

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Cours — Tale spé

Les deux chapitres précédents ont équipé l'espace de tous les outils vectoriels : combinaisons linéaires, bases et repères, puis produit scalaire, orthogonalité et vecteur normal. Il est temps de récolter les fruits de ce travail. La donnée d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ établit un pont entre deux mondes : d'un côté la géométrie de l'espace, avec ses droites, ses plans et ses intersections ; de l'autre le calcul algébrique dans $\mathbb{R}^3$, avec ses équations et ses systèmes. C'est l'idée fondatrice de la géométrie analytique, inaugurée par René Descartes dans *La Géométrie* (1637) : remplacer les figures par des nombres, et les raisonnements par des calculs. Concrètement, nous allons apprendre à décrire une droite par une **représentation paramétrique** et un plan par une **équation cartésienne**, puis à exploiter ces descriptions pour calculer un projeté orthogonal, une distance, une intersection, ou pour trancher une question de configuration (alignement, coplanarité, parallélisme, orthogonalité) en résolvant un système d'équations. Dans tout le chapitre, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 Représentation paramétrique d'une droite

Commençons par la question la plus naturelle : comment décrire, par des équations, l'ensemble des points d'une droite de l'espace ? Le point de départ est la caractérisation vectorielle vue au chapitre sur les vecteurs de l'espace : la droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ pour un certain réel t . Il suffit de traduire cette égalité en coordonnées.

Notons $A(x_A; y_A; z_A)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$. Pour un point $M(x; y; z)$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$, et l'égalité $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ équivaut à l'égalité des trois coordonnées : $x - x_A = ta$, $y - y_A = tb$ et $z - z_A = tc$. D'où la définition suivante.

Définition

Représentation paramétrique d'une droite. Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul. La droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$. Ce système est appelé une **représentation paramétrique** de d , et le réel t est le **paramètre**.

L'interprétation la plus parlante est **cinématique** : imaginez un point mobile qui, à l'instant $t = 0$, se trouve en A , et qui se déplace à vitesse constante de vecteur vitesse $\vec{u}$. À l'instant t , il occupe la position M donnée par le système ci-dessus. La droite d est la trajectoire de ce point mobile : quand t parcourt $\mathbb{R}$ (les instants passés comme futurs), le point M parcourt toute la droite. Chaque valeur du paramètre correspond à un unique point de la droite, et réciproquement chaque point de la droite est atteint pour une unique valeur de t .

Méthode

Déterminer une représentation paramétrique d'une droite.

- **Par un point et un vecteur directeur** : reporter directement les coordonnées de A (termes constants) et de $\vec{u}$ (coefficients de t) dans le système, sans oublier de préciser $t \in \mathbb{R}$.
- **Par deux points A et B distincts** : calculer d'abord le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, puis appliquer le cas précédent avec A et $\overrightarrow{AB}$.

Exemple

a. La droite d passant par $A(1; -2; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(2; 0; 1)$ et $B(5; -1; 3)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) , donc :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$. On retrouve A pour $t = 0$ et B pour $t = 1$.

Dans l'autre sens, une représentation paramétrique se « lit » : elle livre immédiatement un point et un vecteur directeur de la droite.

Méthode**Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.**

- Les **termes constants** donnent les coordonnées d'un point de la droite (celui obtenu pour $t = 0$).
- Les **coefficients de t** donnent les coordonnées d'un vecteur directeur.
- **Tester si un point M_0 appartient à la droite** : remplacer x, y, z par les coordonnées de M_0 et résoudre chaque équation en t . Le point appartient à la droite si et seulement si les trois équations donnent la **même** valeur de t .

Exemple

Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$. La droite d passe par le point $A(3; 1; 0)$ et admet $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

- Le point $M_1(1; 5; 8)$ appartient-il à d ? La première équation donne $1 = 3 - t$, soit $t = 2$; la deuxième $5 = 1 + 2t$, soit $t = 2$; la troisième $8 = 4t$, soit $t = 2$. Les trois valeurs coïncident : $M_1 \in d$, et M_1 est le point de paramètre $t = 2$.
- Le point $M_2(2; 3; 1)$ appartient-il à d ? La première équation donne $t = 1$, la deuxième aussi, mais la troisième donne $t = \frac{1}{4}$. Les valeurs ne coïncident pas : $M_2 \notin d$.

Un point de vigilance essentiel : une droite admet une **infinité** de représentations paramétriques. Rien n'oblige à partir du même point (tout point de la droite convient) ni du même vecteur directeur (tout vecteur colinéaire non nul convient). Deux systèmes d'apparence très différente peuvent donc décrire exactement la même droite.

Propriété

Non-unicité de la représentation paramétrique. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques. Deux représentations paramétriques décrivent la même droite si et seulement si :

1. leurs vecteurs directeurs (coefficients du paramètre) sont **colinéaires**;
2. le point lu dans l'une des représentations **appartient** à la droite décrite par l'autre.

Exemple

Les systèmes $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x = 5 - 4s \\ y = -4 + 2s \\ z = 5 - 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$ décrivent-ils la même droite ?

Les vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ vérifient $\vec{v} = -2\vec{u}$: ils sont colinéaires, les deux

droites sont donc parallèles. Le point $B(5; -4; 5)$ lu dans la seconde appartient-il à la première ? On résout : $5 = 1 + 2t$ donne $t = 2$; $-4 = -2 - t$ donne $t = 2$; $5 = 3 + t$ donne $t = 2$. Oui : les deux systèmes représentent la **même droite**.

2 Équation cartésienne d'un plan

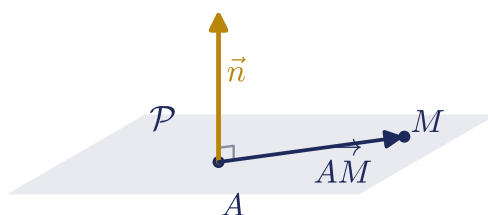
Passons aux plans. Rappelons l'acquis du chapitre précédent : un **vecteur normal** à un plan est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur de ce plan, et un plan est entièrement déterminé par un point et un vecteur normal. En première, vous avez vu que dans le plan repéré, une droite est décrite par une équation du type $ax + by + c = 0$. Dans l'espace, une équation de cette forme (avec trois variables) décrit-elle une droite ? Non : elle décrit un **plan**. C'est le résultat central du chapitre, et sa démonstration est exigible au baccalauréat.

Propriété

Équation cartésienne d'un plan. Soient A un point de l'espace et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

- Le plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d est un réel.
- Réciproquement, si a, b, c ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Une telle équation est appelée **équation cartésienne** du plan P .



Démonstration (exigible). Notons $A(x_A; y_A; z_A)$.

Sens direct. D'après la caractérisation vue au chapitre précédent, un point $M(x; y; z)$ appartient au plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$, et comme le repère est orthonormé, le produit scalaire se calcule avec les coordonnées :

$$\begin{aligned} M \in P &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\iff ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0. \end{aligned}$$

En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, qui est un réel, on obtient bien : $M \in P \iff ax + by + cz + d = 0$.

Réciproque. Soient a, b, c des réels non tous nuls, d un réel, et E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$. Montrons d'abord que E n'est pas vide. L'un au moins des trois réels a, b, c est non nul ; supposons par exemple $a \neq 0$ (le raisonnement est identique dans les deux autres cas). Alors le point $A \left(-\frac{d}{a}; 0; 0 \right)$ vérifie l'équation, puisque $a \times \left(-\frac{d}{a} \right) + b \times 0 + c \times 0 + d = -d + d = 0$. Ainsi $A \in E$, et en particulier $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$.

Soit maintenant $M(x; y; z)$ un point quelconque. En soustrayant l'égalité vérifiée par A :

$$\begin{aligned} M \in E &\iff ax + by + cz + d = 0 \\ &\iff (ax + by + cz + d) - (ax_A + by_A + cz_A + d) = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble E est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$: c'est exactement le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, d'après la caractérisation du chapitre précédent. $\square$

Une remarque avant d'aller plus loin : ce théorème dit qu'une équation du premier degré à trois inconnues décrit toujours un plan, jamais une droite. Une droite de l'espace ne peut donc **pas** être décrite par une seule équation cartésienne ; c'est précisément pour cela que nous l'avons décrite par une représentation paramétrique.

Méthode

Déterminer une équation cartésienne d'un plan dont on connaît un point A et un vecteur

normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1. Écrire l'équation sous la forme $ax + by + cz + d = 0$: les coefficients a, b, c sont les coordonnées de $\vec{n}$.
2. Déterminer d en écrivant que les coordonnées de A vérifient l'équation.

(Variante équivalente : développer directement la condition $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.)

Exemple

Déterminons une équation cartésienne du plan P passant par $A(2; -1; 3)$ et de vecteur normal

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'équation est de la forme $x + 2y - 2z + d = 0$. Le point A appartient à P , donc

$2 + 2 \times (-1) - 2 \times 3 + d = 0$, soit $-6 + d = 0$, d'où $d = 6$. Une équation cartésienne de P est donc :

$$x + 2y - 2z + 6 = 0.$$

Méthode

Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne. Dans l'équation $ax + by + cz +$

$d = 0$, les coefficients de x, y, z donnent directement un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Pour obtenir

un point du plan, choisir des valeurs simples pour deux des variables et calculer la troisième grâce à l'équation.

Exemple

Le plan P d'équation $3x - y + 2z - 6 = 0$ admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal. En choisissant

$y = 0$ et $z = 0$, l'équation donne $3x = 6$, soit $x = 2$: le point $B(2; 0; 0)$ appartient à P . Comme une équation cartésienne peut être multipliée par n'importe quel réel non nul sans changer l'ensemble des solutions, $6x - 2y + 4z - 12 = 0$ est une autre équation du **même** plan : un plan admet une infinité d'équations cartésiennes, toutes proportionnelles entre elles.

Certains plans ont des équations remarquablement simples, qu'il faut savoir reconnaître au premier coup d'œil.

Exemple**Plans particuliers.**

- Le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, dit plan (xOy) , a pour équation $z = 0$: c'est le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{k}$. De même, $y = 0$ est une équation du plan (xOz) et $x = 0$ une équation du plan (yOz) : ce sont les trois **plans de coordonnées**.
- Plus généralement, $z = 5$ est l'équation du plan parallèle à (xOy) passant par le point $(0; 0; 5)$: tous les plans « horizontaux » ont une équation de la forme $z = k$.
- Le plan d'équation $2x + 3y - 6 = 0$ (aucun terme en z) a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui est orthogonal à $\vec{k}$: ce plan est **parallèle à l'axe** (Oz) . C'est un « mur vertical » dressé au-dessus d'une droite du plan (xOy) .

Le vecteur normal concentre toute l'information de direction d'un plan : deux plans se comparent donc en comparant leurs vecteurs normaux. C'est un outil d'une efficacité redoutable.

Propriété

Parallélisme et perpendicularité via les vecteurs normaux. Soient P et P' deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, et d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- P et P' sont **parallèles** si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont **colinéaires**.
- P et P' sont **perpendiculaires** si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.
- d est **orthogonale** à P si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont **colinéaires**.
- d est **parallèle** à P si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

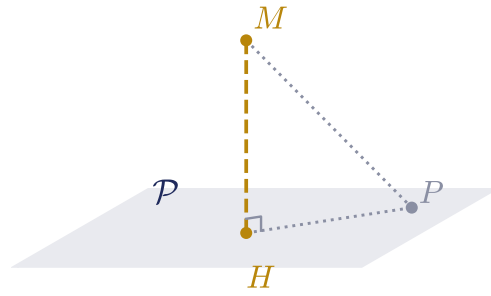
Exemple

Soient $P : 2x - y + z - 4 = 0$, $P' : -4x + 2y - 2z + 1 = 0$ et $P'' : x + y - z + 2 = 0$.

- $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ vérifient $\vec{n}' = -2\vec{n}$: les plans P et P' sont **parallèles**. Sont-ils confondus ? Le point $(2; 0; 0)$ appartient à P (car $4 - 0 + 0 - 4 = 0$) mais pas à P' (car $-8 + 0 - 0 + 1 = -7 \neq 0$) : ils sont strictement parallèles.
- $\vec{n} \cdot \vec{n}'' = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) = 0$: les plans P et P'' sont **perpendiculaires**.
- La droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$: elle est **orthogonale** au plan P .

3 Projeté orthogonal et distances

Le chapitre précédent a défini le **projeté orthogonal** d'un point M sur un plan P : c'est le point H de P tel que la droite (MH) soit orthogonale à P , et c'est le point de P **le plus proche** de M . La distance de M à P est par définition la distance MH . Tout cela était géométrique ; nous avons désormais les outils pour **calculer** effectivement H , et donc la distance. L'idée est lumineuse : le projeté H est le point d'intersection de P avec la droite passant par M et dirigée par le vecteur normal $\vec{n}$, et cette droite se paramètre immédiatement.



Méthode

Projeté orthogonal d'un point M sur un plan P donné par une équation cartésienne.

1. Lire un vecteur normal $\vec{n}$ dans l'équation de P .
2. Paramétrer la droite Δ passant par M et de vecteur directeur $\vec{n}$.
3. Substituer les expressions de x, y, z dans l'équation de P et résoudre l'équation obtenue, d'inconnue t .
4. Reporter la valeur de t trouvée dans la représentation paramétrique : on obtient les coordonnées de H .
5. Pour la distance de M à P , calculer $MH = \|\overrightarrow{MH}\|$.

Exemple

Déterminons le projeté orthogonal H du point $M(1; 2; 3)$ sur le plan $P : 2x - y + 2z - 3 = 0$, puis la distance de M à P .

Un vecteur normal de P est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La droite Δ passant par M et dirigée par $\vec{n}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$. Substituons dans l'équation de P :

$$2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(3 + 2t) - 3 = 0 \iff 2 + 4t - 2 + t + 6 + 4t - 3 = 0 \iff 9t + 3 = 0,$$

d'où $t = -\frac{1}{3}$. En reportant dans la représentation paramétrique :

$$H \left(1 - \frac{2}{3}; 2 + \frac{1}{3}; 3 - \frac{2}{3} \right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad H \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3} \right).$$

On vérifie que $H \in P : \frac{2}{3} - \frac{7}{3} + \frac{14}{3} - 3 = \frac{9}{3} - 3 = 0$. Enfin, $\overrightarrow{MH} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, donc la distance de M à P vaut :

$$MH = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+1+4}{9}} = \sqrt{1} = 1.$$

La même stratégie s'adapte au projeté orthogonal sur une **droite**, à un changement près : cette fois, c'est la droite qui est paramétrée, et c'est la condition d'orthogonalité qui fournit l'équation en t .

Méthode

Projeté orthogonal d'un point M sur une droite d donnée par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.

1. Écrire le point courant H de d en fonction du paramètre t (c'est-à-dire $\overrightarrow{AH} = t\vec{u}$, soit H donné par la représentation paramétrique de d).
2. Traduire la condition d'orthogonalité $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$: c'est une équation du premier degré en t .
3. Résoudre, puis reporter la valeur de t pour obtenir les coordonnées de H .
4. Pour la distance de M à d , calculer $MH = \|\overrightarrow{MH}\|$.

Exemple

Soit d la droite passant par $A(0; 0; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, et soit $M(3; 3; 1)$. Le

point courant de d est $H(t; 2t; 1 + 2t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. On calcule $\overrightarrow{MH} \begin{pmatrix} t-3 \\ 2t-3 \\ 2t \end{pmatrix}$, puis :

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = (t-3) + 2(2t-3) + 2 \times 2t = 9t - 9.$$

La condition $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$ donne $t = 1$, d'où $H(1; 2; 3)$. Le projeté orthogonal de M sur d est $H(1; 2; 3)$, et la distance de M à d vaut :

$$MH = \sqrt{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3.$$

Retenez la philosophie de cette section : **toute distance d'un point à un plan ou à une droite se calcule en passant par le projeté orthogonal**. C'est la méthode du programme, et elle a l'avantage de fournir à la fois la distance et le point qui la réalise.

4 Positions relatives et intersections

Le chapitre sur les vecteurs de l'espace a dressé le catalogue géométrique des positions relatives de droites et de plans. Nous pouvons maintenant les **déterminer par le calcul** : chaque étude d'intersection se ramène à la résolution d'une équation ou d'un système, et le nombre de solutions raconte la géométrie.

4.1 Intersection d'une droite et d'un plan

C'est le cas le plus simple et le plus fréquent : on substitue la représentation paramétrique de la droite dans l'équation cartésienne du plan.

Méthode

Intersection d'une droite d (paramétrée) et d'un plan P (équation cartésienne).

Substituer les expressions de x , y , z en fonction de t dans l'équation de P . On obtient une équation du premier degré en t , et trois cas se présentent :

- **une unique solution** t_0 : la droite et le plan sont **sécants**, en le point de paramètre t_0 ;
- **aucune solution** (équation du type $0 \times t = k$ avec $k \neq 0$) : la droite est **strictement parallèle** au plan ;
- **tout réel t est solution** (équation $0 = 0$) : la droite est **incluse** dans le plan.

Exemple

Soit P le plan d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$.

a. Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. En substituant :

$$(1 + t) + 2(2 - t) - (3 + 2t) + 1 = 0 \iff 3 - 3t = 0 \iff t = 1.$$

L'équation a une unique solution : d et P sont **sécants** au point I de paramètre $t = 1$, c'est-à-dire $I(2; 1; 5)$. Vérification : $2 + 2 - 5 + 1 = 0$.

b. Soit d' la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. En substituant :

$t + 2(1 + t) - 3t + 1 = 3$. L'équation $3 = 0$ n'a aucune solution : d' est **strictement parallèle** à P . (On pouvait le prévoir : $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vérifie $\vec{u}' \cdot \vec{n} = 1 + 2 - 3 = 0$, et le point $(0; 1; 0)$ de d' ne vérifie pas l'équation de P .)

c. Soit d'' la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. En substituant :

$t + 2t - (1 + 3t) + 1 = 0$. L'équation $0 = 0$ est vraie pour tout t : la droite d'' est **incluse** dans P .

4.2 Intersection de deux plans**Propriété**

Positions relatives de deux plans. Soient P et P' deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont **colinéaires**, les plans sont parallèles : **confondus** si leurs équations sont proportionnelles (ou si un point de l'un appartient à l'autre), **strictement parallèles** sinon.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont **pas colinéaires**, les plans sont **sécants selon une droite**. Cette droite se décrit paramétriquement en résolvant le système formé par les deux équations : on exprime deux des variables en fonction de la troisième, qui joue le rôle de paramètre.

Exemple

Soient $P : x + 2y - z - 1 = 0$ et $P' : 2x - y + z - 3 = 0$. Les vecteurs normaux $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (les coordonnées ne sont pas proportionnelles) : les plans sont sécants selon une droite Δ . Déterminons-la. Un point $M(x; y; z)$ appartient à Δ si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations. En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient $3x + y - 4 = 0$, soit $y = 4 - 3x$. En reportant dans la première : $x + 2(4 - 3x) - z - 1 = 0$, soit $z = 7 - 5x$. En posant $x = t$, on obtient une représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 7 - 5t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$. Contrôle : le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ est bien orthogonal aux deux vecteurs normaux ($1 - 6 + 5 = 0$ et $2 + 3 - 5 = 0$), comme il se doit pour une droite contenue dans les deux plans.

4.3 Intersection de deux droites paramétrées

Dernier cas, avec le piège classique du chapitre : quand on cherche un point commun à deux droites paramétrées, rien n'oblige ce point à correspondre à la **même valeur du paramètre** sur les deux droites. Il faut donc impérativement renommer le paramètre de la seconde droite (t' par exemple) avant d'égaliser les coordonnées.

Méthode

Position relative de deux droites paramétrées d (paramètre t , vecteur directeur $\vec{u}$) et d' (paramètre t' , vecteur directeur $\vec{v}$).

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : les droites sont **parallèles**. Elles sont confondues si un point de l'une appartient à l'autre, strictement parallèles sinon.
2. Sinon, égaliser les coordonnées : on obtient un système de **trois équations à deux inconnues** t et t' . Résoudre le sous-système formé de deux équations, puis reporter dans la troisième :
 - si elle est vérifiée : les droites sont **sécantes**, au point donné par les valeurs trouvées ;
 - si elle ne l'est pas : les droites sont **non coplanaires** (ni sécantes, ni parallèles).

Exemple

Soient $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $d' : \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 3 + t' \\ z = t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$. Les vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Cherchons un point commun en résolvant :

$$\begin{cases} 1 + t = 2 + t' \\ 2t = 3 + t' \\ 3 - t = t' \end{cases}$$

La troisième équation donne $t' = 3 - t$. En reportant dans la première : $1 + t = 2 + 3 - t$, soit $2t = 4$, donc $t = 2$ et $t' = 1$. Vérifions la deuxième équation : $2 \times 2 = 4$ et $3 + 1 = 4$. Elle est satisfaite : les droites sont **sécantes** au point $I(3; 4; 1)$ (obtenu pour $t = 2$ sur d , ou pour $t' = 1$ sur d').

Si en revanche la droite d' avait pour troisième équation $z = 1 + t'$, le même calcul donnerait $t = \frac{3}{2}$ et $t' = \frac{1}{2}$ dans les première et troisième équations, mais la deuxième donnerait $3 = 3,5$: aucune solution, et comme les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les droites seraient **non coplanaires**.

5 Traduire un problème par un système

Prenons un peu de hauteur. Dans tout ce chapitre, la démarche a été la même : une question géométrique (appartenance, intersection, orthogonalité) a été traduite en une équation ou un système d'équations **linéaires**, dont la résolution et le nombre de solutions ont livré la réponse géométrique. Cette démarche de traduction est une capacité du programme à part entière, et elle s'applique bien au-delà des intersections : décider si trois vecteurs forment une base, décomposer un vecteur dans une base, prouver un alignement ou une coplanarité. Le tableau de correspondance est toujours le même.

Méthode**Traduire un problème géométrique par un système linéaire.**

- **Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment-ils une base ?** Ils forment une base si et seulement s'ils ne sont pas coplanaires. Après avoir vérifié que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, chercher des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$: cela donne trois équations à deux inconnues. **Aucune solution** : les vecteurs ne sont pas coplanaires, c'est une base. **Une solution** : ils sont coplanaires, ce n'est pas une base.
- **Coordonnées d'un vecteur $\vec{s}$ dans une base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$** : chercher les réels a, b, c tels que $\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$: c'est un système de trois équations à trois inconnues, que l'on résout par substitution ou combinaison.
- **Alignement de A, B, C** : tester la colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (proportionnalité des coordonnées).
- **Coplanarité de A, B, C, D** : chercher a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ (trois équations, deux inconnues : résoudre deux équations, vérifier la troisième).

Dans tous les cas, **interpréter géométriquement** le résultat du calcul : c'est le nombre de solutions du système qui porte le sens.

Exemple

Trois vecteurs forment-ils une base ? Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles). Cherchons a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Les deux premières équations imposent $a = 1$ et $b = -1$, mais la troisième exige $b = 1$: le système n'a **aucune solution**. Le vecteur $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires : $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une **base** de l'espace.

Exemple

Coordonnées dans une base : un système 3×3 résolu par substitution. Dans la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ de l'exemple précédent, déterminons les coordonnées du vecteur $\vec{s} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche a, b, c tels que $\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, ce qui donne, coordonnée par coordonnée :

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ a + b = 3 \\ b + c = 1 \end{cases}$$

Procédons par substitution : la première équation donne $c = 2 - a$ et la deuxième $b = 3 - a$. En reportant dans la troisième : $(3 - a) + (2 - a) = 1$, soit $5 - 2a = 1$, d'où $a = 2$, puis $b = 1$ et $c = 0$. Le système a une unique solution : $\vec{s} = 2\vec{u} + \vec{v}$, donc $\vec{s}$ a pour coordonnées $(2; 1; 0)$ dans la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$.

Interprétation géométrique : l'unicité de la solution illustre le théorème de décomposition dans une base. Et comme $c = 0$, le vecteur $\vec{s}$ est en réalité combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seuls : $\vec{s}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **coplanaires**, autrement dit $\vec{s}$ appartient à la direction du plan dirigé par $(\vec{u}; \vec{v})$.

Exemple

Alignement et coplanarité. On donne $A(1; 2; 3)$, $B(3; 3; 5)$, $C(7; 5; 9)$ et $D(0; 4; 3)$.

— **Alignement de A, B, C** : on calcule $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. On constate que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$:

les vecteurs sont colinéaires, donc les points A, B, C sont **alignés**.

— **Le point D est-il dans le plan passant par A et dirigé par $(\overrightarrow{AB}; \vec{v})$** , avec $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(On vérifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.) On cherche a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\vec{v}$,

avec $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 2a + b = -1 \\ a - 2b = 2 \\ 2a = 0 \end{cases}$$

La troisième équation donne $a = 0$, la première donne alors $b = -1$, et la deuxième est vérifiée : $0 - 2 \times (-1) = 2$. Ainsi $\overrightarrow{AD} = -\vec{v}$ est bien combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$: le point D **appartient** à ce plan.

Le bilan de ce chapitre tient en une phrase : grâce au repère orthonormé, chaque objet de l'espace possède désormais une carte d'identité algébrique, représentation paramétrique pour les droites, équation cartésienne pour les plans, et chaque question de géométrie se résout en étudiant les solutions d'un système linéaire. Cette double lecture, géométrique et algébrique, est exactement ce que les sujets de baccalauréat évaluent dans les exercices d'espace : entraînez-vous à passer d'un langage à l'autre sans effort, c'est là que tout se joue.