

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Fiche d'exercices — Tale spé

Difficulté : ★ application directe · ★★ standard · ★★★ approfondissement · ★★★★★ défi.

Un conseil : cherchez d'abord, le corrigé ensuite — c'est là que ça progresse.

Exercice 1 ★ Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Notions : Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point donné et de vecteur directeur donné.

a. $A(2; -1; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

c. $C(-1; 0; 4)$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $B(0; 5; -2)$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d. $D(7; 2; 0)$ et $\vec{m} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. On considère les points $E(1; 2; -1)$ et $F(4; 0; 3)$.

a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$.

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite (EF) .

3. Les points $P(10; -4; 11)$ et $Q(-5; 6; -8)$ appartiennent-ils à la droite (EF) ? Justifier.

Exercice 2 ★ Lire une représentation paramétrique

Notions : Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites d_1 , d_2 et d_3 définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 5 - s \\ z = 1 + 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$d_3 : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 5 - 4k \\ z = 6 - 8k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

1. Pour chacune des trois droites, donner les coordonnées d'un point de la droite et d'un vecteur directeur.
2.
 - a. Le point $M(5; -3; -10)$ appartient-il à d_1 ?
 - b. Le point $N(4; -1; 2)$ appartient-il à d_2 ?
 - c. Le point $P(-1; 9; -2)$ appartient-il à d_3 ?
3. Les droites d_1 et d_3 sont définies par des représentations paramétriques différentes. Décrivent-elles pourtant la même droite ? Justifier soigneusement.

Exercice 3 ★★ Points particuliers d'une droite paramétrée

Notions : Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 6 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de la droite Δ avec le plan (xOy) , c'est-à-dire le plan d'équation $z = 0$.
2. Déterminer les coordonnées du point de Δ de cote -3 .
3. Déterminer les coordonnées du point de Δ d'abscisse 11.
4. Existe-t-il un point de Δ dont les coordonnées vérifient $x + 2y = 10$? Justifier.

Exercice 4 ★ Équation cartésienne d'un plan de vecteur normal donné

Notions : Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point donné et de vecteur normal donné.

a. $A(1; 2; -3)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. $C(3; 0; 1)$ et $\vec{p} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b. $B(0; -4; 5)$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

d. $D(-2; 1; 0)$ et $\vec{q} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. On note $\mathcal{P}$ le plan obtenu à la question 1.a. Parmi les points $E(1; 6; -2)$, $F(2; 0; -3)$ et $G(-4; 0; -1)$, lesquels appartiennent à $\mathcal{P}$? Justifier.

Exercice 5 ★ Reconnaître un plan et son vecteur normal

Notions : Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations :

$$\mathcal{P}_1 : 3x - 2y + z - 6 = 0 \quad \mathcal{P}_2 : 2x = 3y - z + 4 \quad \mathcal{P}_3 : y + 5 = 0$$

1. Pour chacun des trois plans, donner un vecteur normal ainsi que les coordonnées de deux points du plan. (On commencera par réécrire l'équation de $\mathcal{P}_2$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$.)
2. Parmi les points $A(1; -1; 1)$, $B(2; 1; 2)$ et $C(0; -2; -2)$, lesquels appartiennent au plan $\mathcal{P}_1$? Justifier.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ parallèle à $\mathcal{P}_2$ et passant par le point $D(1; 2; -3)$.

Exercice 6 ★★★ Plan passant par trois points

Notions : Équation cartésienne d'un plan, Systèmes linéaires et configurations de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 1; 1)$, $B(2; 2; 0)$ et $C(4; -2; 2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés. Que peut-on en déduire pour le plan (ABC) ?
2. On cherche un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal au plan (ABC) .
 - a. Justifier que $\vec{n}$ doit vérifier $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, puis écrire le système de deux équations correspondant.
 - b. Résoudre ce système en fixant $a = 1$, et en déduire les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC) .
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
4. Vérifier que les coordonnées du point C satisfont bien l'équation obtenue.

Exercice 7 ★★ Droites et plans parallèles ou perpendiculaires

Notions : Positions relatives et intersections, Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les plans :

$$\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z - 5 = 0, \quad \mathcal{P}_2 : -4x + 2y - 6z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_3 : x + 5y + z - 2 = 0$$

- a. Donner un vecteur normal à chacun de ces trois plans.
- b. Démontrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles. Sont-ils confondus ?
- c. Démontrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont perpendiculaires.

2. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

et le plan $\mathcal{Q} : 3x - 2z + 1 = 0$.

- a. Démontrer que la droite d est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$.
 - b. Démontrer que la droite d est parallèle au plan $\mathcal{Q}$. Est-elle incluse dans $\mathcal{Q}$?
3. Soit m un réel. On considère les plans $\mathcal{R}_m : mx + 2y - z + 4 = 0$ et $\mathcal{S}_m : 3x - my + 2z - 1 = 0$. Déterminer la valeur de m pour laquelle $\mathcal{R}_m$ et $\mathcal{S}_m$ sont perpendiculaires.

Exercice 8 ★★ Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Notions : Projeté orthogonal et distances

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$x - 2y + z - 4 = 0$$

et le point $M(0; 4; 0)$.

1. Vérifier que le point M n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.
2. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$, puis déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.
4. En déduire la distance MH (on donnera la valeur exacte).

Exercice 9 ★★ Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Notions : Projeté orthogonal et distances

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite d passant par le point $A(1; 2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ainsi que le point $M(4; 3; -2)$.

On note H le projeté orthogonal de M sur la droite d .

1. Justifier que les coordonnées de H peuvent s'écrire $(1 + 2t; 2 + t; -1 - 2t)$ pour un certain réel t .
2. Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MH}$ en fonction de t , puis traduire la condition $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$ par une équation d'inconnue t .
3. En déduire les coordonnées de H , puis la distance MH (valeur exacte).
4. On considère le point $B(5; 4; -5)$.
 - a. Vérifier que B appartient à la droite d et calculer la longueur AB .
 - b. En déduire l'aire du triangle ABM .

Exercice 10 ★★★ Distances dans l'espace

Notions : Projeté orthogonal et distances

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les trois questions sont indépendantes. Dans tout l'exercice, la seule méthode attendue pour calculer une distance est la construction du projeté orthogonal.

1. **Distance d'un point à un plan.** On considère le plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z + 3 = 0$ et le point $S(1; 0; 2)$.
 - a. Vérifier que $S \notin \mathcal{P}$, puis déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de S sur $\mathcal{P}$.
 - b. En déduire la distance de S au plan $\mathcal{P}$.
2. **Distance d'un point à une droite.** On considère la droite Δ passant par $C(0; 1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et le point $N(1; 2; 5)$. Déterminer le projeté orthogonal K de N sur Δ , puis la distance de N à la droite Δ .
3. **Distance entre une droite et un plan parallèle.** On considère le plan $\mathcal{Q} : 2x + 2y + z - 5 = 0$ et la droite δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 4 - t \\ z = 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- a. Démontrer que la droite δ est strictement parallèle au plan $\mathcal{Q}$.
- b. Justifier que la distance d'un point de δ au plan $\mathcal{Q}$ ne dépend pas du point choisi, puis calculer cette distance à partir du point $R(5; 4; 5)$.

Exercice 11 ★★ Intersection d'une droite et d'un plan

Notions : Positions relatives et intersections

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les trois questions sont indépendantes. Dans chaque cas, étudier la position relative de la droite et du plan : s'ils sont sécants, on donnera les coordonnées du point d'intersection ; sinon, on précisera si la droite est strictement parallèle au plan ou incluse dans le plan.

1. La droite d_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et le plan $\mathcal{P}_1 : 2x - y + z - 11 = 0$.

2. La droite d_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et le plan $\mathcal{P}_2 : x + y - 3z + 2 = 0$.

3. La droite d_3 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = s \\ z = 2 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$ et le plan $\mathcal{P}_3 : x - y - z + 1 = 0$.

Exercice 12 ★★★ Position relative de deux droites de l'espace

Notions : Positions relatives et intersections, Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour étudier la position relative de deux droites, on veillera à utiliser des paramètres **distincts** (t pour l'une, t' pour l'autre) : les deux droites sont parcourues indépendamment l'une de l'autre.

1. On considère les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -3 + 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

- a. Justifier que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
 b. Résoudre le système formé en égalant les coordonnées d'un point de d_1 et d'un point de d_2 . En déduire que d_1 et d_2 sont sécantes et préciser les coordonnées de leur point d'intersection I .

2. On considère les droites d_3 et d_4 de représentations paramétriques :

$$d_3 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_4 : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 - t' \\ z = -2 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

- a. Justifier que d_3 et d_4 ne sont pas parallèles.
 b. Montrer que le système traduisant l'intersection de d_3 et d_4 n'a pas de solution.
 c. Que peut-on en conclure sur la position relative de d_3 et d_4 ?

3. On considère les droites d_5 et d_6 de représentations paramétriques :

$$d_5 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_6 : \begin{cases} x = 4t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 5 - 8t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Montrer que d_5 et d_6 sont strictement parallèles.

Exercice 13 ★★★ Intersection de deux plans

Notions : Positions relatives et intersections, Systèmes linéaires et configurations de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes :

$$\mathcal{P} : x + y - z - 4 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : x + 3y + z - 10 = 0$$

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ de $\mathcal{P}$ et un vecteur normal $\vec{n}'$ de $\mathcal{P}'$. En déduire que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note Δ leur droite d'intersection.
2. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.
 - a. Justifier que $M \in \Delta$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 3y + z - 10 = 0 \end{cases}$$

- b. On pose $z = t$, où $t \in \mathbb{R}$. Montrer que le système devient :

$$\begin{cases} x + y = 4 + t \\ x + 3y = 10 - t \end{cases}$$

- c. Résoudre ce système : exprimer x et y en fonction de t .
3. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ . Préciser un point de Δ et un vecteur directeur de Δ .
4. Vérification : donner les coordonnées du point M_1 de Δ obtenu pour $t = 1$, puis contrôler que M_1 appartient bien à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$.

Exercice 14 ★★★ Bases de l'espace et systèmes linéaires

Notions : Systèmes linéaires et configurations de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b. On suppose qu'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Écrire le système vérifié par x et y , puis montrer qu'il n'a pas de solution.

c. En déduire que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

2. Soit $\vec{s} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On cherche trois réels α , β et γ tels que $\vec{s} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.

a. Montrer que $(\alpha; \beta; \gamma)$ est solution du système :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 5 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

b. Résoudre ce système et en déduire les coordonnées de $\vec{s}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

3. Les vecteurs $\vec{s}$, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ? Justifier à l'aide d'un système.

Exercice 15 ★★★ Vrai ou faux

Notions : Représentation paramétrique d'une droite, Équation cartésienne d'un plan, Positions relatives et intersections

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est **vraie** ou **fausse**, puis justifier la réponse.

1. Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Affirmation 1 : le point $A(5; 1; 0)$ appartient à d .

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y = 2x + 3z - 4$.

Affirmation 2 : le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

3. Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $x + y + 3z - 7 = 0$.

Affirmation 3 : la droite d est parallèle au plan $\mathcal{Q}$.

4. On considère les représentations paramétriques $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, et $\begin{cases} x = -1 + 2t' \\ y = 8 - 6t' \\ z = 1 + 4t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$

Affirmation 4 : ces deux représentations paramétriques décrivent la même droite.

5. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations $x - 2y + z + 5 = 0$ et $3x + 2y + z - 1 = 0$.

Affirmation 5 : les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

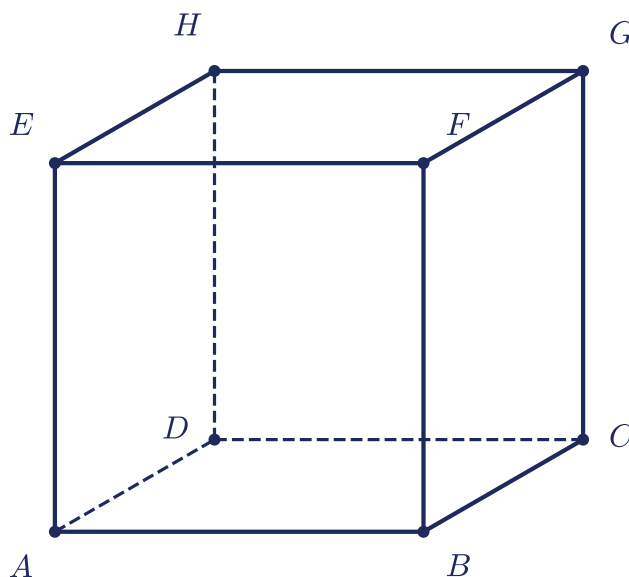
Exercice 16 ★★★★★ Synthèse : géométrie dans un cube

Notions : Équation cartésienne d'un plan, Projeté orthogonal et distances, Positions relatives et intersections, Systèmes linéaires et configurations de l'espace

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 : $ABCD$ est la face du bas, $EFGH$ la face du haut, avec E au-dessus de A , F au-dessus de B , G au-dessus de C et H au-dessus de D .

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

$$A(0; 0; 0), \quad B(1; 0; 0), \quad C(1; 1; 0), \quad D(0; 1; 0), \quad E(0; 0; 1), \quad F(1; 0; 1), \quad G(1; 1; 1), \quad H(0; 1; 1)$$



- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$.
 - Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est normal au plan (AFH) .
- En déduire qu'une équation cartésienne du plan (AFH) est $x + y - z = 0$.
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC) .
- On note K le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH) . Montrer que K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
- Justifier que K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH) .
 - En déduire la distance du point E au plan (AFH) .
- Montrer que le triangle AFH est équilatéral et préciser la longueur de ses côtés.
 - En déduire que l'aire du triangle AFH vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On pourra commencer par calculer la hauteur du triangle.
 - En déduire le volume du tétraèdre $EAFH$. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.
- Retrouver ce volume en prenant cette fois le triangle AEH comme base du tétraèdre $EAFH$.