

Dérivation, accroissements finis et développements limités

Fiche d'exercices — L1 maths

Difficulté : ★ application directe · ★★ standard · ★★★ approfondissement · ★★★★★ défi.

Un conseil : cherchez d'abord, le corrigé ensuite — c'est là que ça progresse.

Exercice 1 ★ Six taux d'accroissement à identifier

Notions : Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité

Les exercices habituels donnent une fonction et demandent sa dérivée. Ici c'est l'inverse : chacune des six limites ci-dessous **est** un taux d'accroissement, mais l'énoncé ne dit ni de quelle fonction, ni en quel point. C'est cela qu'il faut trouver.

1. Pour chacune des six limites suivantes : identifier une fonction f et un point a tels que l'expression soit le taux d'accroissement de f en a , justifier que f est dérivable en a , puis calculer la limite.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}$

b. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^{1/3} - 2}{x - 8}$

e. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$

c. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

Dans l'item **b**, $x^{1/3}$ désigne la racine cubique, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier comme la réciproque de $x \mapsto x^3$.

2. Deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = x|x| \quad \text{et} \quad v(x) = (\sqrt[3]{x})^4,$$

la seconde étant celle qu'on note aussi $x^{4/3}$.

a. Sont-elles dérivables en 0 ? Si oui, donner le nombre dérivé et l'équation de la tangente.

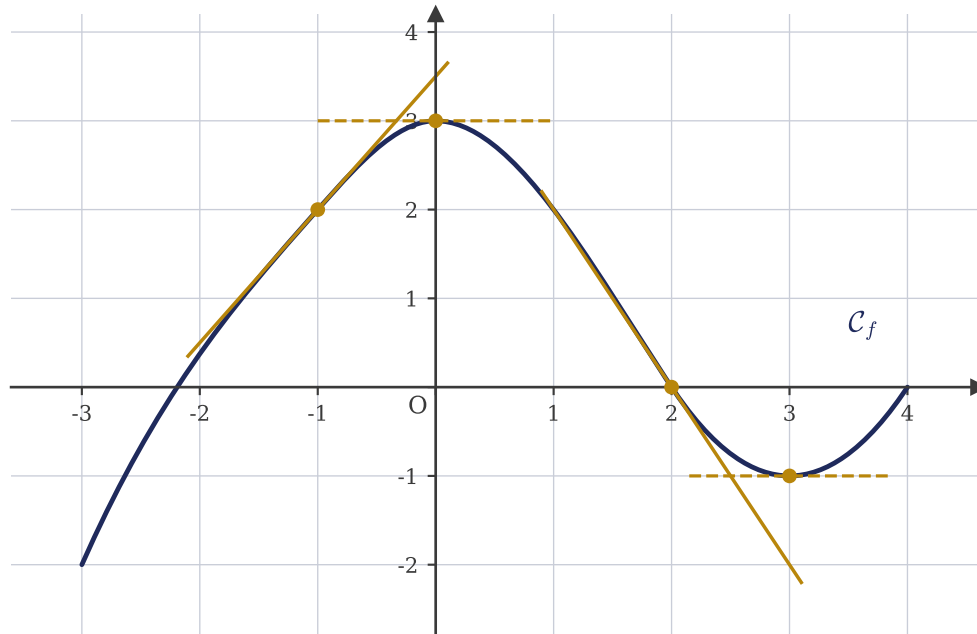
b. Deux réflexes courants conduisent ici à deux réponses fausses : « il y a une valeur absolue, donc ce n'est pas dérivable » et « il y a un exposant fractionnaire, donc la tangente est verticale ». Dire, pour chacun, sur quel exemple connu il est justifié, et pourquoi il ne l'est pas ici.

Exercice 2 ★ Lire une courbe et ses tangentes, puis reconnaître la dérivée et la dérivée seconde

Notions : Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

Partie A. Lire des nombres dérivés sur une figure

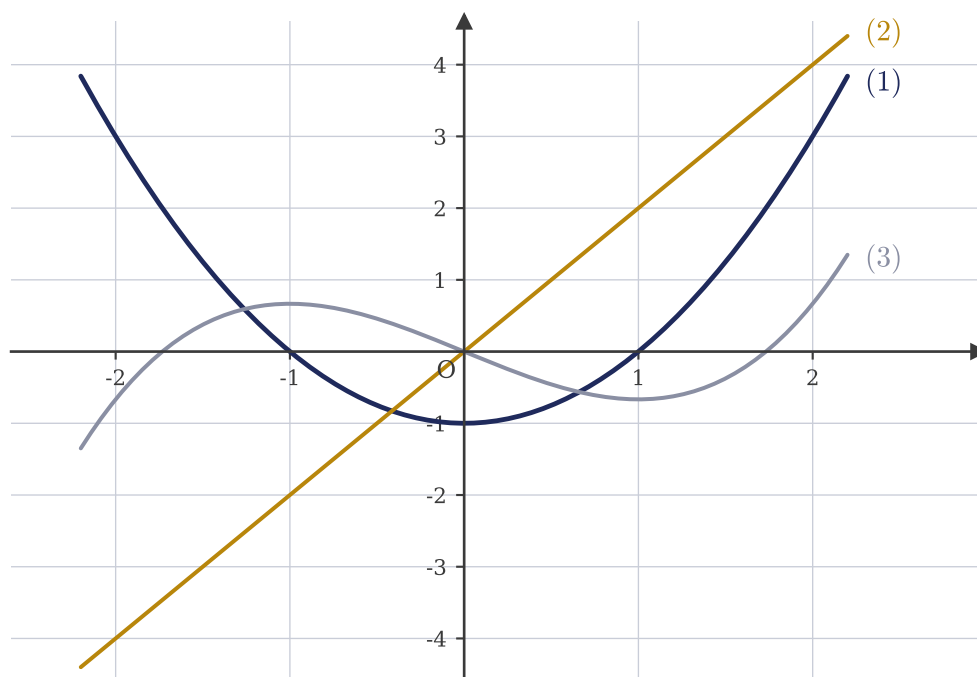
La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est celle d'une fonction f dérivable sur $[-3, 4]$. Elle passe par les points de coordonnées $(-3, -2)$, $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$, $(3, -1)$ et $(4, 0)$. Quatre tangentes ont été tracées : deux tangentes obliques, aux points d'abscisses -1 et 2 , et deux tangentes **horizontales**, aux points d'abscisses 0 et 3 .



1. Lire sur la figure les quatre nombres $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.
2. Donner les deux réels de $] -3, 4[$ en lesquels f' s'annule. Pour chacun, dire si f y admet un maximum local ou un minimum local, et justifier par la lecture de la courbe.
3. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
4. En déduire une valeur approchée de $f(2,1)$. En regardant la courbe au voisinage du point d'abscisse 2, dire si cette approximation est **par excès** ou **par défaut**.

Partie B. Trois courbes, aucune étiquette

On a tracé sur un même repère une fonction g , sa dérivée g' et sa dérivée seconde g'' . Les trois courbes sont numérotées (1), (2) et (3), dans un ordre quelconque : rien ne dit que (1) soit g .



5. Dire laquelle des trois courbes représente g , laquelle g' et laquelle g'' .

La justification attendue ne passe **par aucun calcul** : elle s'appuie uniquement sur les **zéros** des courbes et sur leurs **changements de signe**, confrontés aux tangentes horizontales et aux variations des deux autres. On énoncera d'abord, en une phrase, la propriété de lecture utilisée.

6. Une fois l'identification faite, proposer une expression possible pour g , et vérifier par le calcul que les trois courbes s'accordent avec ce choix.

Exercice 3 ★★ Recoller trois morceaux, avec deux jonctions

Notions : Dérivées à gauche et à droite, point anguleux, tangente verticale, fonctions définies par morceaux, Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité

Soient a, b, c, d quatre réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0, \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1, \\ c \ln x + d & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Justifier que, quels que soient les quatre paramètres, f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. En déduire que toute l'étude se concentre sur deux points, et lesquels.
2. Déterminer à quelle condition sur (a, b, c, d) la fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$. Combien de paramètres restent-ils libres ?
3. Déterminer à quelle condition sur (a, b, c, d) la fonction f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$.
On demande, **avant** de résoudre quoi que ce soit, de compter d'un côté le nombre de paramètres disponibles, de l'autre le nombre de conditions imposées, et de dire ce que ce comptage laisse espérer. On dira aussi ce qu'il ne prouve pas.
4. Pour les valeurs trouvées à la question 3, expliciter f et f' , et vérifier que f' est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Peut-on, en plus, imposer que f soit **deux fois dérivable** sur $\mathbb{R}$? Répondre en reprenant le comptage de la question 3, puis en examinant séparément chacune des deux jonctions.

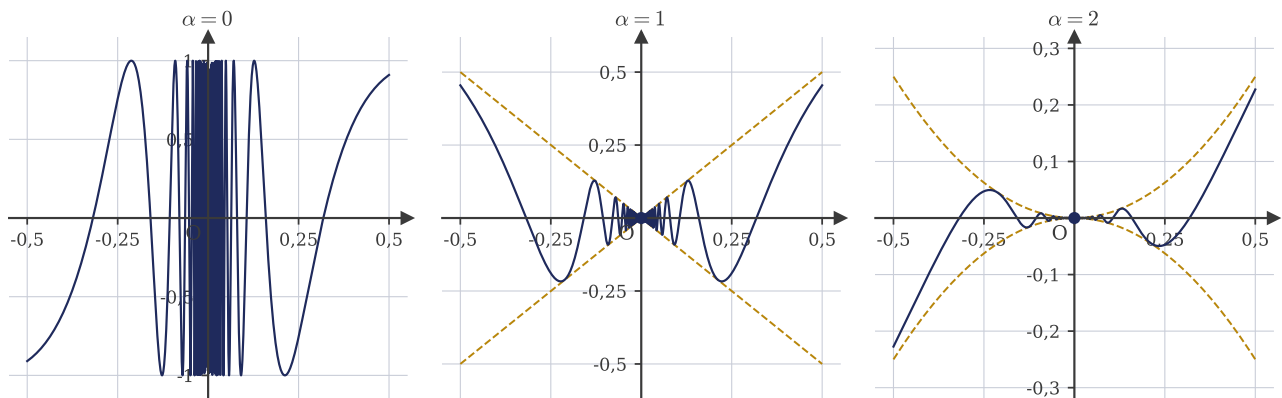
Exercice 4 ★★★ La famille x puissance alpha sinus de un sur x

Notions : Dérivées à gauche et à droite, point anguleux, tangente verticale, fonctions définies par morceaux, Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité, Théorème de la limite de la dérivée et théorème de Darboux

Pour un entier naturel α , on note f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x},$$

prolongée en 0 par $f_\alpha(0) = 0$. On étudie ce qui se passe **quand α augmente** : chaque question a pour réponse un seuil sur α , et les trois seuils sont différents.



1. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle **continue en 0** ? Dans le cas où elle ne l'est pas, on exhibera deux suites de réels non nuls tendant vers 0 le long desquelles f_α prend des valeurs de limites différentes.
2. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle **dérivable en 0** ? Donner alors $f'_\alpha(0)$.
3. Calculer $f'_2(x)$ pour $x \neq 0$, puis démontrer que f'_2 **n'a pas de limite en 0**. On donnera explicitement deux suites (x_n) et (y_n) de réels non nuls tendant vers 0 telles que $f'_2(x_n)$ et $f'_2(y_n)$ tendent vers deux valeurs différentes.
4. Conclure : que peut-on dire de f_2 sur $\mathbb{R}$, et que ne peut-on pas en dire ? Préciser quel énoncé du cours cet exemple met en défaut, et dans quel sens exactement.
5. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle de **classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$** ?

Exercice 5 ★ Dix dérivées, et les domaines qui vont avec

Notions : Opérations sur les dérivées : somme, produit, quotient, composée

Pour chacune des dix fonctions ci-dessous, on demande **le couple** formé par son ensemble de définition D_f et son ensemble de dérivabilité $D_{f'}$, puis l'expression de la dérivée sur $D_{f'}$.

La dérivée n'est donc pas le but : elle est le moyen. Ce qui est évalué, c'est le couple $(D_f, D_{f'})$, et **chaque inclusion stricte** $D_{f'} \subsetneq D_f$ **doit être justifiée**, c'est-à-dire qu'il faut dire ce qui se passe aux points de D_f qui ne sont pas dans $D_{f'}$.

Conventions de notation, à lire avant de commencer, car deux items en dépendent :

- pour un exposant réel β quelconque, x^β désigne $e^{\beta \ln x}$, qui n'a de sens que pour $x > 0$;
- en revanche $x^{1/3}$ désigne la **racine cubique**, réciproque de $x \mapsto x^3$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $x^{2/3}$ désigne $(x^{1/3})^2$, également définie sur $\mathbb{R}$;
- $\log_3$ est le logarithme de base 3, c'est-à-dire $\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$.

a. $x \mapsto x^{\sqrt{2}}$

f. $x \mapsto x^{2/3}$

b. $x \mapsto 2^x$

g. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

c. $x \mapsto \log_3 x$

h. $x \mapsto x^{1/x}$

d. $x \mapsto x^{1/3}$

i. $x \mapsto \frac{\ln x}{1 + \ln x}$

e. $x \mapsto |x|^3$

j. $x \mapsto (1 + x^2)^{\sin x}$

Exercice 6 ★★ Dériver une réciproque, de l'arccosinus à la racine n-ième

Notions : Dérivée d'une fonction réciproque, Opérations sur les dérivées : somme, produit, quotient, composée

Toutes les fonctions réciproques de cet exercice ont été **construites au chapitre précédent** par le théorème de la bijection : leur existence et leur continuité sont acquises, et on ne les redémontre pas. Ce qui reste à faire, et qui est l'objet du chapitre, c'est de les **dériver**, au moyen du théorème de la section 8.

1. Arccosinus.

a. Rappeler la restriction du cosinus dont Arccos est la réciproque, et déterminer les points où la dérivée de cette restriction s'annule. En déduire l'ensemble des réels en lesquels le théorème de dérivation d'une réciproque s'applique.

b. Établir que $\text{Arccos}'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ pour tout $y \in]-1, 1[$. On détaillera la levée de la valeur absolue, qui est le seul point délicat.

c. Que peut-on dire de la courbe de Arccos aux deux points d'abscisses -1 et 1 ?

2. Le chapitre précédent a établi l'identité $\text{Arcsin } y + \text{Arccos } y = \frac{\pi}{2}$ pour tout $y \in [-1, 1]$. En déduire Arcsin' sur $] -1, 1[$, et dire ce que cette déduction suppose acquis.

3. **Racine n-ième.** Soit n un entier, $n \geq 2$, et $\varphi_n : x \mapsto x^n$ définie sur $[0, +\infty[$.

a. Justifier que φ_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, et nommer le théorème employé.

b. Démontrer, **par le théorème de dérivation d'une réciproque**, que la fonction $y \mapsto y^{1/n}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$(y^{1/n})' = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

On n'utilisera à aucun moment la formule des puissances réelles : c'est elle qu'on démontre, sur ces exposants.

c. En déduire, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, la dérivée de $x \mapsto x^{p/q}$ sur $]0, +\infty[$.

4. **Argument sinus hyperbolique.** La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque notée argsh. Établir que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\text{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Dire pourquoi, cette fois, aucune discussion de signe n'est nécessaire.

5. **Le point où la dérivée s'annule.** Le théorème exige $f'(a) \neq 0$.

a. Que dit-il, exactement, lorsque $f'(a) = 0$?

b. Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I , dérivable en un point a de I avec $f'(a) = 0$, et soit $b = f(a)$. Démontrer que f^{-1} n'est **pas** dérivable en b . On raisonnera par l'absurde, en dérivant l'identité $f^{-1} \circ f = \text{id}$.

c. Illustrer sur $f : x \mapsto x^5$, définie sur $\mathbb{R}$, et sur le point $a = 0$: retrouver le résultat par le calcul direct du taux d'accroissement de f^{-1} en 0, et décrire la courbe de f^{-1} en ce point.

Exercice 7 ★★ ★ Une réciproque qu'on ne sait pas expliciter

Notions : Dérivée d'une fonction réciproque, Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x + \sin x.$$

Aucune des questions ci-dessous ne demande d'expression explicite de la réciproque de f : il n'en existe pas au moyen des fonctions usuelles, et c'est précisément ce qui rend l'exercice intéressant. Tout s'obtient à partir de f elle-même.

1. Démontrer que $f'(x) \geq 1$ pour tout réel x . En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, en citant le théorème employé et en vérifiant ses hypothèses.

On note désormais g la bijection réciproque de f .

2. Calculer $f(0)$ et $f(\pi)$. En déduire $g(0)$, $g(2\pi)$, puis $g'(0)$ et $g'(2\pi)$.

3. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{3} \leq g'(y) \leq 1.$$

4. En déduire, par l'**inégalité des accroissements finis appliquée à g** , que g est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Sachant que $g(0) = 0$, quel encadrement de $g(1)$ obtient-on ? On donnera d'abord celui que fournit le caractère lipschitzien, puis le meilleur encadrement que permet la question 3.

5. L'équation $2x + \sin x = 1$ admet-elle des solutions réelles ? Si oui, combien ? Encadrer chacune d'elles entre deux rationnels.

Exercice 8 ★★ Le lemme de Fermat, et l'hypothèse point intérieur

Notions : Extremum local intérieur et théorème de Rolle

On rappelle deux définitions de la section 10 du cours. La fonction f , définie sur un intervalle I , admet un **maximum local** en $c \in I$ lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout x de $I \cap]c - r, c + r[$; et le point c est **intérieur** à I lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $]c - r, c + r[\subset I$.

1. Démontrer le **lemme de Fermat** : si f est définie sur un intervalle I , si c est un point **intérieur** à I , si f admet un extremum local en c et si f est **dérivable** en c , alors $f'(c) = 0$.

On traitera le cas d'un maximum local, en écrivant séparément le taux d'accroissement **à droite** et le taux d'accroissement **à gauche**, et en passant à la limite dans chacun des deux. On indiquera comment le cas d'un minimum s'en déduit.

2. Relire sa propre démonstration et répondre précisément : **où l'hypothèse « c est intérieur à I » a-t-elle servi, exactement ?** Une seule ligne de la preuve doit être citée.

3. Que devient l'énoncé si l'on suppose seulement que f est **dérivable à droite** en c ? Énoncer ce qui subsiste, pour un maximum puis pour un minimum, et montrer sur un exemple que l'égalité, elle, est perdue.

4. Deux contre-exemples à construire.

a. Exhiber une fonction **monotone** sur $[0, 1]$, dérivable sur $[0, 1]$, dont le maximum et le minimum sont atteints et dont la dérivée ne s'annule **nulle part**. Dire pourquoi il n'y a aucune contradiction avec le lemme, et ce que le lemme dit encore en 0 et en 1.

b. Montrer que la réciproque du lemme est fausse, sur la fonction $x \mapsto x^5$.

5. Une question de vocabulaire. Donner une fonction **majorée** qui n'atteint **pas** sa borne supérieure, et dire ce que le lemme de Fermat a, ou n'a pas, à en dire.

Exercice 9 ★ Rolle, trois hypothèses et trois contre-exemples

Notions : Extremum local intérieur et théorème de Rolle

Le théorème de Rolle s'énonce ainsi. Soient $a < b$ deux réels et f définie sur $[a, b]$ telle que

1. f est **continue sur le segment** $[a, b]$;
2. f est **dérivable sur l'intervalle ouvert** $]a, b[$;
3. $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Construire **trois** contre-exemples, un par hypothèse mise en défaut. Pour chacun, on demande :

- la fonction et l'intervalle ;
- la vérification que les **deux autres** hypothèses sont bien satisfaites ;
- la vérification que la conclusion est fausse, c'est-à-dire qu'aucun point c de $]a, b[$ ne vérifie $f'(c) = 0$.

Le deuxième point est le cœur de l'exercice : un exemple qui viole deux hypothèses à la fois ne démontre rien du tout, et on dira pourquoi.

2. Pour chacun des trois, indiquer **à quel endroit précis** la démonstration du cours se casse. On rappelle qu'elle se déroule en trois temps : le théorème des bornes atteintes fournit deux points x_m et x_M où le minimum m et le maximum M sont atteints ; on traite à part le cas $m = M$; sinon on montre que l'un des deux points est intérieur, et l'on y applique le lemme de Fermat.

3. Le théorème de Rolle donne-t-il l'**unicité** du point c ? Exhiber une fonction vérifiant les trois hypothèses sur un segment et pour laquelle il existe au moins **trois** points c convenables. Que faut-il en conclure sur la façon de rédiger l'emploi du théorème ?

Exercice 10 ★★★ Compter les racines, par Rolle ou par les variations

Notions : Extremum local intérieur et théorème de Rolle, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

Partie A. Par le théorème de Rolle

1. Soit f continue sur un intervalle I et dérivable sur son intérieur.
 - a. Démontrer que **entre deux racines de f , il y a au moins une racine de f' .**
 - b. En déduire que si f' admet **au plus** n racines sur I , alors f en admet **au plus** $n + 1$. On soignera l'argument qui garantit que les racines de f' obtenues sont deux à deux distinctes.
2. Soit m un réel et P_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_m(x) = x^4 - 4x + m.$$

- a. Majorer, par la question 1, le nombre de solutions réelles de l'équation $P_m(x) = 0$.
- b. Déterminer ensuite le nombre **exact** de solutions, en discutant selon la valeur de m .

Partie B. Par les variations

3. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.
 - a. Démontrer que l'équation $\tan x = x$ admet **exactement une** solution dans chaque I_k .
 - b. Encadrer celle qui appartient à $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, d'abord entre deux multiples de π , puis entre deux décimaux à un chiffre.

Partie C. Comparer les deux approches

4. Répondre aux trois questions suivantes, en s'appuyant sur les parties A et B.
 - a. Laquelle des deux méthodes fournit une **majoration**, laquelle fournit le **compte exact** ?
 - b. Que coûte chacune, c'est-à-dire de quelles informations sur la fonction a-t-elle besoin ?
 - c. Sur la partie B, que donnerait la méthode de la partie A ? Le résultat serait-il optimal ?

Exercice 11 ★★★★★ Accroissements finis généralisés et règle de L'Hôpital

Notions : Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes, Extremum local intérieur et théorème de Rolle

Partie A. Le théorème des accroissements finis généralisés

Soient $a < b$ deux réels, et f et g deux fonctions **continues** sur $[a, b]$ et **dérivables** sur $]a, b[$. On suppose de plus que g' **ne s'annule en aucun point** de $]a, b[$.

1. Démontrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. On pose, pour $x \in [a, b]$,

$$h(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x).$$

Vérifier **une par une** les trois hypothèses du théorème de Rolle pour h , puis en déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. Que devient cet énoncé lorsque g est la fonction $x \mapsto x$?

Partie B. La règle de L'Hôpital

4. Soient I un intervalle, a un point de I , et u, v deux fonctions continues sur I , dérivables sur $I \setminus \{a\}$, telles que

$$u(a) = v(a) = 0,$$

et telles que v' ne s'annule en aucun point de $I \setminus \{a\}$. On suppose enfin que $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ tend vers un réel ℓ quand x tend vers a .

- a. Démontrer que $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, de sorte que le quotient $\frac{u(x)}{v(x)}$ a un sens.

- b. Démontrer que $\frac{u(x)}{v(x)}$ tend vers ℓ quand x tend vers a .

5. Calculer les trois limites suivantes en appliquant la règle, et en vérifiant à chaque étape que la forme est bien indéterminée :

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3};$

- b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^2 x}{x^2};$

- c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2}.$

Partie C. Deux façons d'échouer, et deux fautes de copie

6. La réciproque est fausse. On pose, sur $\mathbb{R}$,

$$u(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, \quad u(0) = 0, \quad \text{et} \quad v(x) = \sin x.$$

Démontrer que $\frac{u(x)}{v(x)}$ admet une limite en 0, alors que $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ n'en admet aucune. Que faut-il en conclure sur le sens de lecture de la règle ?

7. Un calcul qui tourne en rond. On considère $q(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a. Étudier la limite de q en 0. La règle de L'Hôpital s'applique-t-elle ? Que donnerait son application aveugle ?

b. Étudier la limite de q en $+\infty$. Que produit l'application répétée de la règle ? Conclure par une autre méthode.

8. Citer deux erreurs fréquentes dans l'emploi de cette règle, et les illustrer sur les exemples de l'exercice.

Exercice 12 ★ Chercher le point c de l'égalité des accroissements finis

Notions : Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

L'égalité des accroissements finis affirme, pour f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, qu'il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Tout l'exercice consiste à regarder ce que ce réel c est, et surtout ce qu'il n'est pas.

1. Pour chacune des trois situations suivantes, vérifier les hypothèses du théorème, puis déterminer **tous** les réels c qu'il fournit.
 - a. $f(x) = x^2$ sur $[1, 4]$. Où se situe le point obtenu par rapport aux deux extrémités ? Refaire le calcul sur un segment $[a, b]$ quelconque.
 - b. $g(x) = \ln x$ sur $[1, e]$. Comparer le point obtenu à la moyenne arithmétique et à la moyenne géométrique des deux extrémités, c'est-à-dire à $\frac{1+e}{2}$ et à $\sqrt{e}$.
 - c. $h(x) = x^3$ sur $[-1, 2]$. L'équation obtenue a deux solutions réelles : combien en retient-on, et pourquoi ?
2. Exhiber une fonction et un segment pour lesquels le théorème fournit **au moins deux** valeurs de c , puis une situation où il en fournit une infinité. Qu'en conclure sur l'expression « le point c donné par le théorème » ?
3. Un radar tronçon mesure le temps mis par un véhicule pour parcourir une portion d'autoroute de 40 kilomètres, limitée à 110 km/h. Un véhicule met 20 minutes.
 - a. Modéliser la situation par une fonction, et énoncer les hypothèses que l'on suppose vérifiées.
 - b. Qu'affirme exactement l'égalité des accroissements finis ici ? Rédiger la conclusion en une phrase, sans rien affirmer de plus que le théorème.
 - c. L'automobiliste plaide qu'il n'a « pas forcément » dépassé la limite, le radar ne mesurant qu'une moyenne. Que lui répondre ?
4. Voici une rédaction telle qu'on la lit sur une copie.
 1. Soit f dérivable sur $[a, b]$.
 2. D'après l'égalité des accroissements finis, $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
 3. Le point c est le milieu de $[a, b]$, donc $f(b) - f(a) = (b - a)f'(m)$ avec $m = \frac{a+b}{2}$.
 4. On en déduit $f(b)$ dès que l'on connaît $f(a)$ et l'expression de f' .

Relever toutes les fautes, ligne par ligne, et dire ce que le théorème autorise réellement à faire du réel c .

Exercice 13 ★★ Linéariser, et contrôler une erreur

Notions : Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes, Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité

L'inégalité des accroissements finis dit que si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

C'est l'outil qui transforme une information sur la dérivée en une majoration d'écart. Cet exercice l'emploie là où il sert vraiment : contrôler l'erreur d'une approximation.

1. **Propagation d'une incertitude de mesure.** Dans les deux situations suivantes, une grandeur est mesurée avec une incertitude de 10^{-3} , puis on lui applique une fonction. Majorer l'incertitude sur le résultat, et comparer l'incertitude **relative** d'entrée à celle de sortie.
 - a. L'arête d'un cube est mesurée à 5,000 cm près à 10^{-3} cm. On en calcule le volume.
 - b. La durée d'une période est mesurée à 0,250 s près à 10^{-3} s. On en calcule la fréquence, c'est-à-dire l'inverse de cette durée.
2. Majorer $|\sin(1,01) - \sin(1)|$, puis comparer la majoration obtenue à l'écart exact donné par la calculatrice.
3. De combien la fonction Arctan varie-t-elle entre 1 et 1,1 ? En donner un encadrement sans calculatrice, puis le vérifier.
4. **La linéarisation du physicien.** Justifier proprement l'approximation $\sin \theta \approx \theta$ pour un petit angle θ exprimé en radians, puis **majorer l'erreur commise** pour $\theta = 0,1$ rad, puis pour $\theta = 0,3$ rad. Comparer aux erreurs réelles.
5. **Question de rigueur.** La majoration employée dans tout l'exercice exige-t-elle que f soit dérivable partout, ou seulement sur l'intervalle considéré ? Que se passe-t-il si l'intervalle contient un point où f n'est pas dérivable ? Et si f' existe sur l'intervalle ouvert mais n'y est pas bornée ?

Exercice 14 ★★★ Contracter vers un point fixe

Notions : Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x,$$

et soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f , et en déduire que la suite est bien définie et que $u_n \in [1, 2]$ pour tout n .
2. Montrer que l'équation $x = 1 + \frac{1}{2} \sin x$ admet une unique solution ℓ dans $[1, 2]$, et préciser un intervalle plus court la contenant.
3. Montrer que $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $[1, 2]$, puis, **en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre u_n et ℓ** , établir

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. En déduire que (u_n) converge, et préciser sa limite.
5. Déterminer, à partir de l'inégalité de la question 3, un rang à partir duquel les trois premières décimales de u_n sont celles de ℓ . Calculer ensuite u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 à 10^{-6} près et comparer.
6. **Question de méthode.** La monotonie aurait aussi permis de démontrer la convergence. Qu'apporte l'inégalité des accroissements finis de plus ?

Exercice 15 ★★ Quatre inégalités, et le choix de l'outil

Notions : Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction, Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités, Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Le chapitre fournit trois outils pour démontrer une inégalité entre deux expressions.

- **Outil A, l'étude de la différence.** On pose φ égale au membre de gauche moins celui de droite, on détermine le signe de φ' , et on conclut par les variations et une valeur.
- **Outil B, les accroissements finis.** Utilisable quand un membre est une variation $f(b) - f(a)$ et l'autre le produit de la longueur $b - a$ par une borne de f' .
- **Outil C, la convexité.** Utilisable quand un membre est une tangente ou une corde de la courbe de l'autre.

Pour chacune des quatre inégalités ci-dessous, la consigne est double : **dire d'abord lequel des trois outils est le plus court, en justifiant l'élimination des deux autres**, puis rédiger la démonstration complète avec l'outil retenu.

1. $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ pour tout $x \geq 0$.
2. $\tan x \geq x$ pour tout $x \in [0, \pi/2[$.
3. $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
4. $\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
5. Reprendre l'inégalité 2 par les **deux autres** outils, et comparer la longueur des trois démonstrations.
6. Dégager une règle de décision : à quoi reconnaît-on, **avant** de commencer, lequel des trois outils va marcher, et combien il va coûter ?

Exercice 16 ★★ Dérivée nulle : ce qu'il faut d'intervalle

Notions : Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction, Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Deux énoncés du cours sont employés si souvent qu'on finit par les croire évidents : « si $f' = 0$ sur un intervalle, alors f est constante » et « si $f' > 0$ sur un intervalle, alors f est strictement croissante ». Cet exercice les démontre, puis démonte le mot **intervalle**.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. **Démontrer** que f est constante sur I , en utilisant l'égalité des accroissements finis. Rédiger complètement, et signaler l'endroit exact où la nature d'intervalle de I intervient.
2. Reprendre la démonstration ligne à ligne et dire **précisément où elle casse** si I n'est pas un intervalle. Quelle propriété caractéristique des intervalles a-t-on utilisée ?
3. Construire un contre-exemple : une partie D de $\mathbb{R}$ réunion de deux intervalles disjoints, et une fonction dérivable sur D , de dérivée nulle sur D , qui n'est pas constante.
4. Faire le même travail, démonstration puis contre-exemple sur une réunion, pour l'énoncé « si $f' > 0$ sur un intervalle I , alors f est strictement croissante sur I ».
5. **Application.** Établir que

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

Sur quel ensemble exactement l'argument de la question 1 s'applique-t-il ? Comment traite-t-on alors les deux extrémités, et comment détermine-t-on la constante ?

6. **La version fine.** Soit f dérivable sur un intervalle I , telle que $f' \geq 0$ sur I et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I . La fonction f est-elle strictement croissante sur I ? Démontrer la réponse.

Exercice 17 ★★★ Le théorème de la limite de la dérivée

Notions : Théorème de la limite de la dérivée et théorème de Darboux, Dérivées à gauche et à droite, point anguleux, tangente verticale, fonctions définies par morceaux

1. Énoncer le théorème de la limite de la dérivée avec ses hypothèses exactes, puis le **démontrer** à l'aide de l'égalité des accroissements finis. Dire en particulier à quoi sert l'hypothèse de continuité au point étudié.
2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \quad \varphi(0) = 0.$$

Ce prolongement est-il dérivable en 0 ? La fonction φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

3. Soit $\lambda > 0$ et h_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_\lambda(x) = \sin x \quad \text{si } x \leq 0, \quad h_\lambda(x) = \ln(1 + \lambda x) \quad \text{si } x > 0.$$

Étudier selon λ la dérivabilité de h_λ en 0, en déterminant ses dérivées latérales. Pour la valeur de λ qui rend h_λ dérivable en 0, la fonction obtenue est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

4. Soit g la fonction racine cubique, réciproque de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la limite de g' en 0. Le théorème s'applique-t-il ? Que peut-on affirmer malgré tout sur la courbe de g au point d'abscisse 0 ?
5. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(x) = x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \quad \psi(0) = 0.$$

Montrer que ψ est continue en 0, calculer ψ' sur $\mathbb{R}^*$, et montrer que ψ' n'a pas de limite en 0. Que peut-on néanmoins conclure ?

6. **La question de rigueur.** Le théorème est une condition **suffisante** de dérivabilité. Peut-on en déduire l'énoncé « si f' n'a pas de limite en a , alors f n'est pas dérivable en a » ? Justifier.

Exercice 18 ★★ ★ Étude complète : chaque étape nomme son outil

Notions : Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction, Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités, Applications des développements limités : limites, équivalents, tangente et position, asymptotes, Théorème de la limite de la dérivée et théorème de Darboux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 \operatorname{Arctan} x.$$

C'est une étude complète, avec une consigne supplémentaire qui en est le véritable objet : **chaque réponse doit commencer par nommer l'outil qu'elle emploie et vérifier ses hypothèses**. Une réponse juste dont l'outil n'est pas nommé sera considérée comme incomplète.

1. Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de f . Étudier la parité, et dire ce qu'elle permet d'économiser.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, la mettre sous forme d'une fraction, et déterminer son signe.
4. Dresser le tableau de variations complet, avec les valeurs **exactes** des extremums locaux. Ces extremums sont-ils globaux ?
5. Montrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ réalise une bijection sur un intervalle à préciser. Que dire de la dérivabilité de la bijection réciproque à l'extrémité gauche de cet intervalle ?
6. Calculer $f''(x)$, en déduire les intervalles de convexité et de concavité, et le point d'inflexion.
7. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, et déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
8. Étudier le comportement de la courbe en $+\infty$ puis en $-\infty$: y a-t-il une asymptote ? Préciser la position de la courbe par rapport à elle. Quel outil suffit ici, et quel outil serait inutile ?
9. Décrire l'allure de la courbe en quelques phrases, en y plaçant tous les éléments obtenus. Déterminer au passage le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement de la plus grande.
10. Discuter, selon le réel λ , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$.

Exercice 19 ★★ Leibniz, et une relation de récurrence

Notions : Dérivées successives, classes de régularité, formule de Leibniz

1. Énoncer la formule de Leibniz, en précisant ses hypothèses.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x , l'expression de $f^{(n)}(x)$, où

$$f(x) = x^3 e^{-x}.$$

Vérifier le résultat aux rangs 1, 2 et 3 par un calcul direct.

3. Même travail pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 + 1) \sin x$.
4. On note y la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $y(x) = (\text{Arcsin } x)^2$.

- a. Montrer que y est deux fois dérivable sur $] -1, 1[$ et que

$$(1 - x^2) y''(x) - x y'(x) = 2 \quad \text{pour tout } x \in] -1, 1[.$$

- b. Dériver cette relation n fois par la formule de Leibniz, puis l'évaluer en 0 : en déduire, pour tout $n \geq 1$, une relation de récurrence entre $y^{(n+2)}(0)$ et $y^{(n)}(0)$.
 - c. Calculer $y(0)$, $y'(0)$ et $y''(0)$, puis déterminer $y^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. **Question de méthode.** Pourquoi obtenir les nombres $f^{(n)}(0)$ **sans calculer** la fonction $f^{(n)}$ est-il précieux ? Illustrer sur la fonction de la question 4.

Exercice 20 ★★★★★ De quelle classe est ce raccord ?

Notions : Dérivées successives, classes de régularité, formule de Leibniz, Dérivées à gauche et à droite, point anguleux, tangente verticale, fonctions définies par morceaux

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note f_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_p(x) = x^p \text{ si } x \geq 0, \quad f_p(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

1. Traiter à la main les cas $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$: dans chacun, déterminer la classe **exacte** de f_p sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que f_p soit de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Conjecturer le résultat général, puis **démontrer** que pour tout $p \geq 1$ la fonction f_p est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et n'est pas de classe $\mathcal{C}^p$. On calculera $f_p^{(k)}$ pour $k \leq p$ et on examinera le raccord en 0.
3. En déduire le résultat suivant : si P est un polynôme non nul et si g est définie par $g(x) = P(x)$ pour $x \geq 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$, alors g n'est **jamais** de classe $\mathcal{C}^\infty$. Préciser sa classe exacte.
4. **Une variante.** Soient a, b, c trois réels et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = e^{ax} \text{ si } x < 0, \quad h(x) = b + cx + x^2 \text{ si } x \geq 0.$$

À quelle condition sur a, b, c la fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$? Peut-elle être de classe $\mathcal{C}^3$?

Exercice 21 ★★ Ce que Taylor-Young garantit, et à quelle distance

Notions : Formule de Taylor-Young, Développement limité : définition, unicité, troncature, parité, Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange

1. Écrire la formule de Taylor-Young appliquée à la fonction $\exp$ en 0 à l'ordre 3, après avoir vérifié ses hypothèses. On note P_3 la partie régulière obtenue, et l'on rappellera ce que signifie exactement le symbole $o(x^3)$.
2. Calculer l'écart $e^x - P_3(x)$ pour $x = 1$, puis $x = 0,5$, puis $x = 0,1$, puis $x = 0,01$, et présenter les résultats dans un tableau de valeurs. Les valeurs de e^x sont prises à la calculatrice.
3. Observer : quand x est divisé par 10, par combien l'écart est-il divisé ? Relier cette observation au symbole $o(x^3)$.
4. La formule de Taylor-Young permet-elle de **majorer** l'écart pour $x = 1$? Répondre en revenant à la définition du symbole o , et dire précisément ce qui manque.
5. La question 4 affirme qu'aucune majoration ne se tire du symbole o . Voici de quoi le prouver, plutôt que de le croire. Construire explicitement deux fonctions g et h , définies sur $\mathbb{R}$, qui admettent en 0 le **même développement limité d'ordre 3** que $\exp$, et qui vérifient

$$g(1) - P_3(1) = 1 \quad \text{et} \quad h(1) - P_3(1) = -100.$$

Que confirme cette construction ? Aurait-on pu imposer n'importe quelles deux valeurs ?

6. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admet en 0 le développement limité

$$f(x) = 3 - 2x + 5x^2 + o(x^2).$$

Peut-on en déduire que $f''(0) = 10$? Justifier, puis exhiber une fonction qui admet un développement limité d'ordre 2 en 0 **sans** être deux fois dérivable en 0. Quelle hypothèse rendrait la lecture légitime ?

La lecture des deux premiers coefficients, elle, fait l'objet de l'exercice 25 : on ne la refait pas ici.

Exercice 22 ★★ Encadrer une valeur numérique par Taylor-Lagrange

Notions : Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange

Pour chacune des quatre valeurs numériques ci-dessous, le travail demandé est le même, et il comporte quatre étapes qu'il faut toutes rédiger :

- choisir une fonction, un point de départ et un ordre, puis écrire la formule de Taylor-Lagrange en vérifiant ses hypothèses ;
- **majorer honnêtement le reste**, en majorant $|f^{(n+1)}|$ sur le bon intervalle, et **en disant sur lequel** ;
- en déduire un encadrement de la valeur cherchée, et dire combien de décimales il garantit ;
- comparer à la valeur donnée par la calculatrice.

1. $e^{0,1}$, à l'ordre 3 en partant de 0.
2. $\sin(0,5)$, à l'ordre 4 en partant de 0.
3. $\sqrt[3]{28}$, à l'ordre 2 en partant de 27.
4. $\text{Arctan}(0,3)$, à l'ordre 3 en partant de 0.
5. Reprendre **le même nombre** qu'à la question 4 en utilisant cette fois le seul développement limité usuel de Arctan en 0. Que constate-t-on sur la valeur approchée obtenue, et sur l'erreur ? Énoncer en une phrase la différence de nature entre les deux formules de Taylor.

Exercice 23 ★★★ Combien de termes pour cette précision ?

Notions : Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange

Les formules de Taylor servent d'ordinaire à écrire un développement. On les emploie ici dans l'autre sens : la précision est fixée à l'avance, et c'est le **nombre de termes** qui devient l'inconnue. C'est la question que se pose n'importe quel logiciel de calcul avant d'évaluer une fonction, et elle se traite entièrement avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrée à la section 19 du cours.

Propriété

Inégalité de Taylor-Lagrange. Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I , soit $a \in I$, et soit M_{n+1} un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I . Alors, pour tout $x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On notera P_n le polynôme de Taylor d'ordre n en $a = 0$, et l'on appellera **termes** ses monômes de coefficient non nul : ce sont eux qu'une machine additionne réellement.

Partie A. Calculer e à 10^{-6} près

On travaille avec $f = \exp$ sur $[0, 1]$, et l'on utilise le seul encadrement numérique acquis du cours sur l'exponentielle : $2 < e < 3$.

1. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour $f = \exp$, en $a = 0$, à l'ordre n , sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire une majoration de

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right|$$

qui ne dépende que de n . On dira pourquoi on ne prend pas $M_{n+1} = e$.

2. Résoudre l'inéquation obtenue pour une précision de 10^{-6} , et conclure : combien de termes faut-il additionner ?

3. *Vérification numérique.* On donne

$$\sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!} = 2,718281525 \dots \quad \text{et} \quad e = 2,718281828 \dots$$

Calculer l'écart réel et le comparer à la majoration. Le rang trouvé à la question 2 était-il le plus petit possible ?

Partie B. Le sinus, et le prix de la largeur de l'intervalle

4. Majorer $\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right|$ pour $x \in [-1, 1]$. On prendra soin de choisir l'ordre le plus avantageux : le

polynôme $x - \frac{x^3}{6}$ est le polynôme de Taylor du sinus à **deux** ordres différents, et les deux majorations qui en découlent ne se valent pas.

5. Reprendre la même majoration sur $[-\pi, \pi]$. Que vaut-elle ? Est-elle utilisable ?

6. Combien de termes du développement du sinus en 0 faut-il pour obtenir $\sin x$ à 10^{-6} près, uniformément sur $[-1, 1]$? Puis uniformément sur $[-\pi, \pi]$? On donne les valeurs suivantes, à lire dans la table.

m	$\frac{1}{m!}$	$\frac{\pi^m}{m!}$
9	$2,76 \times 10^{-6}$	$8,21 \times 10^{-2}$
10	$2,76 \times 10^{-7}$	$2,58 \times 10^{-2}$
11	$2,51 \times 10^{-8}$	$7,37 \times 10^{-3}$
16	$4,78 \times 10^{-14}$	$4,30 \times 10^{-6}$
17	$2,81 \times 10^{-15}$	$7,95 \times 10^{-7}$

Conclure en une phrase sur ce dont dépend le coût du calcul.

Partie C. La majoration est-elle optimale ?

7. On reprend la question 4 au point $x = 1$. L'écart réel vaut

$$\left| \sin 1 - 1 + \frac{1}{6} \right| = 0,008137651 \dots$$

Le comparer à la majoration. Celle-ci est-elle **atteinte** ? Expliquer précisément à quel endroit du raisonnement on a perdu quelque chose, en écrivant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 en $x = 1$ et en déterminant le point c qu'elle fournit.

8. Exhiber une fonction, un ordre et un point pour lesquels l'inégalité de Taylor-Lagrange est une **égalité**. Quelle condition générale faut-il pour cela ? Que garantit alors l'inégalité, et que ne garantit-elle pas ?

Exercice 24 ★★★★★ Taylor-Lagrange démontré à partir de Rolle

Notions : Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange, Extremum local intérieur et théorème de Rolle

Le cours démontre la formule de Taylor-Lagrange à la section 19. On reprend ici cette démonstration pas à pas, parce qu'elle est le modèle d'une technique qu'on retrouvera partout : **fabriquer une fonction auxiliaire qui s'annule aux deux bouts, pour pouvoir lui appliquer le théorème de Rolle**. L'énoncé à établir est le suivant.

Théorème

Formule de Taylor-Lagrange. Soient $a < b$ deux réels et n un entier naturel. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Aucune intégrale n'apparaît dans cette démonstration : les primitives relèvent du chapitre « Calcul intégral élémentaire », et la formule de Taylor avec reste intégral y est traitée. Ici, tout vient de Rolle.

1. Installer l'idée sur le cas $n = 1$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$, et l'on veut produire $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

a. On pose, pour $t \in [a, b]$,

$$\varphi(t) = f(b) - f(t) - (b-t)f'(t) - K \frac{(b-t)^2}{2},$$

où K est un réel à choisir. Calculer $\varphi(b)$, puis déterminer l'unique valeur de K pour laquelle $\varphi(a) = 0$.

b. Vérifier les hypothèses du théorème de Rolle pour φ , calculer $\varphi'(t)$, et conclure.

c. Que devient cette construction si l'on refait le même travail avec $n = 0$, c'est-à-dire avec $\varphi(t) = f(b) - f(t) - K(b-t)$? Quel théorème du cours retrouve-t-on?

2. Le cas général. On garde b fixé et l'on pose, pour $t \in [a, b]$,

$$\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - K \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a. Calculer $\varphi(b)$. On précisera quels termes de la somme survivent en $t = b$.

b. Déterminer l'unique réel K tel que $\varphi(a) = 0$, et dire pourquoi il existe et est unique.

c. Vérifier **une par une** les trois hypothèses du théorème de Rolle pour φ sur $[a, b]$.

d. Calculer $\varphi'(t)$ pour $t \in]a, b[$. C'est l'étape décisive : la somme dérivée **se téléscopie**, et il faut le faire apparaître, pas l'affirmer.

e. Conclure.

3. Lecture des hypothèses. Où intervient exactement l'hypothèse « f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ », et où intervient exactement « f est $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ »? Pourquoi ces deux hypothèses ne portent-elles pas sur le même ensemble?

4. L'inégalité. En déduire en une ligne l'inégalité de Taylor-Lagrange : si de plus $|f^{(n+1)}| \leq M_{n+1}$ sur $]a, b[$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

5. Le point c n'est pas un objet fixe. Le théorème affirme l'existence de c , il n'en donne ni la valeur ni l'unicité, et ce c dépend de n **et** de b .

a. Sur l'exemple $f(x) = x^3$, $a = 0$, calculer explicitement le point c fourni par la formule pour $n = 0$, puis pour $n = 1$. Comparer.

b. Voici deux conclusions tirées par des copies. Dire pour chacune quelle propriété inexistante de c elle utilise, et la réfuter sur l'exemple de la question **5.a**.

(i) « Écrivons la formule à l'ordre 0 puis à l'ordre 1 et retranchons ces deux égalités membre à membre. »

(ii) « Pour tout $x > 0$, $f(x) = f(0) + \frac{x^2}{2} f''(c)$. Dérivons cette égalité par rapport à x . »

9. Une copie écrit : « g est paire, donc son développement limité d'ordre 4 s'écrit $g(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^4)$, ce qui **prouve** que $g'(0) = 0$. » Le résultat est-il correct ? Le raisonnement est-il complet ?

Exercice 26 ★★ Le tableau des usuels, et comment ne pas l'apprendre par cœur

Notions : Développements limités usuels en 0, Formule de Taylor-Young

Le tableau des développements limités usuels de la section 21 compte une dizaine de lignes, et l'on entend souvent qu'il faut l'apprendre par cœur. C'est à moitié vrai : deux lignes suffisent, et le reste se **reconstitue** en trois lignes de calcul. Cet exercice fait la part des deux, et se termine sur le seul théorème du chapitre qui permette de fabriquer un développement limité nouveau à partir d'un ancien.

Partie A. Ce qu'il faut savoir

1. Compléter le tableau ci-dessous, tous les développements étant pris **en** 0. Les quatre premières lignes sont données, les quatre dernières sont à écrire.

Fonction	Développement limité en 0
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
$\sin x$	à compléter
$\operatorname{sh} x$	à compléter
$\ln(1+x)$	à compléter
$(1+x)^\alpha$	à compléter

Partie B. Ce qu'il ne faut surtout pas apprendre

On ne dispose plus que de **deux** développements, celui de e^x et celui de $\frac{1}{1-x}$. Tout le reste est oublié.

2. Retrouver, à l'ordre n et en moins de cinq lignes chacun, sans dériver et sans dresser aucun tableau de dérivées successives :

a. le développement de $\frac{1}{1+x}$;

b. celui de $\operatorname{ch} x$;

c. celui de $\operatorname{sh} x$;

d. celui de $\cos x$. Ce dernier demande un argument d'une autre nature que les trois précédents : on cherchera ce qui distingue $\cos$ de ch du point de vue de la dérivée seconde, et l'on dira honnêtement pourquoi la simple substitution ne suffit pas ici.

On indiquera à chaque fois lequel des trois procédés on emploie : **substitution** d'une expression dans un développement connu, **parité**, ou **combinaison** de deux développements.

Partie C. Un seul calcul par Taylor-Young

3. Déterminer le développement limité de th à l'ordre 5 en 0. Deux voies sont possibles : dresser le tableau des dérivées successives $\operatorname{th}^{(k)}(0)$ pour $k \leq 5$, ou exploiter la relation $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$. Choisir la plus courte, la mener, et dire en une phrase pourquoi elle est la plus courte. On justifiera d'abord l'**existence** du développement.

Partie D. Le seul théorème qui fabrique du neuf

4. Le cours établit à la section 21 le résultat suivant, énoncé sans aucun symbole d'intégrale.

Théorème

Primitivation d'un développement limité. Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I contenant 0. Si f' admet en 0 un développement limité d'ordre n ,

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n),$$

alors f admet en 0 un développement limité d'ordre $n+1$, obtenu en primitivant terme à terme et en prenant $f(0)$ comme terme constant :

$$f(x) = f(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

a. L'appliquer à $f = \text{Arctan}$ pour obtenir son développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0. On partira de la dérivée, acquise à la section 8.

b. *L'avertissement.* La réciproque est **fausse** : si f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, sa dérivée n'admet pas nécessairement de développement limité d'ordre n , et **on ne dérive jamais un développement limité**. Le démontrer sur la fonction

$$h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{pour } x \neq 0, \quad h(0) = 0.$$

On montrera que h admet un développement limité d'ordre 1 en 0, et que h' n'admet même pas de développement limité d'ordre 0.

Exercice 27 ★★ Le coût de la troncature

Notions : Opérations sur les développements limités : somme, produit, quotient, composition, changement de variable

Un calcul de développement limité échoue rarement sur la table des usuels. Il échoue sur l'**ordre auquel on développe chaque morceau** : trop bas, il manque des termes ; trop haut, on calcule pour rien et on se trompe. Cet exercice ne fait que cela, et le fait sur un cas où l'erreur est visible au chiffre près.

Partie A. Un produit, mal puis bien

On veut le développement limité d'ordre 3 en 0 de

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+2x}}.$$

1. *Avant tout calcul.* À quel ordre faut-il développer e^{-x} ? À quel ordre faut-il développer $(1+2x)^{-1/2}$? Justifier, en regardant la valeur de chaque facteur en 0.
2. *L'erreur, pour la voir.* Développer chacun des deux facteurs à l'ordre 2 seulement, multiplier les deux polynômes **entièrement**, et écrire le coefficient de x^3 ainsi obtenu. On le gardera de côté.
3. Reprendre le calcul correctement et donner le développement limité d'ordre 3 de F . Comparer au coefficient de la question 2 : quelle est la différence, et d'où viennent précisément les termes qui manquaient ?

Partie B. Quand la division coûte des ordres

4. On considère

$$G(x) = \frac{\cos(2x) - \cos^2 x}{x^2}.$$

À quel ordre faut-il développer le numérateur pour obtenir le développement limité d'ordre 2 de G en 0 ? Énoncer la règle générale pour une division par x^p , puis mener le calcul.

5. Deux quotients dont le dénominateur ne vaut pas 1 en 0. Les traiter en factorisant le dénominateur par sa valeur en 0, puis en composant avec le développement de $\frac{1}{1-u}$. On indiquera à chaque fois l'ordre auquel chaque morceau est développé, et pourquoi.

- a. $\frac{1}{2 + \sin x}$ à l'ordre 3
- b. $\frac{2x}{3 + e^x}$ à l'ordre 3

Partie C. Diagnostic seul

6. Pour chacune des cinq expressions suivantes, dire **à quel ordre développer chaque morceau**, et rien de plus : aucun calcul ne doit être mené à terme. Une des cinq n'admet pas de développement limité en 0 ; il faudra le repérer et le dire.

- a. $\sqrt[3]{1+x} \ln(1+2x)$, à l'ordre 3
- b. $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^5}$, à l'ordre 2
- c. $\ln(1 + \sin^2 x)$, à l'ordre 6
- d. $\frac{\operatorname{ch} x - \sqrt{1+x^2}}{x^4}$, à l'ordre 2
- e. $\sqrt{1 + \operatorname{Arctan} x}$, à l'ordre 3

Exercice 28 ★★★ Composer, et changer de variable

Notions : Opérations sur les développements limités : somme, produit, quotient, composition, changement de variable

Les développements limités du tableau des usuels sont tous écrits **en** 0. Deux opérations permettent de sortir de ce cadre : la **composition**, qui remplace x par une expression qui tend vers 0, et le **changement de variable** $x = a + h$, qui ramène un point quelconque en 0. Elles reposent sur la même idée et se rédigent de la même façon, à condition de dire à chaque fois quelle quantité tend vers 0.

Les développements limités en l'infini se traitent par un troisième changement de variable, et ils font l'objet de l'exercice 30.

Partie A. La règle de composition

1. Soit f admettant un développement limité d'ordre n en 0, et soit u une fonction définie au voisinage de 0. On veut le développement limité de $f \circ u$ en 0.

a. Pourquoi la condition $u(0) = 0$ est-elle nécessaire pour substituer $u(x)$ dans le développement de f ? On expliquera ce qui, dans l'écriture $o(u^n)$, cesse d'avoir un sens sinon.

b. Que faire lorsque $u(0) = b \neq 0$? Décrire la marche à suivre.

Partie B. Trois développements par composition

2. Déterminer les développements limités suivants, tous en 0. On écrira à chaque fois quelle est la quantité substituée et pourquoi elle tend vers 0.

a. $e^{\operatorname{Arctan} x}$ à l'ordre 3

b. $\sqrt{\operatorname{ch} x}$ à l'ordre 4

c. $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$ à l'ordre 5. Comparer le résultat au développement de $\sin$: que remarque-t-on, et à partir de quel ordre les deux fonctions se distinguent-elles?

Partie C. Trois développements en un point $a \neq 0$

3. Pour chacune des trois fonctions, écrire **explicitement** le changement de variable $x = a + h$, avec $h \rightarrow 0$, puis donner le développement limité demandé, en la variable h .

a. $\cos$ en $a = \frac{\pi}{6}$, à l'ordre 2

b. $\ln$ en $a = 3$, à l'ordre 3

c. $\sqrt{}$ en $a = 16$, à l'ordre 2

Dans les trois cas, effectuer le contrôle suivant : **le terme constant doit valoir $f(a)$, et le coefficient de h doit valoir $f'(a)$.**

4. *Le piège.* Une copie écrit, pour la question 3.b :

$$\ln x = \ln 3 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{81} + o(x^3).$$

Dire ce qui est faux, tester numériquement les deux écritures en $x = 3,1$, et énoncer ce qu'un développement limité en a est exactement : en quelle variable est son polynôme, et par rapport à quoi est écrit son reste?

Exercice 29 ★★ Huit limites, avec le diagnostic d'ordre avant le calcul

Notions : Applications des développements limités : limites, équivalents, tangente et position, asymptotes

Une limite par développement limité se calcule en deux temps, et l'ordre des deux temps décide de tout. On commence par **diagnostiquer** l'ordre auquel développer, en regardant la structure de l'expression ; puis on calcule. Une copie qui inverse les deux passe son temps à recommencer, parce qu'un ordre trop court redonne une forme indéterminée et qu'un ordre trop long fabrique des termes inutiles où l'on se trompe.

Partie A. Huit limites

Voici les huit expressions. La variable tend vers 0, sauf pour la huitième, où elle tend vers $\frac{\pi}{2}$.

a. $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$

e. $\frac{\cos(2x) - \cos^2 x}{x^2}$

b. $\frac{\ln(1+x) \ln(1-x)}{x^2}$

f. $\frac{(1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2}$

c. $\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} - 2x}{x^3}$

g. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$

d. $\frac{\text{Arctan}(2x) - 2 \text{Arctan } x}{x^3}$

h. $\frac{1 - \sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$

1. *Diagnostic seul.* Pour chacune des huit expressions, dire **à quel ordre développer**, et pourquoi, **sans calculer la limite**. On donnera pour chaque cas la valuation attendue du numérateur et le nombre d'ordres coûtés par le dénominateur.

2. Calculer les huit limites, et vérifier à chaque fois que le diagnostic de la question 1 était le bon : si un terme calculé n'a servi à rien, l'ordre était trop grand ; si l'on a dû recommencer, il était trop petit.

3. *Un ordre trop court.* On considère

$$\frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{x^4} \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

Développer d'abord le numérateur à l'ordre 2 et dire précisément ce que l'on obtient. Puis reprendre à l'ordre correct.

Partie B. Un paramètre à déterminer

4. Déterminer le réel a pour lequel l'expression

$$\frac{e^x - 1 - ax}{x^2}$$

admet une limite **finie** quand x tend vers 0, et donner alors cette limite.

5. Que se passe-t-il si a est mal choisi ? On décrira le comportement de l'expression à droite et à gauche de 0, et l'on dira pourquoi il serait faux d'écrire « la limite est indéterminée ».

Exercice 30 ★★★ Branches infinies : asymptote, ou parabolique ?

Notions : Applications des développements limités : limites, équivalents, tangente et position, asymptotes

Une courbe qui part à l'infini le fait de plusieurs manières, et le développement limité en dit la nature exacte. Attention, la recette « on calcule $f(x) - mx - p$ » ne s'applique qu'après avoir vérifié qu'il y a bien une asymptote : deux des quatre fonctions ci-dessous n'en ont pas au sens où on l'attend, et c'est ce qui fait l'intérêt de l'exercice.

1. Question de méthode. Pour étudier une fonction au voisinage de $+\infty$, on pose $x = \frac{1}{t}$. Pourquoi ce changement de variable, et non un autre ? Que devient le voisinage de $+\infty$, et quel signe faut-il donner à t ?

2. Pour chacune des quatre fonctions suivantes, étudier la branche infinie **en** $+\infty$, puis en $-\infty$ chaque fois que le domaine le permet. On demande, dans cet ordre :

- la nature de la branche infinie ;
- l'équation de l'asymptote s'il y en a une ;
- la **position de la courbe par rapport à cette asymptote**, donnée par le terme suivant du développement.

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$

c. $k(x) = \sqrt{4x^2 + x}$

b. $g(x) = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$

d. $h(x) = x + \sqrt{x}$

3. Classer les quatre fonctions par nature de branche infinie en $+\infty$, puis énoncer le **critère** qui permet de trancher avant tout calcul de terme suivant.

Exercice 31 ★ Convexité : lecture graphique et test sur une table de valeurs

Notions : Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités

La convexité se démontre par la dérivée seconde, mais elle se **lit** avant de se calculer, et c'est cette lecture qu'on installe ici. Le lemme des trois pentes a été démontré à la section 24 du cours ; on n'y revient pas, on s'en sert sous la forme suivante, qui est celle qu'on emploie en pratique.

Propriété

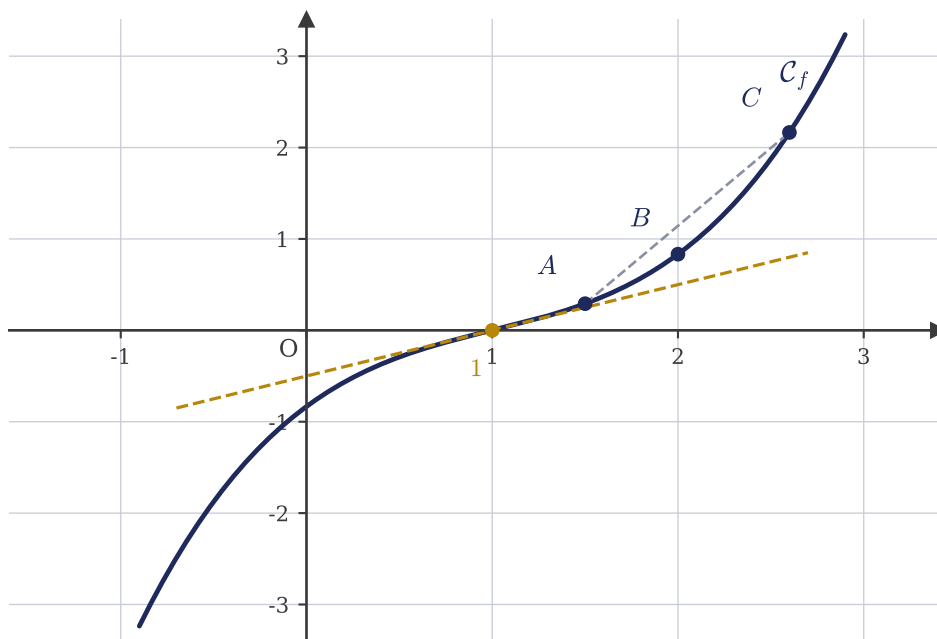
Inégalité des pentes. Si f est convexe sur un intervalle I , alors pour tous $u < v < w$ dans I ,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}.$$

Autrement dit, **les pentes des cordes croissent quand on avance vers la droite**. Pour une fonction concave, les trois inégalités sont inversées.

Partie A. Lecture graphique

La figure ci-dessous montre la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f sur l'intervalle $[-0,9; 2,9]$, sa tangente en $x = 1$ tracée en pointillés, et trois points A , B , C de la courbe, d'abscisses respectives 1,5 ; 2 ; 2,6, reliés par la corde $[AC]$.



1. Lire sur quel intervalle f est **convexe** et sur quel intervalle elle est **concave**. On dira à quoi on le voit.
2. Donner l'abscisse du **point d'inflexion**.
3. Que remarque-t-on sur la tangente en ce point, par rapport à la courbe ? En quoi cela distingue-t-il ce point de tous les autres points de la courbe ?
4. Ordonner les pentes des trois cordes $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, et énoncer la propriété générale que cette lecture illustre.

Partie B. Le test sur quatre valeurs

On ne dispose plus d'aucune courbe, mais seulement de quatre valeurs d'une fonction g définie sur $[0, 4]$, données par une table. La question est : **ces valeurs sont-elles compatibles avec une fonction convexe sur $[0, 4]$?**

x	0	1	3	4
Jeu $\mathcal{J}_1 : g(x)$	5	2	0	1
Jeu $\mathcal{J}_2 : g(x)$	0	3	4	8

5. Pour chacun des deux jeux, répondre à la question, en justifiant par l'inégalité des pentes. Pour une réponse négative, on exhibera le triplet de points qui met l'inégalité en défaut.
6. Énoncer, pour quatre abscisses $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ et quatre valeurs données, le critère qui décide de la compatibilité. Combien d'inégalités faut-il vérifier ?
7. Dans le jeu qui n'est pas compatible, on souhaite modifier **une seule valeur**, celle de $g(1)$, pour le rendre compatible. Déterminer l'ensemble exact des valeurs de $g(1)$ qui conviennent.

Exercice 32 ★★★ Convexité et dérivée seconde

Notions : Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

La caractérisation de la convexité par le signe de f'' est l'outil le plus employé du chapitre, et le plus mal employé. Cet exercice l'installe sur une fonction complète, puis en montre les deux frontières : un point d'inflexion **sans** dérivée seconde, et une dérivée seconde nulle **sans** point d'inflexion. Il se termine par une inégalité classique obtenue par la seule convexité.

On utilisera librement les résultats de la section 24 du cours : f est convexe sur un intervalle I si et seulement si f' y est croissante, si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I lorsque f'' existe ; et une fonction convexe sur I a sa courbe **au-dessus de chacune de ses tangentes**.

Partie A. La gaussienne

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

1. Étudier la parité de f , ses limites en $\pm\infty$, puis calculer f' et f'' .
2. Établir que f admet exactement **deux points d'inflexion**, d'abscisses $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, et donner leur ordonnée.
3. Réunir variations et convexité dans un **seul tableau**, en y faisant figurer le signe de f' , le signe de f'' , le sens de variation et la forme de la courbe.
4. Décrire l'esquisse de la courbe : quels points et quelles droites doit-on y placer avant de tracer quoi que ce soit ?

Partie B. Une inflexion sans dérivée seconde

On note g la fonction **racine cubique**, c'est-à-dire la bijection réciproque de $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, construite au chapitre précédent :

$$g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad \text{de sorte que } g(x)^3 = x \text{ pour tout réel } x.$$

On rappelle que la notation $x^{1/3}$ est réservée à $x > 0$, et qu'on emploie donc $\sqrt[3]{x}$, défini sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. Montrer que g n'est pas dérivable en 0, et préciser la nature de la tangente en ce point.
6. Calculer g' et g'' sur $]0, +\infty[$, puis obtenir leur expression sur $] -\infty, 0[$ par un argument de parité. En déduire le sens de la concavité sur chacun des deux intervalles.
7. Conclure : g admet-elle un point d'inflexion en 0 ? La dérivée seconde $g''(0)$ existe-t-elle ? Que doit-on en retenir sur la définition d'un point d'inflexion ?

Partie C. Une dérivée seconde nulle sans inflexion

8. Soit $p(x) = x^6$. Calculer p'' , montrer que $p''(0) = 0$, et déterminer si 0 est un point d'inflexion de p .
9. Énoncer précisément ce qu'il faut vérifier, en plus de l'annulation de $f''(a)$, pour conclure qu'un point est un point d'inflexion. Que devient l'étude si l'on remplace p par $-p$?

Partie D. L'inégalité de Bernoulli par la convexité

10. Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \geq -1$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

en utilisant uniquement la convexité et la position de la courbe par rapport à une tangente bien choisie. On traitera à part le cas $n = 1$, et l'on précisera le cas d'égalité.

11. Montrer sur un exemple chiffré que l'hypothèse $x \geq -1$ ne peut pas être retirée. Dépend-elle de la parité de n ?

Exercice 33 ★★★ Newton : construire, itérer, et les modes d'échec

Notions : Méthode de Newton : construction, convergence et vitesse, Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

La méthode de Newton est le procédé d'approximation le plus rapide du chapitre, et le plus fragile. On la construit ici de zéro, on l'observe travailler sur un exemple chiffré, on la compare à la dichotomie, puis on passe la moitié de l'exercice sur ses **trois manières d'échouer**, qui sont ce qu'un utilisateur doit connaître avant de s'en servir.

Partie A. Construire la formule

1. Soit f dérivable sur un intervalle et x_n un réel tel que $f'(x_n) \neq 0$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_n , déterminer son point d'intersection avec l'axe des abscisses, et en déduire la formule de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

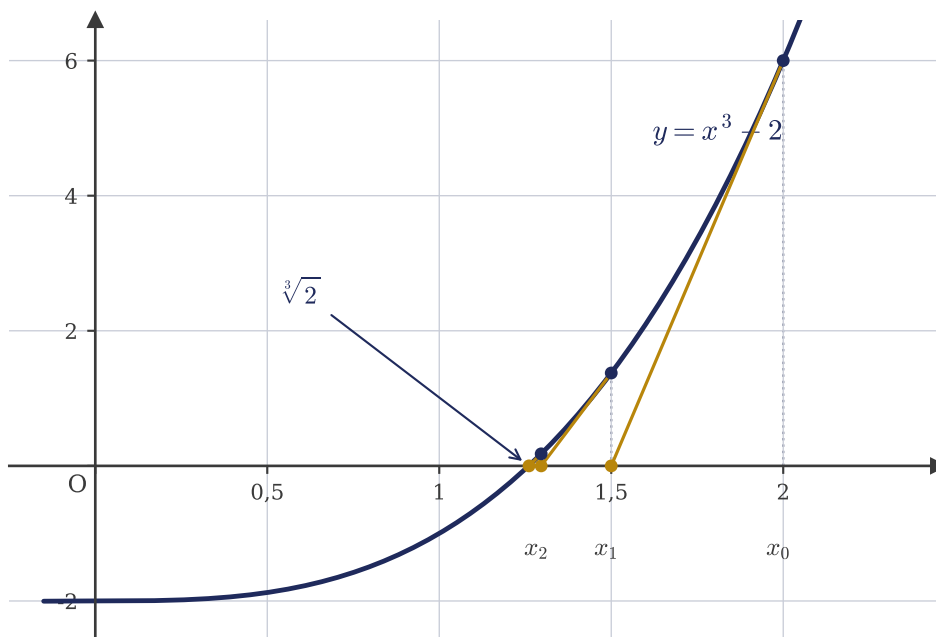
On dira où l'hypothèse $f'(x_n) \neq 0$ intervient.

Partie B. La racine cubique de 2

On prend

$$f(x) = x^3 - 2, \quad x_0 = 2,$$

et l'on cherche $\sqrt[3]{2} = 1,259921049\dots$, seule racine réelle de f . La figure ci-dessous montre les trois premières tangentes.



2. Expliciter la relation de récurrence pour cette fonction, puis calculer x_1 , x_2 , x_3 et x_4 , en donnant les valeurs à 10^{-8} près. On gardera les valeurs exactes sous forme de fractions aussi longtemps que possible.

3. Dresser la table des erreurs $e_n = |x_n - \sqrt[3]{2}|$ et compter, pour chaque rang, le nombre de **décimales exactes**. Que constate-t-on d'un rang au suivant ? Répondre par observation de la table.

4. *Comparaison avec la dichotomie.* On applique la dichotomie à f sur $[1, 2]$. Justifier que la méthode s'applique, puis déterminer combien d'itérations elle exige pour atteindre la précision obtenue par x_4 . Présenter le résultat en deux lignes.

Partie C. Les trois modes d'échec

Chacun des trois cas ci-dessous est un échec d'une nature différente : la suite existe et diverge, la suite s'arrête, la suite existe et tourne en rond.

5. La divergence. On applique la méthode de Newton à la fonction **racine cubique** $g(x) = \sqrt[3]{x}$, dont la seule racine est 0, en partant d'un $x_0 \neq 0$ quelconque.

a. Montrer que la relation de récurrence s'écrit $x_{n+1} = -2x_n$.

b. En déduire le comportement de la suite (x_n) , et dire quelle hypothèse manquait.

6. L'arrêt. Reprendre $f(x) = x^3 - 2$ mais avec $x_0 = 0$. Que se passe-t-il ? Interpréter géométriquement. Que se passe-t-il si l'on part de $x_0 = 10^{-3}$, ce qui est numériquement presque la même chose ?

7. Le cycle. On considère

$$\varphi(x) = x^3 - 2x + 2, \quad x_0 = 0.$$

a. Calculer x_1 puis x_2 . Que constate-t-on ?

b. La fonction φ possède-t-elle une racine réelle ? La méthode la trouvera-t-elle en partant de $x_0 = 0$?

8. Conclusion. Énoncer un jeu d'hypothèses qui garantit la convergence, vérifier qu'elles sont satisfaites dans la partie **B**, et dire laquelle est en défaut dans chacun des trois échecs.

Exercice 34 ★★★ Six copies à corriger

Notions : Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité, Extremum local intérieur et théorème de Rolle, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction, Théorème de la limite de la dérivée et théorème de Darboux, Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités, Développement limité : définition, unicité, troncature, parité

Ce n'est pas un exercice de calcul, c'est un exercice de **rigueur de rédaction**, et c'est ce que le chapitre sanctionne réellement en partiel. Six extraits de copie sont donnés, chacun découpé en lignes numérotées, et chacun se terminant par une conclusion qui a l'air juste.

Pour chacun des six, on demande trois choses, dans cet ordre.

Méthode

1. **La conclusion est-elle vraie ou fausse ?** On répond par un calcul ou un contre-exemple, pas par une impression.
2. **Quelle ligne exactement est fautive ?** On ne dit pas « c'est faux », on dit « la faute est à la ligne k », et on dit pourquoi.
3. **Rédiger la version correcte**, complète, telle qu'on l'écrit sur sa propre copie.

Attention. Deux de ces six copies ont une conclusion **juste** et une démonstration **fausse**. C'est le cas le plus difficile à repérer, parce que rien ne dépasse à la lecture, et le plus fréquent en situation. Une conclusion vraie ne valide jamais rétroactivement le raisonnement qui y mène.

Copie 1

Sujet. Soit $f(x) = (x^2 + 3)^5$. Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Ligne 1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

Ligne 2. Sa dérivée vaut $f'(x) = 5(x^2 + 3)^4$.

Ligne 3. Pour tout réel x , on a $x^2 + 3 \geq 3 > 0$, donc $(x^2 + 3)^4 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Ligne 4. La dérivée est strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Copie 2

Sujet. Soit $f(x) = x^5$. Déterminer les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}$.

Ligne 1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4$.

Ligne 2. On résout $f'(x) = 0$, ce qui donne $x = 0$ comme unique solution.

Ligne 3. Le lemme de Fermat affirme qu'en un extremum local intérieur, la dérivée s'annule.

Ligne 4. Donc f admet un extremum local en 0, et c'est le seul.

Copie 3

Sujet. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(3\pi x)$ pour $x \in]0, 1[$ et $f(0) = -1$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ligne 1. On a $f(0) = -1$ et $f(1) = \cos(3\pi) = -1$, donc $f(0) = f(1)$.

Ligne 2. La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto 3\pi x$ et du cosinus.

Ligne 3. Les hypothèses du théorème de Rolle sont donc vérifiées.

Ligne 4. Il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Copie 4

Sujet. Montrer que la fonction tangente est strictement croissante sur son ensemble de définition $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ligne 1. La fonction $\tan$ est dérivable sur $\mathcal{D}$, et $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Ligne 2. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $1 + \tan^2 x \geq 1 > 0$.

Ligne 3. La dérivée est donc strictement positive sur $\mathcal{D}$.

Ligne 4. Donc $\tan$ est strictement croissante sur $\mathcal{D}$.

Copie 5

Sujet. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ pour $x > 0$ et $f(x) = x - 1$ pour $x \leq 0$. Déterminer $f'(0)$.

Ligne 1. Pour $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et pour $x < 0$, on a $f'(x) = 1$.

Ligne 2. Quand $x \rightarrow 0^+$, $f'(x) \rightarrow 1$; quand $x \rightarrow 0^-$, $f'(x) \rightarrow 1$.

Ligne 3. La dérivée f' admet donc la limite 1 en 0.

Ligne 4. Donc $f'(0) = 1$.

Copie 6

Sujet. Donner le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+x}$.

Ligne 1. On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Ligne 2. La dérivée de $x \mapsto \ln(1+x)$ est $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Ligne 3. En dérivant le développement terme à terme, on obtient $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.

Question finale

7. Classer les six fautes selon leur **nature**, puis dire lesquelles des six conclusions étaient vraies. Quelle est, des quatre natures de faute recensées, celle contre laquelle une relecture ne protège pas ?