

# Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Fiche d'exercices corrigés — Tale spé

**Difficulté :** ★ application directe · ★★ standard · ★★★ approfondissement · ★★★★★ défi.

*Un conseil : cherchez d'abord, le corrigé ensuite — c'est là que ça progresse.*

**Exercice 1 ★ Déterminer une représentation paramétrique d'une droite**

Notions : Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

- Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point donné et de vecteur directeur donné.
  - $A(2; -1; 3)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
  - $B(0; 5; -2)$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $C(-1; 0; 4)$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
  - $D(7; 2; 0)$  et  $\vec{m} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- On considère les points  $E(1; 2; -1)$  et  $F(4; 0; 3)$ .
  - Calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{EF}$ .
  - En déduire une représentation paramétrique de la droite  $(EF)$ .
- Les points  $P(10; -4; 11)$  et  $Q(-5; 6; -8)$  appartiennent-ils à la droite  $(EF)$ ? Justifier.

**Corrigé**

- D'après le cours, la droite passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

On applique cette propriété dans chacun des quatre cas.

- $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
- $\begin{cases} x = 3t \\ y = 5 \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
- $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 4 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
- $\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 - 3t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

- Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{EF}$  s'obtiennent en calculant la différence des coordonnées de  $F$  et de  $E$  :

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 0 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- La droite  $(EF)$  passe par le point  $E(1; 2; -1)$  et admet  $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  comme vecteur directeur. Une représentation paramétrique de  $(EF)$  est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

**3.** Un point appartient à la droite  $(EF)$  si et seulement s'il existe une valeur du paramètre  $t$  qui vérifie simultanément les trois équations de la représentation paramétrique.

*Pour le point  $P(10; -4; 11)$  :* la première équation  $1 + 3t = 10$  donne  $3t = 9$ , soit  $t = 3$ . On vérifie les deux autres équations avec cette valeur :  $y = 2 - 2 \times 3 = -4$  et  $z = -1 + 4 \times 3 = 11$ . Les trois équations sont vérifiées pour  $t = 3$ , donc **le point  $P$  appartient à la droite  $(EF)$ .**

*Pour le point  $Q(-5; 6; -8)$  :* la première équation  $1 + 3t = -5$  donne  $3t = -6$ , soit  $t = -2$ . Alors  $y = 2 - 2 \times (-2) = 6$ , ce qui convient, mais  $z = -1 + 4 \times (-2) = -9 \neq -8$  : la troisième équation n'est pas vérifiée. Il n'existe donc aucune valeur de  $t$  vérifiant les trois équations à la fois : **le point  $Q$  n'appartient pas à la droite  $(EF)$ .**

**Exercice 2 ★ Lire une représentation paramétrique**

Notions : Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 5 - s \\ z = 1 + 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$d_3 : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 5 - 4k \\ z = 6 - 8k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

- Pour chacune des trois droites, donner les coordonnées d'un point de la droite et d'un vecteur directeur.
- Le point  $M(5; -3; -10)$  appartient-il à  $d_1$  ?
  - Le point  $N(4; -1; 2)$  appartient-il à  $d_2$  ?
  - Le point  $P(-1; 9; -2)$  appartient-il à  $d_3$  ?
- Les droites  $d_1$  et  $d_3$  sont définies par des représentations paramétriques différentes. Décrivent-elles pourtant la même droite ? Justifier soigneusement.

**Corrigé**

**1.** D'après le cours, dans une représentation paramétrique de droite, un point de la droite se lit sur les termes constants (il correspond à la valeur 0 du paramètre) et un vecteur directeur se lit sur les coefficients du paramètre.

Pour  $d_1$  : en prenant  $t = 0$ , on obtient le point  $A_1(3; 1; -2)$ . Les coefficients de  $t$  donnent le vecteur directeur  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Pour  $d_2$  : en prenant  $s = 0$ , on obtient le point  $A_2(0; 5; 1)$ . Les coefficients de  $s$  donnent le vecteur directeur  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Pour  $d_3$  : en prenant  $k = 0$ , on obtient le point  $A_3(1; 5; 6)$ . Les coefficients de  $k$  donnent le vecteur directeur  $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ .

**2. a.** Le point  $M(5; -3; -10)$  appartient à  $d_1$  si et seulement s'il existe une valeur de  $t$  vérifiant simultanément les trois équations. La première équation  $3 - t = 5$  donne  $t = -2$ . On vérifie les deux autres avec cette valeur :

$$y = 1 + 2 \times (-2) = -3 \quad \text{et} \quad z = -2 + 4 \times (-2) = -10$$

Les trois équations sont vérifiées pour  $t = -2$ , donc **le point  $M$  appartient à  $d_1$ .**

**2. b.** La première équation  $2s = 4$  donne  $s = 2$ . Or, pour cette valeur,  $y = 5 - 2 = 3 \neq -1$  : la deuxième équation n'est pas vérifiée. Il n'existe donc aucune valeur de  $s$  qui convienne : **le point  $N$  n'appartient pas à  $d_2$ .**

**2. c.** La première équation  $1 + 2k = -1$  donne  $2k = -2$ , soit  $k = -1$ . Alors  $y = 5 - 4 \times (-1) = 9$ , ce qui convient, mais  $z = 6 - 8 \times (-1) = 14 \neq -2$  : la troisième équation n'est pas vérifiée. **Le point  $P$  n'appartient pas à  $d_3$ .**

**3.** Montrons que  $d_1$  et  $d_3$  sont confondues, en deux étapes.

*Première étape : les vecteurs directeurs sont colinéaires.* On a  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ . Or  $2 =$

$-2 \times (-1)$ ,  $-4 = -2 \times 2$  et  $-8 = -2 \times 4$ , donc  $\vec{u}_3 = -2\vec{u}_1$ . Les vecteurs directeurs sont colinéaires : les droites  $d_1$  et  $d_3$  sont parallèles.

*Deuxième étape : elles ont un point commun.* Vérifions que le point  $A_3(1; 5; 6)$  de  $d_3$  appartient à  $d_1$ . La première équation  $3 - t = 1$  donne  $t = 2$  ; alors  $y = 1 + 2 \times 2 = 5$  et  $z = -2 + 4 \times 2 = 6$  : les trois équations sont vérifiées, donc  $A_3 \in d_1$ .

Les droites  $d_1$  et  $d_3$  sont parallèles et ont un point commun : elles sont donc confondues. **Oui,  $d_1$  et  $d_3$  décrivent la même droite.**

**Exercice 3 ★★ Points particuliers d'une droite paramétrée**

Notions : Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère la droite  $\Delta$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 6 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection  $I$  de la droite  $\Delta$  avec le plan  $(xOy)$ , c'est-à-dire le plan d'équation  $z = 0$ .
2. Déterminer les coordonnées du point de  $\Delta$  de cote  $-3$ .
3. Déterminer les coordonnées du point de  $\Delta$  d'abscisse 11.
4. Existe-t-il un point de  $\Delta$  dont les coordonnées vérifient  $x + 2y = 10$  ? Justifier.

**Corrigé**

1. Le point  $I$  appartient à  $\Delta$  et au plan d'équation  $z = 0$  : on cherche donc la valeur de  $t$  pour laquelle la cote du point de paramètre  $t$  est nulle.

$$6 - 3t = 0 \iff 3t = 6 \iff t = 2$$

On calcule les deux autres coordonnées pour  $t = 2$  :  $x = 5 - 2 \times 2 = 1$  et  $y = -1 + 2 = 1$ .

**La droite  $\Delta$  coupe le plan  $(xOy)$  au point  $I(1; 1; 0)$ .**

2. On cherche la valeur de  $t$  pour laquelle la cote vaut  $-3$  :

$$6 - 3t = -3 \iff 3t = 9 \iff t = 3$$

Alors  $x = 5 - 2 \times 3 = -1$  et  $y = -1 + 3 = 2$ .

**Le point de  $\Delta$  de cote  $-3$  a pour coordonnées  $(-1; 2; -3)$ .**

3. On cherche la valeur de  $t$  pour laquelle l'abscisse vaut 11 :

$$5 - 2t = 11 \iff -2t = 6 \iff t = -3$$

Alors  $y = -1 + (-3) = -4$  et  $z = 6 - 3 \times (-3) = 15$ .

**Le point de  $\Delta$  d'abscisse 11 a pour coordonnées  $(11; -4; 15)$ .**

4. Soit  $M(x; y; z)$  un point quelconque de  $\Delta$ , de paramètre  $t$ . Calculons  $x + 2y$  en fonction de  $t$  :

$$x + 2y = (5 - 2t) + 2(-1 + t) = 5 - 2t - 2 + 2t = 3$$

Ainsi, pour tout point de  $\Delta$ , on a  $x + 2y = 3$ , quelle que soit la valeur de  $t$ . L'équation  $x + 2y = 10$  n'est donc jamais vérifiée.

**Non, il n'existe aucun point de  $\Delta$  dont les coordonnées vérifient  $x + 2y = 10$  : tous les points de  $\Delta$  vérifient  $x + 2y = 3$ .**

**Exercice 4 ★ Équation cartésienne d'un plan de vecteur normal donné**

Notions : Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point donné et de vecteur normal donné.

a.  $A(1; 2; -3)$  et  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c.  $C(3; 0; 1)$  et  $\vec{p} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b.  $B(0; -4; 5)$  et  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

d.  $D(-2; 1; 0)$  et  $\vec{q} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. On note  $\mathcal{P}$  le plan obtenu à la question 1.a. Parmi les points  $E(1; 6; -2)$ ,  $F(2; 0; -3)$  et  $G(-4; 0; -1)$ , lesquels appartiennent à  $\mathcal{P}$ ? Justifier.

**Corrigé**

1. D'après le cours, un plan de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  admet une équation cartésienne de la forme  $ax + by + cz + d = 0$ , où  $d$  est un réel que l'on détermine en écrivant que les coordonnées du point donné vérifient l'équation.

a. Le plan de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  admet une équation de la forme  $2x - y + 4z + d = 0$ . Le point  $A(1; 2; -3)$  appartient au plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2 \times 1 - 2 + 4 \times (-3) + d = 0 \iff 2 - 2 - 12 + d = 0 \iff d = 12$$

**Une équation cartésienne du plan est  $2x - y + 4z + 12 = 0$ .**

b. Le plan de vecteur normal  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  admet une équation de la forme  $x + 3y - 2z + d = 0$ .

Avec le point  $B(0; -4; 5)$  :

$$0 + 3 \times (-4) - 2 \times 5 + d = 0 \iff -12 - 10 + d = 0 \iff d = 22$$

**Une équation cartésienne du plan est  $x + 3y - 2z + 22 = 0$ .**

c. Le plan de vecteur normal  $\vec{p} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$  admet une équation de la forme  $5y - z + d = 0$ . Avec le point  $C(3; 0; 1)$  :

$$5 \times 0 - 1 + d = 0 \iff d = 1$$

**Une équation cartésienne du plan est  $5y - z + 1 = 0$ .**

d. Le plan de vecteur normal  $\vec{q} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  admet une équation de la forme  $-3x + 2y + 6z + d = 0$ .

Avec le point  $D(-2; 1; 0)$  :

$$-3 \times (-2) + 2 \times 1 + 6 \times 0 + d = 0 \iff 6 + 2 + d = 0 \iff d = -8$$

**Une équation cartésienne du plan est**  $-3x + 2y + 6z - 8 = 0$ .

**2.** Un point appartient au plan  $\mathcal{P} : 2x - y + 4z + 12 = 0$  si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation. On remplace  $x$ ,  $y$  et  $z$  par les coordonnées de chaque point dans le membre de gauche.

Pour  $E(1; 6; -2)$  :

$$2 \times 1 - 6 + 4 \times (-2) + 12 = 2 - 6 - 8 + 12 = 0$$

Les coordonnées de  $E$  vérifient l'équation, donc  $E \in \mathcal{P}$ .

Pour  $F(2; 0; -3)$  :

$$2 \times 2 - 0 + 4 \times (-3) + 12 = 4 - 12 + 12 = 4 \neq 0$$

Les coordonnées de  $F$  ne vérifient pas l'équation, donc  $F \notin \mathcal{P}$ .

Pour  $G(-4; 0; -1)$  :

$$2 \times (-4) - 0 + 4 \times (-1) + 12 = -8 - 4 + 12 = 0$$

Les coordonnées de  $G$  vérifient l'équation, donc  $G \in \mathcal{P}$ .

**Les points  $E$  et  $G$  appartiennent au plan  $\mathcal{P}$ ; le point  $F$  n'y appartient pas.**



**Exercice 5 ★ Reconnaître un plan et son vecteur normal**

Notions : Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  d'équations :

$$\mathcal{P}_1 : 3x - 2y + z - 6 = 0 \quad \mathcal{P}_2 : 2x = 3y - z + 4 \quad \mathcal{P}_3 : y + 5 = 0$$

1. Pour chacun des trois plans, donner un vecteur normal ainsi que les coordonnées de deux points du plan. (On commencera par réécrire l'équation de  $\mathcal{P}_2$  sous la forme  $ax + by + cz + d = 0$ .)
2. Parmi les points  $A(1; -1; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$  et  $C(0; -2; -2)$ , lesquels appartiennent au plan  $\mathcal{P}_1$  ? Justifier.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{Q}$  parallèle à  $\mathcal{P}_2$  et passant par le point  $D(1; 2; -3)$ .

**Corrigé**

1. D'après le cours, si un plan a pour équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$ , alors le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à ce plan. Pour trouver des points du plan, on choisit des valeurs de deux coordonnées et on calcule la troisième grâce à l'équation.

Pour  $\mathcal{P}_1 : 3x - 2y + z - 6 = 0$  : un vecteur normal est  $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . En prenant  $y = z = 0$ , l'équation

donne  $3x - 6 = 0$ , soit  $x = 2$  : le point  $(2; 0; 0)$  appartient à  $\mathcal{P}_1$ . En prenant  $x = z = 0$ , on obtient  $-2y - 6 = 0$ , soit  $y = -3$  : le point  $(0; -3; 0)$  appartient aussi à  $\mathcal{P}_1$ .

Pour  $\mathcal{P}_2 : 2x = 3y - z + 4$  : on ramène tous les termes dans le membre de gauche pour obtenir la forme  $ax + by + cz + d = 0$  :

$$2x = 3y - z + 4 \iff 2x - 3y + z - 4 = 0$$

Un vecteur normal est donc  $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . En prenant  $y = 0$  et  $x = 1$ , l'équation donne  $2 + z - 4 = 0$ ,

soit  $z = 2$  : le point  $(1; 0; 2)$  appartient à  $\mathcal{P}_2$ . En prenant  $x = 0$  et  $y = -1$ , on obtient  $3 + z - 4 = 0$ , soit  $z = 1$  : le point  $(0; -1; 1)$  appartient aussi à  $\mathcal{P}_2$ .

Pour  $\mathcal{P}_3 : y + 5 = 0$  : l'équation s'écrit  $0x + 1y + 0z + 5 = 0$ , donc un vecteur normal est  $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Ce plan est l'ensemble des points de coordonnée  $y = -5$ , avec  $x$  et  $z$  quelconques : il

est parallèle au plan  $(xOz)$ . Les points  $(0; -5; 0)$  et  $(1; -5; 3)$  lui appartiennent.

2. Un point appartient au plan  $\mathcal{P}_1$  si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation  $3x - 2y + z - 6 = 0$ . On remplace dans le membre de gauche.

Pour  $A(1; -1; 1)$  :

$$3 \times 1 - 2 \times (-1) + 1 - 6 = 3 + 2 + 1 - 6 = 0$$

Les coordonnées de  $A$  vérifient l'équation, donc  $A \in \mathcal{P}_1$ .

Pour  $B(2; 1; 2)$  :

$$3 \times 2 - 2 \times 1 + 2 - 6 = 6 - 2 + 2 - 6 = 0$$

Les coordonnées de  $B$  vérifient l'équation, donc  $B \in \mathcal{P}_1$ .

Pour  $C(0; -2; -2)$  :

$$3 \times 0 - 2 \times (-2) + (-2) - 6 = 4 - 2 - 6 = -4 \neq 0$$

Les coordonnées de  $C$  ne vérifient pas l'équation, donc  $C \notin \mathcal{P}_1$ .

**Les points  $A$  et  $B$  appartiennent au plan  $\mathcal{P}_1$  ; le point  $C$  n'y appartient pas.**

**3.** Deux plans parallèles ont les mêmes vecteurs normaux. Le plan  $\mathcal{Q}$ , parallèle à  $\mathcal{P}_2$ , admet

donc  $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  comme vecteur normal : son équation est de la forme  $2x - 3y + z + d = 0$ .

Le point  $D(1; 2; -3)$  appartient à  $\mathcal{Q}$ , donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2 \times 1 - 3 \times 2 + (-3) + d = 0 \iff 2 - 6 - 3 + d = 0 \iff d = 7$$

**Une équation cartésienne de  $\mathcal{Q}$  est  $2x - 3y + z + 7 = 0$ .**

**Exercice 6 ★★★ Plan passant par trois points**

Notions : Équation cartésienne d'un plan, Systèmes linéaires et configurations de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(2; 2; 0)$  et  $C(4; -2; 2)$ .

1. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ , puis montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés. Que peut-on en déduire pour le plan  $(ABC)$  ?
2. On cherche un vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  normal au plan  $(ABC)$ .
  - a. Justifier que  $\vec{n}$  doit vérifier  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  et  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ , puis écrire le système de deux équations correspondant.
  - b. Résoudre ce système en fixant  $a = 1$ , et en déduire les coordonnées d'un vecteur normal  $\vec{n}$  au plan  $(ABC)$ .
3. En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
4. Vérifier que les coordonnées du point  $C$  satisfont bien l'équation obtenue.

**Corrigé**

1. Calculons les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Supposons que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  soient colinéaires : il existerait alors un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$ . La première coordonnée imposerait  $3 = k \times 1$ , soit  $k = 3$ , tandis que la deuxième imposerait  $-3 = k \times 1$ , soit  $k = -3$ . C'est contradictoire, donc les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.

**Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont donc pas alignés : ils définissent un unique plan  $(ABC)$ .**

**2. a.** D'après le cours, un vecteur normal à un plan est un vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs de ce plan. En particulier,  $\vec{n}$  doit être orthogonal aux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ , qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan  $(ABC)$ . Comme le repère est orthonormé, cette orthogonalité se traduit par la nullité des produits scalaires :  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  et  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

En exprimant ces produits scalaires avec les coordonnées, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 3a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

- 2. b.** En additionnant membre à membre les deux équations, les termes en  $c$  se simplifient :

$$4a - 2b = 0 \iff b = 2a$$

En reportant dans la première équation :  $c = a + b = a + 2a = 3a$ .

En fixant  $a = 1$ , on obtient  $b = 2$  et  $c = 3$ , d'où le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Vérification :  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 + 2 - 3 = 0$  et  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 - 6 + 3 = 0$ . ✓

**Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(ABC)$ .**

**3.** D'après le cours, un plan de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  admet une équation cartésienne de la forme  $x + 2y + 3z + d = 0$ . Le point  $A(1; 1; 1)$  appartient au plan  $(ABC)$ , donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0 \iff 6 + d = 0 \iff d = -6$$

**Une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est  $x + 2y + 3z - 6 = 0$ .**

**4.** Remplaçons  $x$ ,  $y$  et  $z$  par les coordonnées de  $C(4; -2; 2)$  dans le membre de gauche de l'équation :

$$4 + 2 \times (-2) + 3 \times 2 - 6 = 4 - 4 + 6 - 6 = 0$$

**Les coordonnées de  $C$  satisfont bien l'équation du plan  $(ABC)$ .** *Remarque :* on peut vérifier de même que  $B(2; 2; 0)$  convient :  $2 + 2 \times 2 + 3 \times 0 - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$ . ✓

**Exercice 7 ★★ Droites et plans parallèles ou perpendiculaires**

Notions : Positions relatives et intersections, Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. On considère les plans :

$$\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z - 5 = 0, \quad \mathcal{P}_2 : -4x + 2y - 6z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_3 : x + 5y + z - 2 = 0$$

- Donner un vecteur normal à chacun de ces trois plans.
- Démontrer que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont parallèles. Sont-ils confondus ?
- Démontrer que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_3$  sont perpendiculaires.

2. On considère la droite  $d$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

et le plan  $\mathcal{Q} : 3x - 2z + 1 = 0$ .

- Démontrer que la droite  $d$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}_1$ .
  - Démontrer que la droite  $d$  est parallèle au plan  $\mathcal{Q}$ . Est-elle incluse dans  $\mathcal{Q}$  ?
3. Soit  $m$  un réel. On considère les plans  $\mathcal{R}_m : mx + 2y - z + 4 = 0$  et  $\mathcal{S}_m : 3x - my + 2z - 1 = 0$ . Déterminer la valeur de  $m$  pour laquelle  $\mathcal{R}_m$  et  $\mathcal{S}_m$  sont perpendiculaires.

**Corrigé**

1. **a.** D'après le cours, si un plan a pour équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$ , alors le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à ce plan. En lisant les coefficients de chaque équation, on obtient :

$$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ normal à } \mathcal{P}_1, \quad \vec{n}_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ normal à } \mathcal{P}_2, \quad \vec{n}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ normal à } \mathcal{P}_3.$$

1. **b.** On remarque que  $-4 = -2 \times 2$ , que  $2 = -2 \times (-1)$  et que  $-6 = -2 \times 3$ , autrement dit :

$$\vec{n}_2 = -2 \vec{n}_1$$

Les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont donc colinéaires. D'après le cours, deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires : **les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont parallèles.** Pour savoir s'ils sont confondus, on choisit un point de  $\mathcal{P}_1$  et on teste son appartenance à  $\mathcal{P}_2$ . Le point  $A(0; -5; 0)$  vérifie  $2 \times 0 - (-5) + 3 \times 0 - 5 = 5 - 5 = 0$ , donc  $A \in \mathcal{P}_1$ . Or :

$$-4 \times 0 + 2 \times (-5) - 6 \times 0 + 1 = -9 \neq 0$$

donc  $A \notin \mathcal{P}_2$ . Les deux plans parallèles n'ont pas tous leurs points communs :  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont **strictement parallèles, ils ne sont pas confondus**.

1. c. On calcule le produit scalaire des vecteurs normaux (le repère est orthonormé) :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 2 \times 1 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 = 2 - 5 + 3 = 0$$

Les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_3$  sont orthogonaux. D'après le cours, deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre : **les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_3$  sont perpendiculaires**.

2. a. En lisant les coefficients de  $t$  dans la représentation paramétrique, un vecteur directeur de  $d$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ . On remarque que :

$$\vec{u} = 2\vec{n}_1$$

Le vecteur  $\vec{u}$  est donc colinéaire à  $\vec{n}_1$ , vecteur normal à  $\mathcal{P}_1$ . D'après le cours, une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est colinéaire à un vecteur normal du plan : **la droite  $d$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}_1$** .

2. b. Un vecteur normal à  $\mathcal{Q}$  est  $\vec{n}_Q \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ . On calcule :

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_Q = 4 \times 3 + (-2) \times 0 + 6 \times (-2) = 12 + 0 - 12 = 0$$

Le vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $d$  est orthogonal au vecteur normal  $\vec{n}_Q$  de  $\mathcal{Q}$ . D'après le cours, cela caractérise une droite parallèle à un plan : **la droite  $d$  est parallèle au plan  $\mathcal{Q}$** .

Pour savoir si  $d$  est incluse dans  $\mathcal{Q}$ , on teste un point de  $d$ . En prenant  $t = 0$  dans la représentation paramétrique, le point  $B(1; 3; -2)$  appartient à  $d$ . Or :

$$3 \times 1 - 2 \times (-2) + 1 = 3 + 4 + 1 = 8 \neq 0$$

donc  $B \notin \mathcal{Q}$ . **La droite  $d$  n'est pas incluse dans  $\mathcal{Q}$  : elle lui est strictement parallèle.**

3. En lisant les coefficients des équations cartésiennes, un vecteur normal à  $\mathcal{R}_m$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et

un vecteur normal à  $\mathcal{S}_m$  est  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 3 \\ -m \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Les plans  $\mathcal{R}_m$  et  $\mathcal{S}_m$  sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$  :

$$m \times 3 + 2 \times (-m) + (-1) \times 2 = 0 \iff 3m - 2m - 2 = 0 \iff m = 2$$

**Les plans  $\mathcal{R}_m$  et  $\mathcal{S}_m$  sont perpendiculaires si et seulement si  $m = 2$ .**

Vérification : pour  $m = 2$ ,  $\vec{n}(2; 2; -1)$  et  $\vec{n}'(3; -2; 2)$  donnent  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 6 - 4 - 2 = 0$ .

**Exercice 8 ★★ Projeté orthogonal d'un point sur un plan**

Notions : Projeté orthogonal et distances

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne :

$$x - 2y + z - 4 = 0$$

et le point  $M(0; 4; 0)$ .

1. Vérifier que le point  $M$  n'appartient pas au plan  $\mathcal{P}$ .
2. Donner un vecteur normal  $\vec{n}$  au plan  $\mathcal{P}$ , puis déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  passant par  $M$  et orthogonale à  $\mathcal{P}$ .
3. Déterminer les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .
4. En déduire la distance  $MH$  (on donnera la valeur exacte).

**Corrigé**

1. On remplace les coordonnées de  $M(0; 4; 0)$  dans le premier membre de l'équation de  $\mathcal{P}$  :

$$0 - 2 \times 4 + 0 - 4 = -12 \neq 0$$

L'équation n'est pas vérifiée : **le point  $M$  n'appartient pas au plan  $\mathcal{P}$ .**

2. D'après le cours, si un plan a pour équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$ , alors le vecteur de coordonnées  $(a; b; c)$  est un vecteur normal à ce plan. Ici :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{P}.$$

La droite  $\Delta$  est orthogonale à  $\mathcal{P}$ , donc  $\vec{n}$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ . Comme  $\Delta$  passe par  $M(0; 4; 0)$ , une représentation paramétrique de  $\Delta$  est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Le projeté orthogonal  $H$  de  $M$  sur  $\mathcal{P}$  est le point d'intersection de la droite  $\Delta$  et du plan  $\mathcal{P}$ . Un point de  $\Delta$ , de coordonnées  $(t; 4 - 2t; t)$ , appartient à  $\mathcal{P}$  si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$t - 2(4 - 2t) + t - 4 = 0 \iff t - 8 + 4t + t - 4 = 0 \iff 6t - 12 = 0 \iff t = 2$$

En reportant  $t = 2$  dans la représentation paramétrique de  $\Delta$  :  $x = 2$ ,  $y = 4 - 2 \times 2 = 0$  et  $z = 2$ .**Le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $\mathcal{P}$  est le point  $H(2; 0; 2)$ .***Vérification* :  $2 - 2 \times 0 + 2 - 4 = 0$  donc  $H \in \mathcal{P}$ .

4. On calcule les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{MH}$  :

$$\overrightarrow{MH} \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 0 - 4 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le repère étant orthonormé :

$$MH = \|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$$

**La distance de  $M$  à son projeté orthogonal vaut  $MH = 2\sqrt{6}$ .** C'est, par définition, la distance du point  $M$  au plan  $\mathcal{P}$ .



**Exercice 9 ★★ Projeté orthogonal d'un point sur une droite**

Notions : Projeté orthogonal et distances

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la droite  $d$  passant par le point  $A(1; 2; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , ainsi que le point  $M(4; 3; -2)$ .

On note  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $d$ .

- Justifier que les coordonnées de  $H$  peuvent s'écrire  $(1 + 2t; 2 + t; -1 - 2t)$  pour un certain réel  $t$ .
- Exprimer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{MH}$  en fonction de  $t$ , puis traduire la condition  $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$  par une équation d'inconnue  $t$ .
- En déduire les coordonnées de  $H$ , puis la distance  $MH$  (valeur exacte).
- On considère le point  $B(5; 4; -5)$ .
  - Vérifier que  $B$  appartient à la droite  $d$  et calculer la longueur  $AB$ .
  - En déduire l'aire du triangle  $ABM$ .

**Corrigé**

1. La droite  $d$  passe par le point  $A(1; 2; -1)$  et est dirigée par le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Une représentation paramétrique de  $d$  est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Par définition, le projeté orthogonal  $H$  de  $M$  sur la droite  $d$  appartient à  $d$ . Il existe donc un réel  $t$  tel que  $H(1 + 2t; 2 + t; -1 - 2t)$ .

2. Avec  $M(4; 3; -2)$ , on calcule :

$$\overrightarrow{MH} \begin{pmatrix} 1 + 2t - 4 \\ 2 + t - 3 \\ -1 - 2t - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 3 \\ t - 1 \\ 1 - 2t \end{pmatrix}$$

Le repère étant orthonormé, on calcule le produit scalaire avec les coordonnées :

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 2(2t - 3) + 1 \times (t - 1) + (-2)(1 - 2t) = 4t - 6 + t - 1 - 2 + 4t = 9t - 9$$

La condition  $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$  se traduit donc par l'équation :

$$9t - 9 = 0$$

3. On résout :  $9t - 9 = 0 \iff t = 1$ . En reportant  $t = 1$  dans les coordonnées de la question 1 :  $x = 3$ ,  $y = 3$  et  $z = -3$ .

**Le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $d$  est le point  $H(3; 3; -3)$ .**

Alors  $\overrightarrow{MH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et, le repère étant orthonormé :

$$MH = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

**La distance de  $M$  à la droite  $d$  vaut  $MH = \sqrt{2}$ .**

**4. a.** On calcule les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-2 \\ -5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{u}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est colinéaire au vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $d$ , et  $A \in d$  : **le point  $B$  appartient donc à la droite  $d$**  (c'est le point de paramètre  $t = 2$ ).

De plus :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

**On a  $AB = 6$ .**

**4. b.** Les points  $A$  et  $B$  appartiennent tous deux à  $d$  : le côté  $[AB]$  du triangle  $ABM$  est donc porté par la droite  $d$ . Le point  $H$ , projeté orthogonal de  $M$  sur  $d$ , est alors le pied de la hauteur issue de  $M$  dans ce triangle, et cette hauteur mesure  $MH = \sqrt{2}$ .

L'aire du triangle est donnée par la formule  $\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$  :

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times MH}{2} = \frac{6 \times \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

**L'aire du triangle  $ABM$  vaut  $3\sqrt{2}$  unités d'aire.**

**Exercice 10 ★★★ Distances dans l'espace**

Notions : Projeté orthogonal et distances

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les trois questions sont indépendantes. Dans tout l'exercice, la seule méthode attendue pour calculer une distance est la construction du projeté orthogonal.

- Distance d'un point à un plan.** On considère le plan  $\mathcal{P} : 2x - y + 2z + 3 = 0$  et le point  $S(1; 0; 2)$ .
  - Vérifier que  $S \notin \mathcal{P}$ , puis déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $H$  de  $S$  sur  $\mathcal{P}$ .
  - En déduire la distance de  $S$  au plan  $\mathcal{P}$ .
- Distance d'un point à une droite.** On considère la droite  $\Delta$  passant par  $C(0; 1; 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , et le point  $N(1; 2; 5)$ . Déterminer le projeté orthogonal  $K$  de  $N$  sur  $\Delta$ , puis la distance de  $N$  à la droite  $\Delta$ .
- Distance entre une droite et un plan parallèle.** On considère le plan  $\mathcal{Q} : 2x + 2y + z - 5 = 0$  et la droite  $\delta$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 4 - t \\ z = 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- Démontrer que la droite  $\delta$  est strictement parallèle au plan  $\mathcal{Q}$ .
- Justifier que la distance d'un point de  $\delta$  au plan  $\mathcal{Q}$  ne dépend pas du point choisi, puis calculer cette distance à partir du point  $R(5; 4; 5)$ .

**Corrigé**

- a.** On remplace les coordonnées de  $S(1; 0; 2)$  dans le premier membre de l'équation de  $\mathcal{P}$  :

$$2 \times 1 - 0 + 2 \times 2 + 3 = 2 + 4 + 3 = 9 \neq 0$$

L'équation n'est pas vérifiée, donc  $S \notin \mathcal{P}$ .

En lisant les coefficients de l'équation cartésienne, un vecteur normal à  $\mathcal{P}$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Soit  $d$  la droite passant par  $S$  et dirigée par  $\vec{n}$  : cette droite est orthogonale à  $\mathcal{P}$ , donc le projeté orthogonal  $H$  de  $S$  sur  $\mathcal{P}$  est le point d'intersection de  $d$  et de  $\mathcal{P}$ . Une représentation paramétrique de  $d$  est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

On reporte ces coordonnées dans l'équation de  $\mathcal{P}$  :

$$2(1 + 2t) - (-t) + 2(2 + 2t) + 3 = 0 \iff 2 + 4t + t + 4 + 4t + 3 = 0 \iff 9t + 9 = 0 \iff t = -1$$

Pour  $t = -1$  :  $x = -1$ ,  $y = 1$  et  $z = 0$ .

**Le projeté orthogonal de  $S$  sur le plan  $\mathcal{P}$  est le point  $H(-1; 1; 0)$ .**

Vérification :  $2 \times (-1) - 1 + 2 \times 0 + 3 = 0$  donc  $H \in \mathcal{P}$ .

1. b. Par définition, la distance de  $S$  au plan  $\mathcal{P}$  est la distance  $SH$ . On a  $\overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , donc, le repère étant orthonormé :

$$SH = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

**La distance de  $S$  au plan  $\mathcal{P}$  vaut 3.**

2. La droite  $\Delta$  passe par  $C(0; 1; 2)$  et est dirigée par  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Une représentation paramétrique de  $\Delta$  est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Le projeté orthogonal  $K$  de  $N$  sur  $\Delta$  appartient à  $\Delta$  : il existe un réel  $t$  tel que  $K(t; 1-t; 2+2t)$ . Avec  $N(1; 2; 5)$  :

$$\overrightarrow{NK} \begin{pmatrix} t-1 \\ -t-1 \\ 2t-3 \end{pmatrix}$$

Par définition du projeté orthogonal,  $\overrightarrow{NK} \cdot \vec{v} = 0$ . Le repère étant orthonormé :

$$1 \times (t-1) + (-1)(-t-1) + 2(2t-3) = 0 \iff t-1+t+1+4t-6 = 0 \iff 6t-6 = 0 \iff t = 1$$

Pour  $t = 1$  :  $x = 1$ ,  $y = 0$  et  $z = 4$ .

**Le projeté orthogonal de  $N$  sur  $\Delta$  est le point  $K(1; 0; 4)$ .**

Alors  $\overrightarrow{NK} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et :

$$NK = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

**La distance de  $N$  à la droite  $\Delta$  vaut  $\sqrt{5}$ .**

3. a. En lisant les coefficients de  $t$  dans la représentation paramétrique, un vecteur directeur de  $\delta$  est  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Un vecteur normal à  $\mathcal{Q}$  est  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On calcule :

$$\vec{w} \cdot \vec{n}' = 1 \times 2 + (-1) \times 2 + 0 \times 1 = 2 - 2 + 0 = 0$$

Un vecteur directeur de  $\delta$  est orthogonal à un vecteur normal de  $\mathcal{Q}$  : d'après le cours, **la droite  $\delta$  est parallèle au plan  $\mathcal{Q}$ .**

De plus, pour  $t = 0$ , le point  $R(5; 4; 5)$  appartient à  $\delta$ , et :

$$2 \times 5 + 2 \times 4 + 5 - 5 = 18 \neq 0$$

donc  $R \notin \mathcal{Q}$  :  $\delta$  n'est pas incluse dans  $\mathcal{Q}$ . **La droite  $\delta$  est strictement parallèle au plan  $\mathcal{Q}$ .**

**3. b. Justification.** Soit  $M$  et  $M'$  deux points quelconques de  $\delta$ , et  $H, H'$  leurs projetés orthogonaux respectifs sur  $\mathcal{Q}$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{MH}$  et  $\overrightarrow{M'H'}$  sont tous deux colinéaires à  $\vec{n}'$  : il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que  $\overrightarrow{MH} = a\vec{n}'$  et  $\overrightarrow{M'H'} = b\vec{n}'$ . D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'H'} = \overrightarrow{MM'} + (b - a)\vec{n}'$$

Les points  $H$  et  $H'$  appartiennent à  $\mathcal{Q}$ , donc  $\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{n}' = 0$  ; et  $\overrightarrow{MM'}$  dirige  $\delta$ , parallèle à  $\mathcal{Q}$ , donc  $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n}' = 0$ . En prenant le produit scalaire de l'égalité ci-dessus par  $\vec{n}'$ , il reste :

$$0 = (b - a) \|\vec{n}'\|^2$$

Comme  $\vec{n}' \neq \vec{0}$ , on en déduit  $a = b$ , donc  $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{M'H'}$  et  $MH = M'H'$  : **la distance d'un point de  $\delta$  au plan  $\mathcal{Q}$  ne dépend pas du point choisi.**

Calcul à partir de  $R$ . Soit  $d'$  la droite passant par  $R(5; 4; 5)$  et dirigée par  $\vec{n}'$  :

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 5 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

On reporte dans l'équation de  $\mathcal{Q}$  :

$$2(5+2t) + 2(4+2t) + (5+t) - 5 = 0 \iff 10+4t+8+4t+5+t-5 = 0 \iff 9t+18 = 0 \iff t = -2$$

Pour  $t = -2$ , on obtient le point  $H_R(1; 0; 3)$ , projeté orthogonal de  $R$  sur  $\mathcal{Q}$ .

Vérification :  $2 \times 1 + 2 \times 0 + 3 - 5 = 0$  donc  $H_R \in \mathcal{Q}$ .

Alors  $\overrightarrow{RH_R} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$  et :

$$RH_R = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

**La distance entre la droite  $\delta$  et le plan  $\mathcal{Q}$  vaut 6.**

**Exercice 11 ★★ Intersection d'une droite et d'un plan**

Notions : Positions relatives et intersections

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les trois questions sont indépendantes. Dans chaque cas, étudier la position relative de la droite et du plan : s'ils sont sécants, on donnera les coordonnées du point d'intersection ; sinon, on précisera si la droite est strictement parallèle au plan ou incluse dans le plan.

1. La droite  $d_1$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  et le plan  $\mathcal{P}_1 : 2x - y + z - 11 = 0$ .

2. La droite  $d_2$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  et le plan  $\mathcal{P}_2 : x + y - 3z + 2 = 0$ .

3. La droite  $d_3$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = s \\ z = 2 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$  et le plan  $\mathcal{P}_3 : x - y - z + 1 = 0$ .

**Corrigé**

**Méthode.** Dans chaque cas, un point de la droite a des coordonnées données par la représentation paramétrique. On reporte ces coordonnées dans l'équation cartésienne du plan : on obtient une équation d'inconnue le paramètre. Si elle admet une unique solution, la droite et le plan sont sécants ; si elle n'a aucune solution, la droite est strictement parallèle au plan ; si elle est vérifiée pour toute valeur du paramètre, la droite est incluse dans le plan.

1. Un point  $M(1 + 3t; -2 + t; 4 - 2t)$  de  $d_1$  appartient à  $\mathcal{P}_1$  si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$2(1 + 3t) - (-2 + t) + (4 - 2t) - 11 = 0 \iff 2 + 6t + 2 - t + 4 - 2t - 11 = 0 \iff 3t - 3 = 0 \iff t = 1$$

L'équation admet une unique solution : **la droite  $d_1$  et le plan  $\mathcal{P}_1$  sont sécants.** En reportant  $t = 1$  dans la représentation paramétrique :  $x = 4$ ,  $y = -1$  et  $z = 2$ .

**Leur point d'intersection est  $I(4; -1; 2)$ .**

*Vérification* :  $2 \times 4 - (-1) + 2 - 11 = 8 + 1 + 2 - 11 = 0$  donc  $I \in \mathcal{P}_1$ .

2. Un point  $M(t; 3 + 2t; 1 + t)$  de  $d_2$  appartient à  $\mathcal{P}_2$  si et seulement si :

$$t + (3 + 2t) - 3(1 + t) + 2 = 0 \iff t + 3 + 2t - 3 - 3t + 2 = 0 \iff 2 = 0$$

Cette équation n'a aucune solution : aucun point de  $d_2$  n'appartient à  $\mathcal{P}_2$ . **La droite  $d_2$  est strictement parallèle au plan  $\mathcal{P}_2$ .**

*Vérification* : un vecteur directeur de  $d_2$  est  $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et un vecteur normal à  $\mathcal{P}_2$  est  $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  ;

on a bien  $\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = 1 + 2 - 3 = 0$ , ce qui confirme le parallélisme, et le point  $(0; 3; 1)$  de  $d_2$  donne  $0 + 3 - 3 + 2 = 2 \neq 0$ , donc il n'est pas dans le plan.

3. Un point  $M(1 + 2s; s; 2 + s)$  de  $d_3$  appartient à  $\mathcal{P}_3$  si et seulement si :

$$(1 + 2s) - s - (2 + s) + 1 = 0 \iff 1 + 2s - s - 2 - s + 1 = 0 \iff 0 = 0$$

Cette égalité est vraie pour tout réel  $s$  : tout point de  $d_3$  appartient à  $\mathcal{P}_3$ . **La droite  $d_3$  est incluse dans le plan  $\mathcal{P}_3$ .**

**Exercice 12 ★★★ Position relative de deux droites de l'espace**

Notions : Positions relatives et intersections, Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Pour étudier la position relative de deux droites, on veillera à utiliser des paramètres **distincts** ( $t$  pour l'une,  $t'$  pour l'autre) : les deux droites sont parcourues indépendamment l'une de l'autre.

1. On considère les droites  $d_1$  et  $d_2$  de représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -3 + 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

- a. Justifier que  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas parallèles.  
 b. Résoudre le système formé en égalant les coordonnées d'un point de  $d_1$  et d'un point de  $d_2$ . En déduire que  $d_1$  et  $d_2$  sont sécantes et préciser les coordonnées de leur point d'intersection  $I$ .

2. On considère les droites  $d_3$  et  $d_4$  de représentations paramétriques :

$$d_3 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_4 : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 - t' \\ z = -2 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

- a. Justifier que  $d_3$  et  $d_4$  ne sont pas parallèles.  
 b. Montrer que le système traduisant l'intersection de  $d_3$  et  $d_4$  n'a pas de solution.  
 c. Que peut-on en conclure sur la position relative de  $d_3$  et  $d_4$  ?

3. On considère les droites  $d_5$  et  $d_6$  de représentations paramétriques :

$$d_5 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_6 : \begin{cases} x = 4t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 5 - 8t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Montrer que  $d_5$  et  $d_6$  sont strictement parallèles.

**Corrigé**

1. a. Dans une représentation paramétrique de droite, les coefficients du paramètre sont les coordonnées d'un vecteur directeur. La droite  $d_1$  admet donc pour vecteur directeur  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et la droite  $d_2$  admet pour vecteur directeur  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .  
 Supposons qu'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u}_2 = k \vec{u}_1$ . La première coordonnée impose  $k = 2$ , mais



la deuxième donnerait alors  $1 = 2 \times (-1) = -2$ , ce qui est faux. Les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  ne sont donc pas colinéaires.

Or, d'après le cours, deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. **Les droites  $d_1$  et  $d_2$  ne sont donc pas parallèles.**

**b.** Un point commun à  $d_1$  et  $d_2$  correspond à une valeur  $t$  du paramètre de  $d_1$  et une valeur  $t'$  du paramètre de  $d_2$  donnant les mêmes coordonnées  $(x; y; z)$ . On égale donc les coordonnées :

$$\begin{cases} 1+t = -3+2t' \\ 2-t = -3+t' \\ -1+t = 4-t' \end{cases} \iff \begin{cases} t-2t' = -4 \\ t+t' = 5 \\ t+t' = 5 \end{cases}$$

Les deuxième et troisième équations sont identiques : le système se ramène à deux équations. De l'équation  $t+t'=5$ , on tire  $t=5-t'$ , que l'on reporte dans la première :

$$5-t'-2t' = -4 \iff -3t' = -9 \iff t' = 3$$

d'où  $t = 5 - 3 = 2$ . Le couple  $(t; t') = (2; 3)$  vérifie les trois équations du système : celui-ci admet une unique solution, donc les droites ont exactement un point commun.

Pour  $t = 2$  dans la représentation paramétrique de  $d_1$  :  $x = 1 + 2 = 3$ ,  $y = 2 - 2 = 0$  et  $z = -1 + 2 = 1$ .

*Vérification* : pour  $t' = 3$  dans  $d_2$  :  $x = -3 + 2 \times 3 = 3$ ,  $y = -3 + 3 = 0$  et  $z = 4 - 3 = 1$ . On retrouve bien le même point. ✓

**Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont sécantes au point  $I(3; 0; 1)$ .**

**2. a.** La droite  $d_3$  admet pour vecteur directeur  $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et la droite  $d_4$  admet pour vecteur

directeur  $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Si  $\vec{u}_4 = k \vec{u}_3$  pour un réel  $k$ , la première coordonnée impose  $k = 1$ , mais la deuxième donnerait alors  $-1 = 3$ , ce qui est faux : les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. **Les droites  $d_3$  et  $d_4$  ne sont donc pas parallèles.**

**b.** On égale les coordonnées d'un point de  $d_3$  (paramètre  $t$ ) et d'un point de  $d_4$  (paramètre  $t'$ ) :

$$\begin{cases} 2+t = 1+t' \\ 3t = 5-t' \\ 1+2t = -2+t' \end{cases}$$

La première équation donne  $t' = t + 1$ . On reporte dans la deuxième :

$$3t = 5 - (t + 1) \iff 3t = 4 - t \iff 4t = 4 \iff t = 1$$

d'où  $t' = 1 + 1 = 2$ . Testons alors la troisième équation : à gauche,  $1 + 2 \times 1 = 3$ ; à droite,  $-2 + 2 = 0$ . Comme  $3 \neq 0$ , la troisième équation n'est pas vérifiée.

**Le système n'admet donc aucune solution :  $d_3$  et  $d_4$  n'ont aucun point commun.**

**c.** Les droites  $d_3$  et  $d_4$  ne sont ni parallèles (question **a.**) ni sécantes (question **b.**). Or, d'après le cours, deux droites de l'espace sont soit coplanaires (et dans ce cas sécantes, strictement parallèles ou confondues), soit non coplanaires. **Les droites  $d_3$  et  $d_4$  sont donc non coplanaires.**

**3.** La droite  $d_5$  admet pour vecteur directeur  $\vec{u}_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  et la droite  $d_6$  admet pour vecteur

directeur  $\vec{u}_6 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ . On remarque que :

$$\vec{u}_6 = -2 \vec{u}_5$$

puisque  $-2 \times (-2) = 4$ ,  $-2 \times 1 = -2$  et  $-2 \times 4 = -8$ . Les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc **les droites  $d_5$  et  $d_6$  sont parallèles**.

Montrons qu'elles ne sont pas confondues. Le point  $A(1; 3; 2)$  appartient à  $d_5$  (il est obtenu pour  $t = 0$ ). Supposons que  $A$  appartienne aussi à  $d_6$  : il existerait un réel  $t'$  tel que  $4t' = 1$ ,  $2 - 2t' = 3$  et  $5 - 8t' = 2$ . La première équation impose  $t' = \frac{1}{4}$ , mais alors  $2 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \neq 3$  : la deuxième équation n'est pas vérifiée. Donc  $A \notin d_6$ , et les droites ne sont pas confondues.

Les droites  $d_5$  et  $d_6$  sont parallèles et non confondues :  **$d_5$  et  $d_6$  sont strictement parallèles**.

**Exercice 13 ★★★ Intersection de deux plans**

Notions : Positions relatives et intersections, Systèmes linéaires et configurations de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  d'équations cartésiennes :

$$\mathcal{P} : x + y - z - 4 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : x + 3y + z - 10 = 0$$

1. Donner un vecteur normal  $\vec{n}$  de  $\mathcal{P}$  et un vecteur normal  $\vec{n}'$  de  $\mathcal{P}'$ . En déduire que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont sécants. On note  $\Delta$  leur droite d'intersection.
2. Soit  $M(x; y; z)$  un point de l'espace.
  - a. Justifier que  $M \in \Delta$  si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 3y + z - 10 = 0 \end{cases}$$

- b. On pose  $z = t$ , où  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que le système devient :

$$\begin{cases} x + y = 4 + t \\ x + 3y = 10 - t \end{cases}$$

- c. Résoudre ce système : exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $t$ .

3. En déduire une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ . Préciser un point de  $\Delta$  et un vecteur directeur de  $\Delta$ .
4. Vérification : donner les coordonnées du point  $M_1$  de  $\Delta$  obtenu pour  $t = 1$ , puis contrôler que  $M_1$  appartient bien à  $\mathcal{P}$  et à  $\mathcal{P}'$ .

**Corrigé**

1. D'après le cours, si un plan a pour équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$ , alors le vecteur

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est un vecteur normal de ce plan. On lit donc directement :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est normal à } \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est normal à } \mathcal{P}'$$

Supposons qu'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{n}' = k\vec{n}$ . La première coordonnée impose  $k = 1$ , mais la deuxième donnerait alors  $3 = 1$ , ce qui est faux : les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires. Or deux plans sont parallèles (ou confondus) si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  ne sont donc pas parallèles : **ils sont sécants**, et leur intersection est une droite  $\Delta$ .

2. a. Par définition de l'intersection,  $M \in \Delta$  si et seulement si  $M$  appartient à la fois à  $\mathcal{P}$  et à  $\mathcal{P}'$ , c'est-à-dire si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les deux équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 3y + z - 10 = 0 \end{cases}$$

b. On remplace  $z$  par  $t$  dans chaque équation, puis on fait passer les termes constants et les termes en  $t$  dans le second membre :

$$\begin{cases} x + y - t - 4 = 0 \\ x + 3y + t - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 4 + t \\ x + 3y = 10 - t \end{cases}$$

c. On soustrait la première équation à la seconde afin d'éliminer  $x$  :

$$(x + 3y) - (x + y) = (10 - t) - (4 + t) \iff 2y = 6 - 2t \iff y = 3 - t$$

On reporte ensuite dans la première équation :

$$x = 4 + t - y = 4 + t - (3 - t) = 1 + 2t$$

**Le système a pour solution  $x = 1 + 2t$  et  $y = 3 - t$ .**

**3.** Un point  $M(x; y; z)$  appartient à  $\Delta$  si et seulement s'il existe un réel  $t$  tel que :

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

C'est une représentation paramétrique de droite :  $\Delta$  **passé par le point**  $A(1; 3; 0)$  (obtenu pour  $t = 0$ ) **et admet pour vecteur directeur**  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (les coefficients du paramètre  $t$ ).

**4.** Pour  $t = 1$ , la représentation paramétrique donne  $x = 1 + 2 = 3$ ,  $y = 3 - 1 = 2$  et  $z = 1$  : on obtient le point  $M_1(3; 2; 1)$ .

*Vérification* : dans l'équation de  $\mathcal{P}$  :  $3 + 2 - 1 - 4 = 0 \checkmark$  ; dans l'équation de  $\mathcal{P}'$  :  $3 + 3 \times 2 + 1 - 10 = 3 + 6 + 1 - 10 = 0 \checkmark$ .

**Le point  $M_1(3; 2; 1)$  appartient bien aux deux plans**, ce qui est cohérent : tout point de  $\Delta$  appartient à  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ .

**Exercice 14 ★★★ Bases de l'espace et systèmes linéaires**

Notions : Systèmes linéaires et configurations de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .On considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. **a.** Justifier que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires.  
**b.** On suppose qu'il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ . Écrire le système vérifié par  $x$  et  $y$ , puis montrer qu'il n'a pas de solution.  
**c.** En déduire que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de l'espace.
2. Soit  $\vec{s} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . On cherche trois réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que  $\vec{s} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ .  
**a.** Montrer que  $(\alpha; \beta; \gamma)$  est solution du système :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 5 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

- b.** Résoudre ce système et en déduire les coordonnées de  $\vec{s}$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .
3. Les vecteurs  $\vec{s}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont-ils coplanaires ? Justifier à l'aide d'un système.

**Corrigé**

**1. a.** Supposons qu'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$ . La première coordonnée impose  $0 = k \times 1$ , donc  $k = 0$ . Mais la deuxième coordonnée donnerait alors  $1 = 0 \times 1 = 0$ , ce qui est faux. Il n'existe donc aucun réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$  : **les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires.**

**b.** L'égalité  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$  se traduit coordonnée par coordonnée. Le vecteur  $x\vec{u} + y\vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix}$ , d'où le système :

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Les première et troisième équations donnent  $x = 1$  et  $y = 1$ . En reportant dans la deuxième :  $x + y = 1 + 1 = 2 \neq 0$ . La deuxième équation n'est pas vérifiée : **le système n'a pas de solution.**

**c.** D'après la question **b.**, le vecteur  $\vec{w}$  ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Or, d'après le cours, trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres ; ici  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires (question **a.**), et  $\vec{w}$  n'est pas dans le plan qu'ils engendrent. Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont donc non coplanaires. Or trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace :  **$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de l'espace.**

**2. a.** On calcule les coordonnées du vecteur  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$  :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta \\ \beta + \gamma \end{pmatrix}$$

L'égalité  $\vec{s} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$  équivaut à l'égalité des coordonnées avec  $\vec{s} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire au système :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 5 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

**b.** On soustrait la deuxième équation à la première pour éliminer  $\alpha$  :

$$(\alpha + \gamma) - (\alpha + \beta) = 5 - 1 \iff \gamma - \beta = 4$$

On additionne cette équation avec la troisième ( $\beta + \gamma = 2$ ) pour éliminer  $\beta$  :

$$(\gamma - \beta) + (\beta + \gamma) = 4 + 2 \iff 2\gamma = 6 \iff \gamma = 3$$

On en déduit  $\beta = 2 - \gamma = 2 - 3 = -1$ , puis, avec la deuxième équation,  $\alpha = 1 - \beta = 1 - (-1) = 2$ .

*Vérification* :  $2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 2+3 \\ 2-1 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , qui sont bien celles de  $\vec{s}$ . ✓

**Le système a pour unique solution  $(\alpha; \beta; \gamma) = (2; -1; 3)$  : le vecteur  $\vec{s}$  a pour coordonnées  $(2; -1; 3)$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .**

**3.** Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas colinéaires : si  $\vec{w} = k\vec{u}$ , la première coordonnée impose  $k = 1$ , mais la deuxième donnerait  $0 = 1$ , ce qui est faux. Les trois vecteurs  $\vec{s}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont donc coplanaires si et seulement si  $\vec{s}$  est combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ , c'est-à-dire s'il existe deux réels  $a$  et  $c$  tels que  $\vec{s} = a\vec{u} + c\vec{w}$ . Coordonnée par coordonnée, cela équivaut au système :

$$\begin{cases} a + c = 5 \\ a = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Les deuxième et troisième équations donnent  $a = 1$  et  $c = 2$ , mais alors  $a + c = 3 \neq 5$  : le système n'a pas de solution. Le vecteur  $\vec{s}$  n'est pas combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ .

**Les vecteurs  $\vec{s}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  ne sont donc pas coplanaires.**

*Remarque* : c'est cohérent avec la question **2.** : dans la décomposition  $\vec{s} = 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$ , la coordonnée sur  $\vec{v}$  vaut  $-1 \neq 0$ , donc  $\vec{s}$  ne peut pas appartenir au plan engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ .

**Exercice 15 ★★★ Vrai ou faux**

Notions : Représentation paramétrique d'une droite, Équation cartésienne d'un plan, Positions relatives et intersections

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est **vraie** ou **fausse**, puis justifier la réponse.

1. Soit  $d$  la droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

**Affirmation 1 :** le point  $A(5; 1; 0)$  appartient à  $d$ .

2. Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $y = 2x + 3z - 4$ .

**Affirmation 2 :** le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal de  $\mathcal{P}$ .

3. Soit  $d$  la droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ , et  $\mathcal{Q}$  le plan d'équation  $x + y + 3z - 7 = 0$ .

**Affirmation 3 :** la droite  $d$  est parallèle au plan  $\mathcal{Q}$ .

4. On considère les représentations paramétriques  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ , et  $\begin{cases} x = -1 + 2t' \\ y = 8 - 6t' \\ z = 1 + 4t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$

**Affirmation 4 :** ces deux représentations paramétriques décrivent la même droite.

5. Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  les plans d'équations  $x - 2y + z + 5 = 0$  et  $3x + 2y + z - 1 = 0$ .

**Affirmation 5 :** les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires.

**Corrigé**

**Affirmation 1 : VRAI.**

Le point  $A(5; 1; 0)$  appartient à  $d$  si et seulement s'il existe un réel  $t$  tel que ses trois coordonnées vérifient la représentation paramétrique. La première équation donne :

$$1 + 2t = 5 \iff 2t = 4 \iff t = 2$$

On teste cette valeur dans les deux autres équations :  $y = 3 - 2 = 1 \checkmark$  et  $z = -2 + 2 = 0 \checkmark$ .

Les trois coordonnées de  $A$  sont obtenues pour la même valeur  $t = 2$  du paramètre : **le point  $A$  appartient bien à la droite  $d$ .**

**Affirmation 2 : FAUX.**

Pour lire un vecteur normal, on écrit d'abord l'équation du plan sous la forme  $ax + by + cz + d = 0$  :

$$y = 2x + 3z - 4 \iff 2x - y + 3z - 4 = 0$$

Un vecteur normal de  $\mathcal{P}$  est donc  $\vec{m} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  n'est pas colinéaire à  $\vec{m}$  : si  $\vec{n} = k\vec{m}$ , la première coordonnée impose  $k = 1$ , mais la deuxième donnerait  $1 = -1$ , ce qui est faux. Or les vecteurs normaux d'un plan sont exactement les vecteurs non nuls colinéaires à l'un d'entre eux :  **$\vec{n}$  n'est pas un vecteur normal de  $\mathcal{P}$ .** (Le piège est le signe du coefficient de  $y$  lorsqu'on fait tout passer dans le membre de gauche.)

**Affirmation 3 : VRAI.**

La droite  $d$  admet pour vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et le plan  $\mathcal{Q}$  admet pour vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . On calcule leur produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

D'après le cours, une droite est parallèle à un plan (ou incluse dans ce plan) si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan. C'est le cas ici, donc  $d$  est parallèle à  $\mathcal{Q}$  ou incluse dans  $\mathcal{Q}$ .

Le point  $B(2; 1; 3)$  appartient à  $d$  (il est obtenu pour  $t = 0$ ). Or  $2 + 1 + 3 \times 3 - 7 = 2 + 1 + 9 - 7 = 5 \neq 0$ , donc  $B \notin \mathcal{Q}$  : la droite n'est pas incluse dans le plan.

**La droite  $d$  est donc bien parallèle au plan  $\mathcal{Q}$  (strictement parallèle, même).**

**Affirmation 4 : FAUX.**

La première droite admet pour vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  et la seconde  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Comme  $\vec{v} = -2\vec{u}$ , les vecteurs directeurs sont colinéaires : les deux droites sont parallèles. Pour être confondues, il faut de plus qu'elles aient un point commun.

Le point  $C(-1; 8; 1)$  appartient à la seconde droite (il est obtenu pour  $t' = 0$ ). Vérifions s'il appartient à la première : la première équation donne  $1 - t = -1$ , soit  $t = 2$ . Alors  $y = 2 + 3 \times 2 = 8$  ✓, mais  $z = 4 - 2 \times 2 = 0 \neq 1$ . Le point  $C$  n'appartient donc pas à la première droite.

Les deux droites sont strictement parallèles, donc distinctes : **les deux représentations paramétriques ne décrivent pas la même droite.**

**Affirmation 5 : VRAI.**

Le plan  $\mathcal{P}_1$  admet pour vecteur normal  $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et le plan  $\mathcal{P}_2$  admet pour vecteur normal  $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On calcule leur produit scalaire :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 3 + (-2) \times 2 + 1 \times 1 = 3 - 4 + 1 = 0$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux. Or, d'après le cours, deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux : **les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont bien perpendiculaires.**



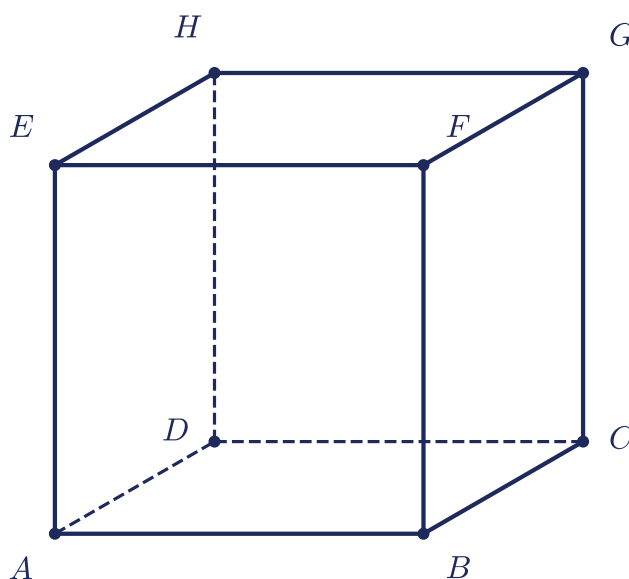
**Exercice 16 ★★★★★ Synthèse : géométrie dans un cube**

Notions : Équation cartésienne d'un plan, Projeté orthogonal et distances, Positions relatives et intersections, Systèmes linéaires et configurations de l'espace

On considère un cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1 :  $ABCD$  est la face du bas,  $EFGH$  la face du haut, avec  $E$  au-dessus de  $A$ ,  $F$  au-dessus de  $B$ ,  $G$  au-dessus de  $C$  et  $H$  au-dessus de  $D$ .

On se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ . Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

$$A(0; 0; 0), \quad B(1; 0; 0), \quad C(1; 1; 0), \quad D(0; 1; 0), \quad E(0; 0; 1), \quad F(1; 0; 1), \quad G(1; 1; 1), \quad H(0; 1; 1)$$



- Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{EC}$ ,  $\overrightarrow{AF}$  et  $\overrightarrow{AH}$ .
  - Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{EC}$  est normal au plan  $(AFH)$ .
- En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $(AFH)$  est  $x + y - z = 0$ .
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(EC)$ .
- On note  $K$  le point d'intersection de la droite  $(EC)$  et du plan  $(AFH)$ . Montrer que  $K$  a pour coordonnées  $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .
- Justifier que  $K$  est le projeté orthogonal du point  $E$  sur le plan  $(AFH)$ .
  - En déduire la distance du point  $E$  au plan  $(AFH)$ .
- Montrer que le triangle  $AFH$  est équilatéral et préciser la longueur de ses côtés.
  - En déduire que l'aire du triangle  $AFH$  vaut  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . On pourra commencer par calculer la hauteur du triangle.
  - En déduire le volume du tétraèdre  $EAFH$ . On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par  $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ , où  $\mathcal{B}$  est l'aire d'une base et  $h$  la hauteur associée.
- Retrouver ce volume en prenant cette fois le triangle  $AEH$  comme base du tétraèdre  $EAFH$ .

**Corrigé**

1. a. Pour chaque vecteur, on soustrait les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité :

$$\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b. Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires avec la formule  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$  :

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AH} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0 + 1 - 1 = 0$$

Par ailleurs, les vecteurs  $\overrightarrow{AF}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ne sont pas colinéaires : si  $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AF}$ , la première coordonnée impose  $k = 0$ , mais la deuxième donnerait  $1 = 0$ , ce qui est faux. Ce sont donc deux vecteurs non colinéaires du plan  $(AFH)$ .

Or, d'après le cours, un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan est normal à ce plan. **Le vecteur  $\overrightarrow{EC}$  est donc normal au plan  $(AFH)$ .**

2. Le plan  $(AFH)$  admet  $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  pour vecteur normal : il admet donc une équation cartésienne de la forme  $x + y - z + d = 0$ , où  $d$  est un réel à déterminer.

Le point  $A(0; 0; 0)$  appartient au plan  $(AFH)$ , donc ses coordonnées vérifient l'équation :  $0 + 0 - 0 + d = 0$ , d'où  $d = 0$ .

**Une équation cartésienne du plan  $(AFH)$  est donc  $x + y - z = 0$ .**

Vérification : pour  $F(1; 0; 1)$  :  $1 + 0 - 1 = 0$  ✓ ; pour  $H(0; 1; 1)$  :  $0 + 1 - 1 = 0$  ✓.

3. La droite  $(EC)$  passe par le point  $E(0; 0; 1)$  et admet pour vecteur directeur  $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$(EC) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

4. Le point  $K$  appartient à la fois à la droite  $(EC)$  et au plan  $(AFH)$  : on cherche la valeur de  $t$  pour laquelle le point de paramètre  $t$  de  $(EC)$  vérifie l'équation du plan. On substitue les expressions de  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans l'équation  $x + y - z = 0$  :

$$t + t - (1 - t) = 0 \iff 3t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}$$

Pour  $t = \frac{1}{3}$  :  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{1}{3}$  et  $z = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .

**Le point d'intersection de  $(EC)$  et de  $(AFH)$  est donc bien  $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .**

5. a. La droite  $(EC)$  passe par  $E$  et son vecteur directeur  $\overrightarrow{EC}$  est normal au plan  $(AFH)$  (question 1. b.) : la droite  $(EC)$  est donc la droite perpendiculaire au plan  $(AFH)$  passant par  $E$ .

Or, par définition, le projeté orthogonal d'un point sur un plan est le point d'intersection de ce plan avec la perpendiculaire au plan passant par ce point. **Le point  $K$  est donc le projeté orthogonal de  $E$  sur le plan  $(AFH)$ .**

b. D'après le cours, la distance d'un point à un plan est la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur le plan : la distance de  $E$  au plan  $(AFH)$  est donc  $EK$ . On calcule :

$$\overrightarrow{EK} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{2}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$EK = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**La distance du point  $E$  au plan  $(AFH)$  vaut  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .**

**6. a.** On calcule les longueurs des trois côtés du triangle  $AFH$  :

$$AF = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad AH = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

et, avec  $\overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  :

$$FH = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Les trois côtés ont la même longueur (ce sont trois diagonales de faces du cube) : **le triangle  $AFH$  est équilatéral, de côté  $\sqrt{2}$ .**

**b.** Soit  $M$  le milieu de  $[FH]$ . Dans le triangle équilatéral  $AFH$ , la médiane ( $AM$ ) est aussi une hauteur : le triangle  $AMF$  est rectangle en  $M$ , avec  $AF = \sqrt{2}$  et  $MF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . D'après le théorème de Pythagore :

$$AM^2 = AF^2 - MF^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \text{donc} \quad AM = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

L'aire du triangle  $AFH$  vaut alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times FH \times AM = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**L'aire du triangle  $AFH$  vaut bien  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .**

**c.** On prend le triangle  $AFH$  comme base du tétraèdre  $EAFH$ . La hauteur associée est la distance du sommet  $E$  au plan  $(AFH)$ , c'est-à-dire  $EK = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (question 5. b.), puisque  $K$  est le projeté orthogonal de  $E$  sur ce plan. D'après la formule rappelée :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

**Le volume du tétraèdre  $EAFH$  vaut  $\frac{1}{6}$ .**

**7.** Les points  $A(0; 0; 0)$ ,  $E(0; 0; 1)$  et  $H(0; 1; 1)$  ont tous une abscisse nulle : ils appartiennent au plan d'équation  $x = 0$ , qui est le plan de la face  $ADHE$  du cube.

*Aire de la base.* On a  $\overrightarrow{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc  $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EH} = 0 + 0 + 0 = 0$  : le triangle  $AEH$  est rectangle en  $E$ , avec  $EA = EH = 1$ . Son aire vaut :

$$\mathcal{B}' = \frac{1}{2} \times EA \times EH = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

*Hauteur associée.* La hauteur du tétraèdre relative à cette base est la distance du sommet  $F(1; 0; 1)$  au plan  $(AEH)$  d'équation  $x = 0$ . Le vecteur  $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $x = 0$

(il est colinéaire au vecteur normal  $\vec{i}$ ) et  $E$  appartient à ce plan :  $E$  est donc le projeté orthogonal de  $F$  sur le plan  $(AEH)$ , et la hauteur vaut  $FE = 1$ .

*Volume.* On obtient :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B}' \times FE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$

**On retrouve bien  $V = \frac{1}{6}$ , en cohérence avec la question 6.**