteurs », et dans cette base la matrice devient lisible. C'est la démarche qui, en L2, conduira à la réduction des endomorphismes.