

Devoir surveillé — Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Tale spé — 120 min

Durée : 120 min — Barème : 20 points. Calculatrice selon les consignes de l'énoncé. La rédaction et la clarté comptent.

Exercice 1 (4 points) — Automatismes

Les quatre questions sont indépendantes. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. **(1,5 pt)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites suivantes :

- a. la droite d_1 passant par le point $A(2; -1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; b. la droite (BC) , où $B(1; 0; 2)$ et $C(3; -1; 5)$.

2. **(1 pt)** On considère la droite d de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- a. Donner un point et un vecteur directeur de d . b. Le point $M(1; 6; 3)$ appartient-il à d ? Justifier.

3. **(0,75 pt)** Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $E(1; -2; 0)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. **(0,75 pt)** Donner un vecteur normal à chacun des plans suivants :

- a. $P_1 : 2x - 5y + z - 7 = 0$ b. $P_2 : x = 3y - 2z + 4$

Corrigé

1. a. La droite d_1 passe par le point $A(2; -1; 3)$ et admet $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

D'après le cours, un point $M(x; y; z)$ appartient à d_1 si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui donne :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(0,75 pt)

1. b. La droite (BC) passe par $B(1; 0; 2)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1-0 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique :

$$(BC) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(0,75 pt)

2. a. En prenant $t = 0$ dans la représentation paramétrique, on obtient que **le point de coordonnées $(3; 2; 1)$ appartient à d** . Les coefficients de t fournissent un vecteur directeur :

le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige d . (0,5 pt)

2. b. Le point $M(1; 6; 3)$ appartient à d si et seulement s'il existe un réel t vérifiant simultanément les trois équations. La première équation donne : $3 - t = 1 \iff t = 2$. On teste cette valeur dans les deux autres équations : $y = 2 + 2 \times 2 = 6$ et $z = 1 + 2 = 3$. Les trois équations sont vérifiées pour la même valeur $t = 2$, donc **le point M appartient à la droite d .** (0,5 pt)

3. D'après le cours, un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $3x - y + 2z + d = 0$, où d est un réel à déterminer. Comme $E(1; -2; 0)$ appartient à P , ses coordonnées vérifient cette équation :

$$3 \times 1 - (-2) + 2 \times 0 + d = 0 \iff 5 + d = 0 \iff d = -5$$

Une équation cartésienne de P est $3x - y + 2z - 5 = 0$. (0,75 pt)

4. D'après le cours, le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

a. Par lecture directe des coefficients : $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à P_1 . **b.** On réécrit l'équation : $x = 3y - 2z + 4 \iff x - 3y + 2z - 4 = 0$, donc $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à P_2 .

(0,75 pt)

Exercice 2 (5 points) — Projeté orthogonal et distance

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P d'équation cartésienne

$$2x - y + 2z - 3 = 0$$

et le point $A(5; -3; 4)$.

1. **(0,5 pt)** Vérifier que le point A n'appartient pas au plan P .
2. **(1 pt)** Donner un vecteur normal $\vec{n}$ du plan P , puis déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par A et orthogonale au plan P .
3. **(1,5 pt)** Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite d et du plan P . Justifier que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan P .
4. **(1 pt)** En déduire la distance du point A au plan P (on donnera la valeur exacte).
5. **(1 pt)** *Question d'interprétation.* On note A' le symétrique du point A par rapport au plan P . Déterminer les coordonnées de A' .

Corrigé

1. On remplace les coordonnées de $A(5; -3; 4)$ dans le membre de gauche de l'équation de P :

$$2 \times 5 - (-3) + 2 \times 4 - 3 = 10 + 3 + 8 - 3 = 18$$

Comme $18 \neq 0$, les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation du plan : **le point A n'appartient pas à P .** (0,5 pt)

2. D'après le cours, le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $(a; b; c)$. Ici, **le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à P .** (0,25 pt)

La droite d est orthogonale à P , donc elle est dirigée par $\vec{n}$. Comme elle passe par $A(5; -3; 4)$, une représentation paramétrique de d est :

$$d : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(0,75 pt)

3. Le point H appartient à la fois à d et à P : il existe donc un réel t tel que les coordonnées $(5 + 2t; -3 - t; 4 + 2t)$ vérifient l'équation de P . On reporte :

$$2(5+2t) - (-3-t) + 2(4+2t) - 3 = 0 \iff 10+4t+3+t+8+4t-3 = 0 \iff 9t+18 = 0 \iff t = -2$$

Pour $t = -2$: $x = 5 - 4 = 1$, $y = -3 + 2 = -1$ et $z = 4 - 4 = 0$, donc $H(1; -1; 0)$. (1 pt)

Vérification : $2 \times 1 - (-1) + 2 \times 0 - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$: on a bien $H \in P$. ✓

Justification : H appartient au plan P , et la droite (AH) , qui n'est autre que d , est orthogonale à P . Par définition, $H(1; -1; 0)$ **est donc le projeté orthogonal de A sur le plan P .** (0,5 pt)

4. D'après le cours, la distance du point A au plan P est la distance AH , où H est le projeté orthogonal de A sur P : c'est la plus courte distance entre A et un point du plan. On calcule :

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 1-5 \\ -1-(-3) \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Le repère étant orthonormé :

$$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

La distance du point A au plan P vaut 6. (1 pt)

5. Par définition du symétrique par rapport à un plan, A' est le point tel que H soit le milieu du segment $[AA']$. Les coordonnées de H sont donc les moyennes de celles de A et de A' ; en notant $A'(x' ; y' ; z')$:

$$\begin{cases} \frac{5+x'}{2} = 1 \\ \frac{-3+y'}{2} = -1 \\ \frac{4+z'}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -3 \\ y' = 1 \\ z' = -4 \end{cases}$$

Le symétrique de A par rapport au plan P est le point $A'(-3 ; 1 ; -4)$. (1 pt)

Vérification : $2 \times (-3) - 1 + 2 \times (-4) - 3 = -18$, valeur opposée à celle obtenue pour A à la question 1 : A' est bien à la même distance de P que A , de l'autre côté du plan. ✓

Exercice 3 (5 points) — Positions relatives

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P d'équation cartésienne

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

1. (2 pts) On considère la droite d_1 de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a. Justifier que la droite d_1 et le plan P sont sécants.

b. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I .

2. (1,5 pt) On considère la droite d_2 de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + s \\ z = 2 + 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Démontrer que la droite d_2 est strictement parallèle au plan P .

3. (1,5 pt) On considère les droites d_3 et d_4 de représentations paramétriques respectives

$$d_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_4 : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Déterminer la position relative des droites d_3 et d_4 . On attend une justification complète.

Corrigé

1. a. La droite d_1 est dirigée par le vecteur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (coefficients de t) et le plan P admet pour

vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (coefficients de l'équation cartésienne). On calcule le produit scalaire :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0$$

D'après le cours, une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan. Ici $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} \neq 0$, donc d_1 n'est pas parallèle à P : **la droite d_1 et le plan P sont sécants.** (0,75 pt)

1. b. Le point I appartient à d_1 et à P : il existe un réel t tel que les coordonnées $(2 + t; -1 + t; 3 + 2t)$ vérifient l'équation de P . On reporte :

$$(2 + t) + 2(-1 + t) - (3 + 2t) + 1 = 0 \iff 2 + t - 2 + 2t - 3 - 2t + 1 = 0 \iff t - 2 = 0 \iff t = 2$$

Pour $t = 2$: $x = 2 + 2 = 4$, $y = -1 + 2 = 1$ et $z = 3 + 4 = 7$. **Le point d'intersection de d_1**

et de P est $I(4; 1; 7)$. (1,25 pt)

Vérification : $4 + 2 \times 1 - 7 + 1 = 0$: I appartient bien à P . ✓

2. La droite d_2 est dirigée par $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. On calcule :

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times (-1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

Le vecteur $\vec{u}_2$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$, donc la droite d_2 est parallèle au plan P : soit elle est incluse dans P , soit elle lui est strictement parallèle. (0,75 pt)

Pour trancher, on teste un point de d_2 : pour $s = 0$, le point $B(1; 1; 2)$ appartient à d_2 . Or :

$$1 + 2 \times 1 - 2 + 1 = 2 \neq 0$$

donc $B \notin P$, et la droite d_2 n'est pas incluse dans P . **La droite d_2 est strictement parallèle au plan P .** (0,75 pt)

3. La droite d_3 est dirigée par $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et la droite d_4 par $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Étude du parallélisme. Si $\vec{u}_4$ et $\vec{u}_3$ étaient colinéaires, il existerait un réel k tel que $\vec{u}_4 = k\vec{u}_3$; la première coordonnée donnerait $k = 2$, mais alors la deuxième donnerait $1 = 2 \times 2 = 4$, ce qui est faux. Les vecteurs $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ ne sont pas colinéaires : les droites d_3 et d_4 ne sont ni strictement parallèles ni confondues. (0,5 pt)

Recherche d'un point commun. Un éventuel point commun correspond à des réels t et t' solutions du système :

$$\begin{cases} t = 1 + 2t' \\ 1 + 2t = 3 + t' \\ 2 - t = t' \end{cases}$$

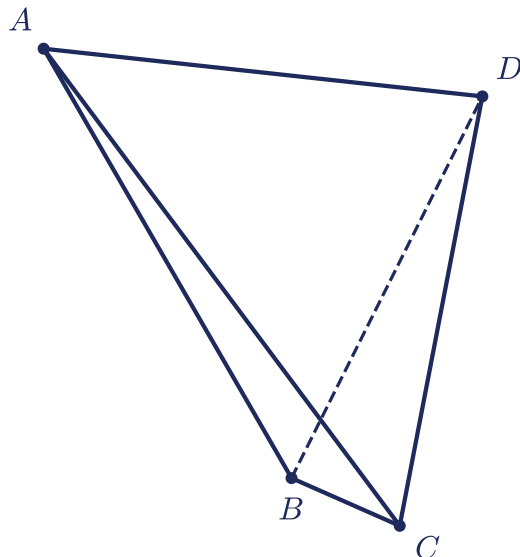
On reporte la première équation dans la deuxième : $1 + 2(1 + 2t') = 3 + t'$, soit $3 + 4t' = 3 + t'$, d'où $3t' = 0$ et $t' = 0$, puis $t = 1$. On contrôle ces valeurs dans la troisième équation : $2 - 1 = 1 \neq 0 = t'$. Le système n'a pas de solution : les droites d_3 et d_4 n'ont aucun point commun, elles ne sont pas sécantes. (0,75 pt)

Conclusion. Les droites d_3 et d_4 ne sont ni parallèles ni sécantes : **elles ne sont pas coplanaires.** (0,25 pt)

Exercice 4 (6 points) — Problème : dans un tétraèdre

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points

$$A(-2; 0; 3), \quad B(1; 0; 0), \quad C(0; 1; 0) \quad \text{et} \quad D(1; 1; 2).$$



1. **(0,75 pt)** Démontrer que les points B , C et D ne sont pas alignés. Ils définissent donc le plan (BCD) .
2. **(1,25 pt)** On cherche un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul, normal au plan (BCD) .
 - a. Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BCD) si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, puis en déduire un système de deux équations d'inconnues a , b et c .
 - b. Résoudre ce système et en déduire que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) .
3. **(1 pt)** Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD) , puis vérifier que le point A n'appartient pas à ce plan. Que peut-on en déduire pour les points A , B , C et D ?
4. **(0,75 pt)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD) .
5. **(1,5 pt)** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan (BCD) , puis calculer la distance AH .
6. **(0,75 pt)** On admet que l'aire du triangle BCD vaut $\frac{3}{2}$ (en unités d'aire). Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

Corrigé

1. On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si ces vecteurs étaient colinéaires, il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{BC} = k \overrightarrow{BD}$; la première coordonnée imposerait $-1 = k \times 0 = 0$, ce qui est impossible. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires, donc **les points B, C et D ne sont pas alignés** : ils définissent le plan (BCD) . (0,75 pt)

2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires : ils forment un couple de vecteurs directeurs du plan (BCD) . D'après le cours, un vecteur est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan. Ainsi :

$$\vec{n} \text{ est normal à } (BCD) \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

En exprimant ces deux produits scalaires en coordonnées (repère orthonormé), on obtient le système :

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

(0,5 pt)

2. b. La première équation donne $b = a$; en reportant dans la seconde : $a + 2c = 0$, soit $c = -\frac{a}{2}$.

Les solutions du système sont donc les triplets $\left(a; a; -\frac{a}{2}\right)$, où a est un réel quelconque. En

choisissant $a = 2$, on obtient $b = 2$ et $c = -1$: **le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, non nul, est normal au**

plan (BCD) . (0,75 pt)

Vérification : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 + 2 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 2 - 2 = 0$. ✓

3. Le plan (BCD) admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal, donc une équation cartésienne de la

forme $2x + 2y - z + d = 0$. Comme $B(1; 0; 0)$ appartient à ce plan : $2 \times 1 + 0 - 0 + d = 0$, d'où $d = -2$.

Une équation cartésienne du plan (BCD) est $2x + 2y - z - 2 = 0$. (0,5 pt)

Vérification avec les deux autres points : pour $C(0; 1; 0)$: $0 + 2 - 0 - 2 = 0$; pour $D(1; 1; 2)$: $2 + 2 - 2 - 2 = 0$. ✓

Pour le point $A(-2; 0; 3)$:

$$2 \times (-2) + 2 \times 0 - 3 - 2 = -9 \neq 0$$

donc $A \notin (BCD)$. **Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires : $ABCD$ est bien un tétraèdre.** (0,5 pt)

4. La droite Δ est orthogonale au plan (BCD) , donc elle est dirigée par le vecteur normal

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Comme elle passe par $A(-2; 0; 3)$, une représentation paramétrique de Δ est :

$$\Delta : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(0,75 pt)

5. Le projeté orthogonal H de A sur le plan (BCD) est le point d'intersection de Δ et de (BCD) . Il existe donc un réel t tel que les coordonnées $(-2 + 2t; 2t; 3 - t)$ vérifient l'équation du plan. On reporte :

$$2(-2 + 2t) + 2(2t) - (3 - t) - 2 = 0 \iff -4 + 4t + 4t - 3 + t - 2 = 0 \iff 9t - 9 = 0 \iff t = 1$$

Pour $t = 1$: $x = -2 + 2 = 0$, $y = 2$ et $z = 3 - 1 = 2$. **Le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) est le point $H(0; 2; 2)$.** (1 pt)

On calcule ensuite $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 2 - 0 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le repère étant orthonormé :

$$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

La distance AH vaut 3. (0,5 pt)

6. Le segment $[AH]$ est perpendiculaire au plan (BCD) et H appartient à ce plan : AH est donc la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de A , relative à la base BCD . Avec $\mathcal{B} = \frac{3}{2}$ (aire admise du triangle BCD) et $h = AH = 3$:

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Le volume du tétraèdre $ABCD$ vaut $\frac{3}{2}$ unités de volume. (0,75 pt)