

Devoir surveillé — Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Tale spé — 120 min

Durée : 120 min — Barème : 20 points. Calculatrice selon les consignes de l'énoncé. La rédaction et la clarté comptent.

Exercice 1 (4 points) — Automatismes

Les quatre questions sont indépendantes. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. **(1,5 pt)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites suivantes :

- a.** la droite d_1 passant par le point $A(2; -1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; **b.** la droite (BC) , où $B(1; 0; 2)$ et $C(3; -1; 5)$.

2. **(1 pt)** On considère la droite d de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- a.** Donner un point et un vecteur directeur de d . **b.** Le point $M(1; 6; 3)$ appartient-il à d ? Justifier.

3. **(0,75 pt)** Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $E(1; -2; 0)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. **(0,75 pt)** Donner un vecteur normal à chacun des plans suivants :

- a.** $P_1 : 2x - 5y + z - 7 = 0$ **b.** $P_2 : x = 3y - 2z + 4$

Exercice 2 (5 points) — Projeté orthogonal et distance

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P d'équation cartésienne

$$2x - y + 2z - 3 = 0$$

et le point $A(5; -3; 4)$.

1. **(0,5 pt)** Vérifier que le point A n'appartient pas au plan P .
2. **(1 pt)** Donner un vecteur normal $\vec{n}$ du plan P , puis déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par A et orthogonale au plan P .
3. **(1,5 pt)** Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite d et du plan P . Justifier que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan P .
4. **(1 pt)** En déduire la distance du point A au plan P (on donnera la valeur exacte).
5. **(1 pt)** *Question d'interprétation.* On note A' le symétrique du point A par rapport au plan P . Déterminer les coordonnées de A' .

Exercice 3 (5 points) — Positions relatives

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P d'équation cartésienne

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

1. **(2 pts)** On considère la droite d_1 de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a. Justifier que la droite d_1 et le plan P sont sécants.

b. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I .

2. **(1,5 pt)** On considère la droite d_2 de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + s \\ z = 2 + 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Démontrer que la droite d_2 est strictement parallèle au plan P .

3. **(1,5 pt)** On considère les droites d_3 et d_4 de représentations paramétriques respectives

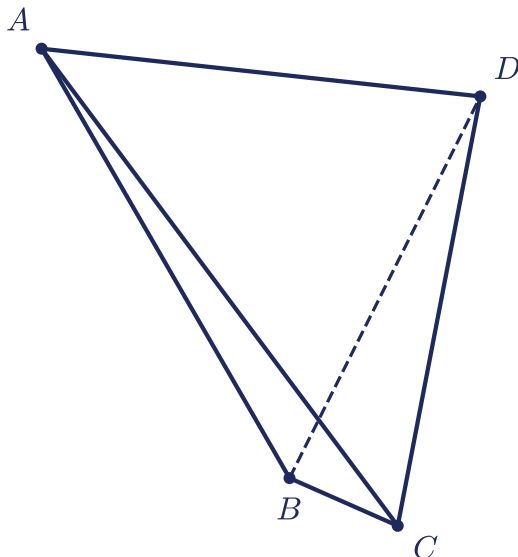
$$d_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_4 : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Déterminer la position relative des droites d_3 et d_4 . On attend une justification complète.

Exercice 4 (6 points) — Problème : dans un tétraèdre

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points

$$A(-2; 0; 3), \quad B(1; 0; 0), \quad C(0; 1; 0) \quad \text{et} \quad D(1; 1; 2).$$



1. **(0,75 pt)** Démontrer que les points B , C et D ne sont pas alignés. Ils définissent donc le plan (BCD) .
2. **(1,25 pt)** On cherche un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul, normal au plan (BCD) .
 - a. Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BCD) si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, puis en déduire un système de deux équations d'inconnues a , b et c .
 - b. Résoudre ce système et en déduire que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) .
3. **(1 pt)** Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD) , puis vérifier que le point A n'appartient pas à ce plan. Que peut-on en déduire pour les points A , B , C et D ?
4. **(0,75 pt)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD) .
5. **(1,5 pt)** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan (BCD) , puis calculer la distance AH .
6. **(0,75 pt)** On admet que l'aire du triangle BCD vaut $\frac{3}{2}$ (en unités d'aire). Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.