

Dérivation, accroissements finis et développements limités

Fiche d'exercices corrigés — L1 maths

Difficulté : ★ application directe · ★★ standard · ★★★ approfondissement · ★★★★★ défi.

Un conseil : cherchez d'abord, le corrigé ensuite — c'est là que ça progresse.

Exercice 1 ★ Six taux d'accroissement à identifier

Notions : Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité

Les exercices habituels donnent une fonction et demandent sa dérivée. Ici c'est l'inverse : chacune des six limites ci-dessous **est** un taux d'accroissement, mais l'énoncé ne dit ni de quelle fonction, ni en quel point. C'est cela qu'il faut trouver.

1. Pour chacune des six limites suivantes : identifier une fonction f et un point a tels que l'expression soit le taux d'accroissement de f en a , justifier que f est dérivable en a , puis calculer la limite.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}$

b. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^{1/3} - 2}{x - 8}$

e. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$

c. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

Dans l'item b, $x^{1/3}$ désigne la racine cubique, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier comme la réciproque de $x \mapsto x^3$.

2. Deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = x|x| \quad \text{et} \quad v(x) = (\sqrt[3]{x})^4,$$

la seconde étant celle qu'on note aussi $x^{4/3}$.

a. Sont-elles dérivables en 0 ? Si oui, donner le nombre dérivé et l'équation de la tangente.

b. Deux réflexes courants conduisent ici à deux réponses fausses : « il y a une valeur absolue, donc ce n'est pas dérivable » et « il y a un exposant fractionnaire, donc la tangente est verticale ». Dire, pour chacun, sur quel exemple connu il est justifié, et pourquoi il ne l'est pas ici.

Corrigé

La méthode, et la phrase par laquelle tout commence

Méthode

Comment on rédige la lecture inverse d'un taux d'accroissement. Trois étapes, et la première est une phrase, pas un calcul.

1. **On pose.** On écrit noir sur blanc « posons $f(x) = \dots$ et $a = \dots$ ». Tant que cette phrase n'est pas écrite, il n'y a pas de fonction, donc pas de dérivée, et le mot « dérivable » n'a rien à quoi s'appliquer.
2. **On vérifie l'ajustement**, c'est-à-dire que le numérateur est bien $f(x) - f(a)$ et **pas autre chose**. Cela demande de calculer $f(a)$ et de le comparer à la constante qui figure dans l'énoncé. C'est la seule étape où l'on peut se tromper sans s'en apercevoir.
3. **On justifie la dérivabilité en a** , en nommant la ligne du tableau des dérivées usuelles ou l'opération employée, puis on conclut : la limite cherchée **est** $f'(a)$, par définition du nombre dérivé.

Ce qu'on n'écrit pas : « on reconnaît la dérivée de ... », sans dire de quelle fonction ni en quel point. Une reconnaissance n'est pas une justification.

Le point 2 mérite un mot de plus. Le taux d'accroissement de f en a est

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

et il y a **deux** choses à ajuster : le dénominateur, qui doit être exactement $x - a$, et le numérateur, dont la constante soustraite doit être exactement $f(a)$. Le dénominateur se lit tout de suite et donne le point a ; c'est donc toujours par lui qu'on commence.

1.a. La fonction $x \mapsto 2^x$ en 0

Le dénominateur est x , donc $a = 0$. Posons $f(x) = 2^x$, définie sur $\mathbb{R}$ par $2^x = e^{x \ln 2}$. Alors $f(0) = 2^0 = 1$, et le numérateur $2^x - 1$ est bien $f(x) - f(0)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto x \ln 2$ et de l'exponentielle, et

$$f'(x) = \ln 2 \times e^{x \ln 2} = \ln 2 \times 2^x.$$

En particulier $f'(0) = \ln 2$. La limite proposée est donc le nombre dérivé de f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2.$$

Ce que ce résultat dit de la fonction. C'est la pente de la courbe de $x \mapsto 2^x$ à l'origine, et elle vaut $\ln 2 \approx 0,69$, donc strictement moins que 1. Le même calcul avec une base $b > 0$ donne $\ln b$, et l'on voit apparaître ce qui caractérise la base e : c'est la seule pour laquelle cette pente vaut 1.

1.b. La racine cubique en 8

Le dénominateur est $x - 8$, donc $a = 8$. Posons $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$. Alors $f(8) = 2$, puisque $2^3 = 8$, et le numérateur $x^{1/3} - 2$ est bien $f(x) - f(8)$.

La racine cubique est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, avec $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ — cette formule est établie à l'exercice 06 par le théorème de la dérivée d'une réciproque, et l'on s'en sert ici comme d'un acquis. Comme $8 \neq 0$,

$$f'(8) = \frac{1}{3 \times 8^{2/3}} = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12},$$

en utilisant $8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^{1/3} - 2}{x - 8} = \frac{1}{12}.$$

La justification « $8 \neq 0$ » n'est pas décorative. La racine cubique n'est pas dérivable en 0, et le même quotient écrit en 0 n'aurait aucune limite finie. Le point a fait partie de l'énoncé au même titre que la fonction.

1.c. La tangente en $\frac{\pi}{4}$

Le dénominateur est $x - \frac{\pi}{4}$, donc $a = \frac{\pi}{4}$. Posons $f = \tan$. Alors $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, et le numérateur $\tan x - 1$ est bien $f(x) - f(\frac{\pi}{4})$.

La fonction tangente est dérivable en tout point où le cosinus ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$ privé des $\frac{\pi}{2} + k\pi$, et $\frac{\pi}{4}$ n'est pas de cette forme. Sa dérivée est $1 + \tan^2$, donc

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1^2 = 2, \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4} = 2.$$

1.d. Le logarithme en 3

Le dénominateur est $x - 3$, donc $a = 3$. Posons $f = \ln$, dérivable sur $]0, +\infty[$, et $3 > 0$. Le numérateur est $\ln x - \ln 3 = f(x) - f(3)$: l'ajustement est immédiat, à condition de **ne pas** simplifier $\ln x - \ln 3$ en $\ln \frac{x}{3}$, ce qui masquerait la structure. Comme $f'(x) = \frac{1}{x}$,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} = f'(3) = \frac{1}{3}.$$

1.e. Le cosinus en π

Le dénominateur est $x - \pi$, donc $a = \pi$. Posons $f = \cos$. Ici l'ajustement du numérateur demande une petite manipulation : $\cos \pi = -1$, donc

$$\cos x + 1 = \cos x - (-1) = f(x) - f(\pi).$$

Le cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $-\sin$, donc $f'(\pi) = -\sin \pi = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} = 0.$$

Une limite nulle, et ce qu'elle signifie. Le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0, et pourtant le quotient tend vers 0 : c'est que le numérateur s'annule « plus vite ». Géométriquement, la courbe du cosinus a une **tangente horizontale** au point d'abscisse π , ce qui se voit sur le graphe : π est un minimum du cosinus.

1.f. Une racine carrée en 1

Le dénominateur est $x - 1$, donc $a = 1$. Posons $f(x) = \sqrt{x+3}$, définie pour $x \geq -3$. Alors $f(1) = \sqrt{4} = 2$, et le numérateur $\sqrt{x+3} - 2$ est bien $f(x) - f(1)$.

La fonction f est dérivable en tout point où $x + 3 > 0$, comme composée de $x \mapsto x + 3$ et de la racine carrée, cette dernière étant dérivable sur $]0, +\infty[$ seulement. Comme $1 + 3 = 4 > 0$, elle est dérivable en 1, avec

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}, \quad \text{donc} \quad f'(1) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}.$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \frac{1}{4}.$$

Remarque

Une autre lecture, tout aussi correcte. On peut aussi poser $g(t) = \sqrt{t}$ et $b = 4$, puis écrire le quotient sous la forme $\frac{g(x+3) - g(4)}{(x+3) - 4}$: c'est le taux d'accroissement de g en 4, évalué en $t = x + 3$, et la limite vaut $g'(4) = \frac{1}{4}$. Le changement de variable est licite parce que $x + 3 \rightarrow 4$ et que $x + 3 \neq 4$ dès que $x \neq 1$, ce qui est l'hypothèse du théorème de composition des limites du chapitre précédent.

Les deux lectures donnent le même nombre, ce qui est rassurant mais n'était pas douteux : l'identification de f et de a n'est pas unique, seule la limite l'est.

2.a. Les deux diagnostics

La fonction $u : x \mapsto x|x|$. On revient à la définition, puisque c'est en 0 que la question se pose. Pour $x \neq 0$, comme $u(0) = 0$,

$$\tau_0(x) = \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|.$$

La simplification est légitime, x étant non nul. Or $|x| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$: le taux d'accroissement admet une limite **finie**, donc u est dérivable en 0 et

$$u'(0) = 0.$$

La tangente en 0 a pour équation $y = u(0) + u'(0)(x - 0)$, c'est-à-dire $y = 0$: c'est l'axe des abscisses.

La fonction $v : x \mapsto (\sqrt[3]{x})^4$. Même méthode. Pour $x \neq 0$, avec $v(0) = 0$,

$$\tau_0(x) = \frac{v(x)}{x} = \frac{(x^{1/3})^4}{x}.$$

Écrivons $x = (x^{1/3})^3$, ce qui est vrai pour tout réel x par définition de la racine cubique. En posant $t = x^{1/3}$, qui est non nul puisque $x \neq 0$, il vient

$$\tau_0(x) = \frac{t^4}{t^3} = t = x^{1/3}.$$

La racine cubique est continue en 0 et y vaut 0, donc $\tau_0(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Ainsi v est dérivable en 0, avec

$$v'(0) = 0,$$

et sa tangente en 0 est également l'axe des abscisses. $\square$

2.b. Pourquoi les deux réflexes échouent

Le réflexe « valeur absolue ». Il est justifié sur $x \mapsto |x|$ elle-même, dont le taux d'accroissement en 0 vaut $\frac{|x|}{x}$, c'est-à-dire 1 à droite et -1 à gauche : les deux dérivées latérales existent et diffèrent, la fonction n'est pas dérivable en 0, et sa courbe y présente un point anguleux (section 5 du cours).

Ce qui change ici, c'est le **facteur x supplémentaire**. Il divise le taux d'accroissement par un facteur qui tend vers 0 ; autrement dit, u s'écrase contre l'axe bien plus vite que la valeur absolue. Le calcul le montre en une ligne, et c'est le seul argument recevable : la présence d'un symbole dans une formule n'a jamais démontré quoi que ce soit.

On peut d'ailleurs expliciter u sans valeur absolue : $u(x) = x^2$ pour $x \geq 0$ et $u(x) = -x^2$ pour $x < 0$. Sous cette forme, plus rien ne suggère un point anguleux.

Le réflexe « exposant fractionnaire ». Il est justifié sur $x \mapsto x^{1/3}$, dont le taux d'accroissement en 0 vaut $\frac{x^{1/3}}{x} = \frac{1}{x^{2/3}}$, qui tend vers $+\infty$: la fonction n'est pas dérivable en 0 et sa courbe y a une **tangente verticale**. C'est exactement la situation rencontrée à l'item **1.b**, où l'on avait pris soin d'écarter le point 0.

Ce qui change ici, c'est que l'exposant est **plus grand que 1**. Le calcul de la question **2.a** donne un taux d'accroissement égal à $x^{1/3}$, qui tend vers 0 et non vers l'infini. La règle générale se lit sur l'exposant : pour $v(x) = (x^{1/3})^p$ avec p entier ≥ 1 — condition nécessaire pour que $v(0) = 0$, sans quoi le taux d'accroissement n'a pas cette forme —, le taux vaut $x^{(p-3)/3}$, qui tend vers 0 si $p > 3$, vaut 1 si $p = 3$, et tend vers l'infini en valeur absolue si $p < 3$. Avec $p = 4$, on est dans le premier cas.

Commentaire

Les six premiers items ne demandent aucun calcul de limite : ils demandent une **identification**, et la limite tombe ensuite du tableau des dérivées usuelles. C'est l'usage le plus rentable de la définition du nombre dérivé, et il faut le reconnaître dans les deux sens, parce que les deux se rencontrent en partiel : on part de la fonction pour trouver la limite (items **a** à **f**), ou l'on part d'une limite pour fabriquer la fonction, ce qui est le cas dès qu'on cherche à lever une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ sans autre outil.

Trois pièges se sont présentés, et ils reviendront.

La constante du numérateur. Dans les items **e** et **f**, elle n'était pas écrite sous la forme $f(a)$: il fallait voir que $1 = -\cos \pi$ et que $2 = \sqrt{4}$. Une copie qui pose la bonne fonction mais oublie de vérifier ce point conclut souvent juste, par chance ; le jour où la constante ne colle pas, la limite n'est plus un nombre dérivé du tout.

Le point où l'on se place. Il se lit dans le dénominateur, et il conditionne la justification de dérivabilité : la racine cubique en 8, oui ; en 0, non.

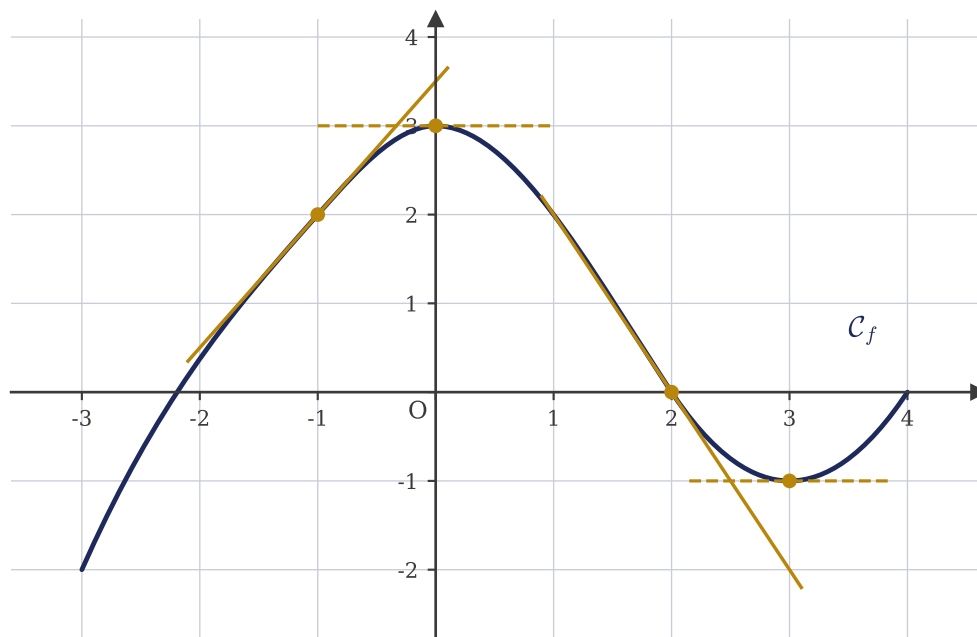
Le diagnostic ne se lit pas dans la formule. La question **2** réunit deux fonctions dont l'écriture crie « non dérivable » et qui le sont l'une et l'autre. Le seul juge est le taux d'accroissement, et il se calcule en trois lignes.

Exercice 2 ★ Lire une courbe et ses tangentes, puis reconnaître la dérivée et la dérivée seconde

Notions : Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

Partie A. Lire des nombres dérivés sur une figure

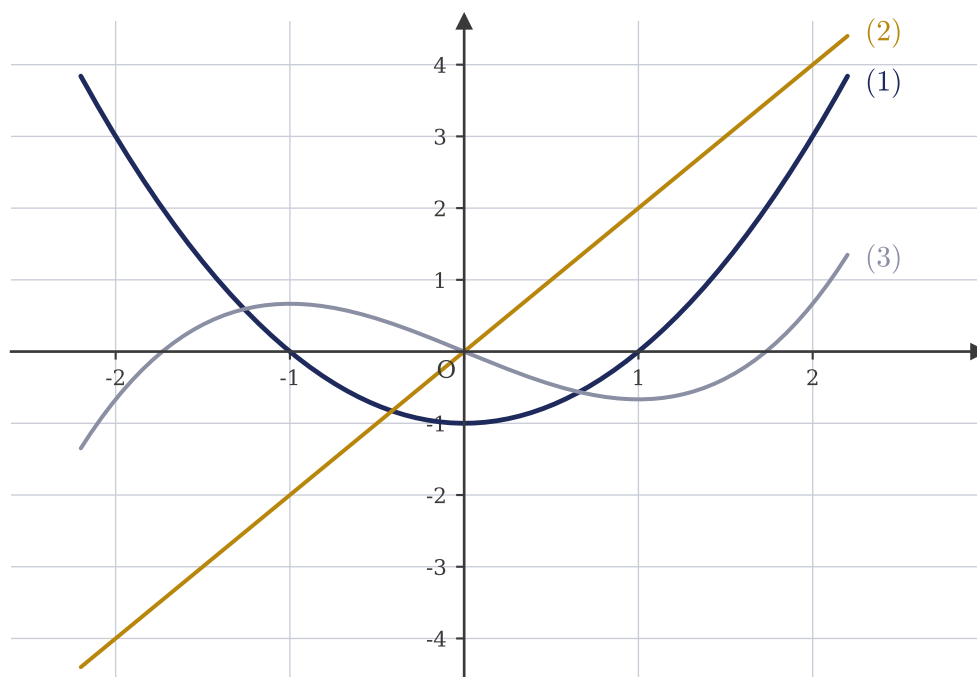
La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est celle d'une fonction f dérivable sur $[-3, 4]$. Elle passe par les points de coordonnées $(-3, -2)$, $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$, $(3, -1)$ et $(4, 0)$. Quatre tangentes ont été tracées : deux tangentes obliques, aux points d'abscisses -1 et 2 , et deux tangentes **horizontales**, aux points d'abscisses 0 et 3 .



1. Lire sur la figure les quatre nombres $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.
2. Donner les deux réels de $] -3, 4[$ en lesquels f' s'annule. Pour chacun, dire si f y admet un maximum local ou un minimum local, et justifier par la lecture de la courbe.
3. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
4. En déduire une valeur approchée de $f(2,1)$. En regardant la courbe au voisinage du point d'abscisse 2, dire si cette approximation est **par excès** ou **par défaut**.

Partie B. Trois courbes, aucune étiquette

On a tracé sur un même repère une fonction g , sa dérivée g' et sa dérivée seconde g'' . Les trois courbes sont numérotées (1), (2) et (3), dans un ordre quelconque : rien ne dit que (1) soit g .



5. Dire laquelle des trois courbes représente g , laquelle g' et laquelle g'' .

La justification attendue ne passe **par aucun calcul** : elle s'appuie uniquement sur les **zéros** des courbes et sur leurs **changements de signe**, confrontés aux tangentes horizontales et aux variations des deux autres. On énoncera d'abord, en une phrase, la propriété de lecture utilisée.

6. Une fois l'identification faite, proposer une expression possible pour g , et vérifier par le calcul que les trois courbes s'accordent avec ce choix.

Corrigé

Partie A

1. Les quatre lectures. Un nombre dérivé se lit sur une figure comme la **pente de la tangente**, jamais autrement.

- $f(-1) = 2$: c'est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse -1 .
- $f'(-1) = 1,5$: la tangente en ce point monte de 1,5 unité quand on avance d'une unité vers la droite.
- $f(2) = 0$: la courbe coupe l'axe des abscisses en 2.
- $f'(2) = -2$: la tangente en ce point descend de 2 unités par unité d'avancée.

Ce qu'il ne faut pas confondre. $f(-1)$ est une **ordonnée**, $f'(-1)$ est une **pente** : deux lectures de nature différente sur le même point. La faute classique consiste à lire l'ordonnée du point où la tangente coupe un axe, ce qui ne signifie rien.

2. Les deux points à tangente horizontale. Une tangente horizontale a une pente nulle, donc

$$f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(3) = 0.$$

Ce sont les deux seuls points de $] -3, 4[$ où la figure présente une tangente horizontale.

En 0. La courbe monte jusqu'au point $(0, 3)$ puis redescend vers $(2, 0)$: au voisinage de 0, tous les points de la courbe sont donc **en dessous** du point $(0, 3)$. La fonction f admet en 0 un **maximum local**, de valeur 3.

En 3. La courbe descend de $(2, 0)$ jusqu'au point $(3, -1)$ puis remonte vers $(4, 0)$: au voisinage de 3, tous les points de la courbe sont **au-dessus** du point $(3, -1)$. La fonction admet en 3 un

minimum local, de valeur -1 .

Remarque

Local, et pas global. Le maximum en 0 vaut 3, et c'est bien le plus grand des sommets visibles sur cette figure ; mais rien, sur un dessin limité à $[-3, 4]$, ne permet d'affirmer qu'une fonction définie plus loin ne dépasserait pas cette valeur. Le vocabulaire correct pour ce qu'on lit sur un graphe est toujours **local**, sauf si le domaine tout entier est représenté.

Et l'implication ne se retourne pas : une tangente horizontale ne garantit pas un extremum. C'est le lemme de Fermat et sa réserve, en section 10 du cours, et c'est l'objet de l'exercice 08.

3. La tangente au point d'abscisse 2. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Avec $a = 2$, $f(2) = 0$ et $f'(2) = -2$:

$$y = 0 - 2(x - 2), \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = -2x + 4.$$

4. L'approximation affine en 2,1. Au voisinage de 2, la courbe est proche de sa tangente, ce qui autorise à remplacer $f(x)$ par l'ordonnée de la tangente :

$$f(2,1) \approx -2 \times 2,1 + 4 = -4,2 + 4 = -0,2.$$

Excès ou défaut. Il faut regarder de quel côté de sa tangente se trouve la courbe. Entre les abscisses 2 et 3, la courbe descend de 0 à -1 en s'aplatissant, puisque sa pente passe de -2 à 0 : elle est donc **au-dessus** de la droite qui la prolongerait avec la pente -2 . La valeur $-0,2$ est ainsi **plus petite** que $f(2,1)$: l'approximation est **par défaut**.

Autrement dit, l'erreur commise est du signe de « la courbe tourne sa concavité vers le haut », ce que le cours nommera **convexité** dans sa dernière partie. Sur un graphe, la règle pratique est immédiate : **courbe au-dessus de sa tangente, approximation par défaut ; courbe en dessous, approximation par excès.**

Partie B

5. La propriété de lecture, énoncée en premier. Tout repose sur une seule phrase, et il faut l'écrire avant de regarder les courbes :

si φ est la dérivée de ψ , alors **les zéros de φ sont les abscisses des tangentes horizontales de ψ** , et le **signe** de φ donne le sens de variation de ψ .

C'est donc un couple de vérifications, pas une seule : les zéros d'abord, qui désignent les candidats, le signe ensuite, qui confirme ou élimine.

Ce que montre la courbe (3). Elle présente exactement **deux tangentes horizontales**, aux abscisses -1 et 1 : elle croît jusqu'à un sommet en -1 , décroît jusqu'à un creux en 1 , puis croît de nouveau.

Qui est la dérivée de (3) ? Il faut une courbe qui s'annule exactement en -1 et en 1 . La courbe (2) ne s'annule qu'en 0 : elle est éliminée. La courbe (1) s'annule en -1 et en 1 , et en ces deux points seulement : c'est la seule candidate.

La confirmation par le signe. La courbe (1) est positive sur $] -\infty, -1[$, où (3) croît ; négative sur $] -1, 1[$, où (3) décroît ; positive sur $] 1, +\infty[$, où (3) croît de nouveau. Les trois accords sont réalisés, donc

$$(1) = (3)'.$$

Le second étage. Il reste à décider laquelle de (1) et (2) est la dérivée de l'autre. La courbe (1) a une seule tangente horizontale, en 0, à son sommet inférieur. La courbe (2) s'annule exactement en 0 : elle est candidate. Signe : (2) est négative avant 0, où (1) décroît, et positive après, où (1) croît. L'accord est complet, donc $(2) = (1)'$.

Conclusion. La courbe (3) est celle de g , la courbe (1) celle de g' , et la courbe (2) celle de g'' .

Remarque

La vérification qui aurait pu tout casser. Si l'on avait supposé $(2) = (3)'$, il aurait fallu que (3) ait une tangente horizontale en 0, ce qui est faux : en 0, la courbe (3) descend franchement. Une seule confrontation suffit à éliminer une hypothèse, et c'est pour cela qu'on commence par les zéros : ils sont ce qui se lit le plus sûrement sur un dessin.

Le raisonnement de forme, à ne pas prendre pour une démonstration. On peut remarquer que (3) a l'allure d'un polynôme de degré 3, (1) celle d'un degré 2, (2) celle d'un degré 1, et que dériver fait perdre un degré. C'est un excellent contrôle de vraisemblance, mais rien sur la figure ne dit que ces courbes sont polynomiales. La justification qui compte reste celle des zéros et des signes, qui ne suppose rien.

6. Une expression possible, et sa vérification. La courbe (1) est une parabole de sommet $(0, -1)$ qui coupe l'axe des abscisses en -1 et 1 : l'expression $x \mapsto x^2 - 1$ convient. La courbe (2) est une droite passant par l'origine, de pente 2 : l'expression $x \mapsto 2x$ convient. On cherche donc g telle que $g'(x) = x^2 - 1$, et

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

répond à la question, comme le donne le tableau des dérivées usuelles appliqué terme à terme. Vérifions les trois accords.

- $g'(x) = \frac{3x^2}{3} - 1 = x^2 - 1$, qui est bien l'expression lue sur (1).
- $g''(x) = 2x$, qui est bien l'expression lue sur (2).
- $g(-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$ et $g(1) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$: la courbe (3) passe bien par un sommet d'ordonnée $\frac{2}{3}$ en -1 et par un creux d'ordonnée $-\frac{2}{3}$ en 1 , ce que la figure confirme. $\square$

Pourquoi « une » expression et non « l' » expression. La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x + 5$ a exactement la même dérivée et la même dérivée seconde ; sa courbe serait celle de (3) **translatée** de 5 vers le haut. La lecture des seules courbes (1) et (2) ne détermine donc g qu'à une constante près, et c'est la position de (3) sur la figure, qui passe par l'origine, qui fixe cette constante à 0.

Commentaire

Les deux parties travaillent le même dictionnaire, dans les deux sens.

De la fonction vers la dérivée : une tangente horizontale de f donne un **zéro** de f' ; une portion croissante de f donne un **signe positif** de f' ; la pente d'une tangente donne une **valeur** de f' .

De la dérivée vers la fonction : un zéro de f' donne une tangente horizontale de f , sans dire s'il s'agit d'un extremum ; un changement de signe de f' , lui, le dit.

La partie B ajoute un étage, et c'est là que les copies se perdent : on y compare g' à g'' exactement comme on comparait g à g' , la relation étant la même. Il n'y a rien de neuf à savoir, seulement une hiérarchie à ne pas mélanger — le plus sûr est de traiter les deux étages **l'un après l'autre**, en écrivant sa conclusion intermédiaire, plutôt que de chercher à tout voir d'un coup.

Exercice 3 ★★ Recoller trois morceaux, avec deux jonctions

Notions : Dérivées à gauche et à droite, point anguleux, tangente verticale, fonctions définies par morceaux, Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité

Soient a, b, c, d quatre réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0, \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1, \\ c \ln x + d & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Justifier que, quels que soient les quatre paramètres, f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. En déduire que toute l'étude se concentre sur deux points, et lesquels.

2. Déterminer à quelle condition sur (a, b, c, d) la fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$. Combien de paramètres restent-ils libres ?

3. Déterminer à quelle condition sur (a, b, c, d) la fonction f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$.

On demande, **avant** de résoudre quoi que ce soit, de compter d'un côté le nombre de paramètres disponibles, de l'autre le nombre de conditions imposées, et de dire ce que ce comptage laisse espérer. On dira aussi ce qu'il ne prouve pas.

4. Pour les valeurs trouvées à la question 3, expliciter f et f' , et vérifier que f' est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Peut-on, en plus, imposer que f soit **deux fois dérivable** sur $\mathbb{R}$? Répondre en reprenant le comptage de la question 3, puis en examinant séparément chacune des deux jonctions.

Corrigé

1. Où l'étude se joue, et où elle ne se joue pas

Sur l'ouvert $] -\infty, 0[$, la fonction f coïncide avec $\sin$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur l'ouvert $]0, 1[$, elle coïncide avec la fonction affine $x \mapsto ax + b$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur l'ouvert $]1, +\infty[$, elle coïncide avec $x \mapsto c \ln x + d$, dérivable sur $]0, +\infty[$ comme combinaison linéaire de $\ln$ et d'une constante, et $]1, +\infty[$ est contenu dans $]0, +\infty[$.

Or la dérivabilité en un point ne dépend que des valeurs de la fonction **au voisinage** de ce point : si deux fonctions coïncident sur un intervalle ouvert, elles ont même taux d'accroissement en chaque point de cet intervalle, donc même comportement. Chacun des trois ouverts ci-dessus étant un voisinage de chacun de ses points, f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, quels que soient a, b, c et d .

Les paramètres ne servent donc **à rien d'autre** qu'à régler ce qui se passe aux deux **points de jonction** 0 et 1, où deux formules différentes se rencontrent et où aucun voisinage n'est décrit par une formule unique. Toute l'étude tient dans ces deux points, et il y en a deux : c'est ce qui distingue cet exercice d'un recollement ordinaire.

2. La continuité

Le critère est celui du chapitre précédent : en un point α intérieur au domaine, f est continue en α si et seulement si $f(\alpha^-) = f(\alpha) = f(\alpha^+)$. On calcule donc trois quantités par point.

En 0. La valeur est donnée par la première ligne, puisque la condition $x \leq 0$ est vérifiée en 0 : $f(0) = \sin 0 = 0$. À gauche, $f(x) = \sin x \rightarrow 0$ par continuité du sinus. À droite, $f(x) = ax + b \rightarrow b$. La continuité en 0 équivaut donc à

$$b = 0.$$

En 1. La valeur est donnée par la troisième ligne, puisque $x \geq 1$ est vérifiée en 1 : $f(1) =$

$c \ln 1 + d = d$. À droite, $f(x) = c \ln x + d \rightarrow d$ par continuité du logarithme : cette limite-là est automatiquement la bonne, et n'impose rien. À gauche, $f(x) = ax + b \rightarrow a + b$. La continuité en 1 équivaut donc à

$$a + b = d.$$

Conclusion. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 0$ et $d = a + b$, c'est-à-dire

$$b = 0 \quad \text{et} \quad d = a.$$

Deux relations pour quatre paramètres : il en reste **deux libres**, par exemple a et c , les deux autres s'en déduisant. Autrement dit, il existe toute une famille à deux paramètres de fonctions continues de ce type, et ce n'est pas encore la dérivabilité.

Remarque

Une dissymétrie à relever. En 0, c'est la limite à droite qui a imposé une condition ; en 1, c'est la limite à gauche. La raison est la même dans les deux cas : la ligne qui donne la **valeur** de f au point de jonction, c'est-à-dire celle dont l'inégalité est large, fournit gratuitement l'une des deux limites latérales. C'est l'autre côté qui coûte une équation. Repérer d'abord quelle ligne contient le point évite de calculer trois quantités quand deux suffisent.

3. La dérivabilité

Le comptage, écrit avant de calculer. On dispose de **quatre** paramètres. Les conditions à imposer sont au nombre de **quatre** également : la continuité en 0 et en 1, puis l'égalité des deux dérivées latérales en 0 et en 1. Une fonction ne peut en effet être dérivable en un point sans y être continue (section 4 du cours) : les deux premières conditions ne sont pas négociables, et elles sont déjà acquises à la question 2.

Quatre inconnues, quatre équations : on peut **espérer** un nombre fini de solutions, et si le système est linéaire, une solution unique.

Ce que ce comptage ne prouve pas. Absolument rien. Un système de quatre équations à quatre inconnues peut être impossible, ou avoir une infinité de solutions ; le comptage indique seulement qu'il n'est pas déraisonnable de chercher une solution unique, et surtout qu'il serait vain d'exiger une cinquième condition. Il faut donc résoudre, et c'est la résolution qui conclut.

La dérivabilité en 0. Supposons d'abord $b = 0$, faute de quoi f n'est même pas continue en 0. La dérivée à gauche est celle du sinus, soit $f'_g(0) = \cos 0 = 1$. La dérivée à droite se calcule sur la définition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a.$$

L'égalité des deux dérivées latérales s'écrit donc

$$a = 1.$$

La dérivabilité en 1. Supposons acquises les deux conditions de continuité. La dérivée à gauche est celle de la fonction affine, soit a ; la dérivée à droite est celle de $x \mapsto c \ln x + d$ en 1, soit $\frac{c}{1} = c$. L'égalité s'écrit

$$c = a.$$

La résolution. Le système des quatre conditions est

$$b = 0, \quad d = a + b, \quad a = 1, \quad c = a.$$

Il se résout de proche en proche : $a = 1$, puis $c = 1$, puis $b = 0$, puis $d = a + b = 1$. La solution existe et elle est **unique** :

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = 1. \quad \square$$

Méthode

Le comptage des degrés de liberté, et son usage honnête. Devant un recollement paramétré, on écrit systématiquement, avant tout calcul :

nombre de paramètres contre *nombre de conditions* = $2 \times$ (nombre de points de jonction) pour la dérivabilité, dont la moitié pour la continuité.

Ici : 4 contre 4. Trois lectures possibles.

- **Moins de conditions que de paramètres** : il restera des familles de solutions, et l'énoncé demandera souvent d'en décrire une.
- **Autant** : on peut espérer une solution unique, et c'est la situation la plus fréquente en partiel.
- **Plus de conditions que de paramètres** : il n'y a en général **aucune** solution, et c'est précisément ce qui va se produire à la question 5.

Ce comptage oriente le travail et permet de repérer une réponse absurde ; il ne remplace jamais la résolution, parce qu'il ignore la nature des équations.

4. La fonction obtenue

Avec les valeurs trouvées,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 < x < 1, \\ \ln x + 1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

et sa dérivée est

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On notera que $f'(0) = 1$ et $f'(1) = 1$ sont des valeurs **démontrées** à la question 3, et non lues sur une ligne du tableau : c'est l'égalité des deux dérivées latérales qui les fournit.

La continuité de f' . Sur chacun des trois ouverts, f' coïncide avec une fonction continue. En 0 : à gauche $\cos x \rightarrow 1$, à droite la constante 1, et $f'(0) = 1$; les trois quantités coïncident. En 1 : à gauche la constante 1, à droite $\frac{1}{x} \rightarrow 1$, et $f'(1) = 1$; de même. Donc f' est continue sur $\mathbb{R}$, autrement dit f est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur $\mathbb{R}$.

5. Deux fois dérivable : non, et voici pourquoi

Le comptage d'abord. Les quatre paramètres sont désormais **entièrement déterminés** : il ne reste aucun degré de liberté. Exiger en plus l'existence de $f''(0)$ et de $f''(1)$, c'est ajouter deux conditions à un système qui n'a plus rien à donner. Le comptage annonce donc un échec probable, mais il n'en dit pas plus : il se peut très bien qu'une condition supplémentaire soit **satisfaite par chance**. C'est justement ce qui va arriver à l'une des deux jonctions, et c'est pourquoi il faut les examiner séparément.

En 0, la condition passe. La fonction f' vaut $\cos x$ pour $x < 0$ et 1 pour $0 \leq x < 1$, avec $f'(0) = 1$. À gauche,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

puisque ce quotient est le taux d'accroissement du cosinus en 0, dont la limite est $\cos'(0) = -\sin 0 = 0$. À droite, le quotient est identiquement nul. Les deux dérivées latérales de f' en 0 existent et valent 0 : la fonction f est donc **deux fois dérivable en 0**, avec $f''(0) = 0$.

En 1, la condition tombe. La fonction f' vaut 1 pour $0 \leq x < 1$ et $\frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$, avec $f'(1) = 1$. À gauche, le taux d'accroissement de f' est identiquement nul, donc $(f')'_g(1) = 0$. À droite, pour $x > 1$,

$$\frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{\frac{1 - x}{x}}{x - 1} = -\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} -1.$$

Les deux dérivées latérales de f' en 1 existent, valent 0 et -1 , et **diffèrent** : f' n'est pas dérivable en 1, donc f n'est pas deux fois dérivable en 1.

Conclusion. Il est impossible d'imposer que f soit deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$: les paramètres qui rendent f dérivable sont uniques, et pour ces valeurs la dérivée seconde n'existe pas en 1. Il n'y a aucun choix à faire, donc rien à rattraper. $\square$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et sa dérivée f' présente en 1 un **point anguleux** : elle y raccorde un palier horizontal et une branche d'hyperbole de pente -1 .

Remarque

Ce qui aurait pu sauver la jonction en 1. Il aurait fallu un paramètre de plus, c'est-à-dire un morceau central plus riche. En remplaçant $ax + b$ par un trinôme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, on disposerait de cinq paramètres pour six conditions : encore une de trop. Avec un polynôme de degré 3 sur le morceau central, on aurait six paramètres pour six conditions, et le comptage redeviendrait favorable. C'est exactement le principe des raccords polynomiaux utilisés pour tracer des courbes lisses, et c'est ce même comptage qui décide du degré à choisir.

Commentaire

Trois choses distinguent ce recollement d'un recollement en un seul point, et ce sont les trois endroits où une copie perd des points.

La continuité se traite en premier, et pour toutes les jonctions à la fois. Il est tentant de foncer sur les dérivées latérales, qui sont le vrai sujet ; mais une dérivée latérale ne se calcule sur le quotient $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ qu'à condition que le numérateur tende vers 0. Sans $b = 0$, le calcul de la dérivée à droite en 0 donne $a + \frac{b}{x}$, qui n'a pas de limite finie : on aurait conclu « non dérivable » sans savoir pourquoi.

Les conditions ne sont pas indépendantes de point en point. Le paramètre a intervient à la fois en 0, par la dérivée à droite, et en 1, par la continuité et la dérivée à gauche : c'est le morceau central qui fait le lien. Traiter les deux jonctions comme deux exercices sans rapport conduit à écrire deux fois la même contrainte, ou à en oublier une.

Le comptage remplace l'intuition, pas la démonstration. Il dit où l'on va, il permet de flairer l'impasse de la question 5, et il évite de chercher longtemps une solution qui n'existe pas. Mais la question 5 montre aussi sa limite : à 0, la condition surnuméraire était vérifiée, et seul le calcul pouvait le dire.

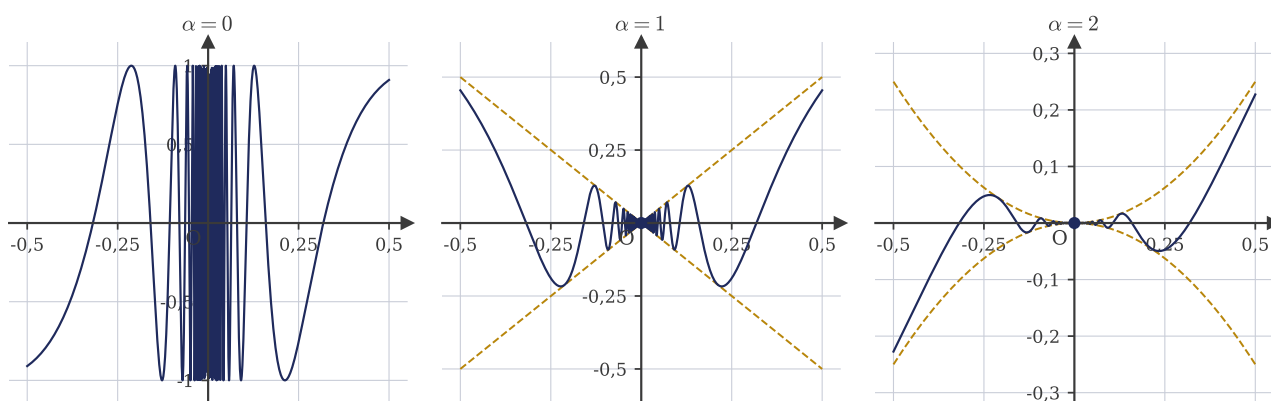
Exercice 4 ★★★ La famille x puissance alpha sinus de un sur x

Notions : Dérivées à gauche et à droite, point anguleux, tangente verticale, fonctions définies par morceaux, Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité, Théorème de la limite de la dérivée et théorème de Darboux

Pour un entier naturel α , on note f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x},$$

prolongée en 0 par $f_\alpha(0) = 0$. On étudie ce qui se passe **quand α augmente** : chaque question a pour réponse un seuil sur α , et les trois seuils sont différents.



1. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle **continue en 0** ? Dans le cas où elle ne l'est pas, on exhibera deux suites de réels non nuls tendant vers 0 le long desquelles f_α prend des valeurs de limites différentes.
2. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle **dérivable en 0** ? Donner alors $f'_\alpha(0)$.
3. Calculer $f'_2(x)$ pour $x \neq 0$, puis démontrer que f'_2 **n'a pas de limite en 0**. On donnera explicitement deux suites (x_n) et (y_n) de réels non nuls tendant vers 0 telles que $f'_2(x_n)$ et $f'_2(y_n)$ tendent vers deux valeurs différentes.
4. Conclure : que peut-on dire de f_2 sur $\mathbb{R}$, et que ne peut-on pas en dire ? Préciser quel énoncé du cours cet exemple met en défaut, et dans quel sens exactement.
5. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle de **classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$** ?

Corrigé

Ce que la figure montre, avant tout calcul

Les trois panneaux représentent f_0 , f_1 et f_2 au voisinage de 0. Sur les deux derniers, on a tracé en pointillés les courbes $x \mapsto |x|^\alpha$ et $x \mapsto -|x|^\alpha$, qu'on appelle les **enveloppes**.

Le facteur $\sin \frac{1}{x}$ oscille indéfiniment entre -1 et 1 quand x tend vers 0, et ces oscillations ne s'arrêtent jamais : elles se resserrent. Ce qui change d'un panneau à l'autre, c'est uniquement le facteur x^α , qui **écrase** ces oscillations d'autant plus fort que α est grand. Pour $\alpha = 0$, il n'écrase rien du tout ; pour $\alpha = 1$, l'oscillation est prise entre deux droites qui se rejoignent en 0 ; pour $\alpha = 2$, entre deux paraboles.

Toute la suite consiste à traduire ce mot « écraser » en trois exigences de plus en plus fortes : assez pour que la fonction ait une limite, assez pour que son taux d'accroissement en ait une, assez pour que sa dérivée en ait une.

1. La continuité en 0

Le cas $\alpha \geq 1$. Pour tout $x \neq 0$, comme $|\sin t| \leq 1$ pour tout réel t ,

$$|f_\alpha(x)| = |x|^\alpha \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|^\alpha.$$

Comme $\alpha \geq 1$, la quantité $|x|^\alpha$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par encadrement, $f_\alpha(x) \rightarrow 0 = f_\alpha(0)$: la fonction f_α est **continue en 0**.

C'est exactement ce que dit la figure : la courbe est coincée entre les deux enveloppes, qui se rejoignent à l'origine.

Le cas $\alpha = 0$. Alors $f_0(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f_0(0) = 0$. Posons, pour $n \geq 1$,

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Ces deux suites sont formées de réels **non nuls** et tendent vers 0. Or

$$f_0(x_n) = \sin(2n\pi) = 0 \quad \text{et} \quad f_0(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

Les deux suites images sont constantes, de limites 0 et 1. Si f_0 avait une limite ℓ en 0, la caractérisation séquentielle de la limite, acquise au chapitre précédent, donnerait $\ell = 0$ et $\ell = 1$, ce qui contredit l'unicité de la limite. Donc f_0 **n'a pas de limite en 0**, et en particulier elle n'y est pas continue.

Conclusion. La fonction f_α est continue en 0 si et seulement si $\alpha \geq 1$. $\square$

2. La dérivabilité en 0

Ici comme partout, on revient à la définition, puisque 0 est le point où aucune formule d'opération ne s'applique. Pour $x \neq 0$, en utilisant $f_\alpha(0) = 0$,

$$\tau_0(x) = \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{x} = x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}.$$

La simplification est licite puisque $x \neq 0$. **Le taux d'accroissement de f_α est donc $f_{\alpha-1}$** — c'est la remarque qui fait tout le travail : la question 2 est la question 1 posée un cran plus bas. D'après ce qui précède, ce taux tend vers 0 si $\alpha - 1 \geq 1$, et n'a pas de limite si $\alpha - 1 = 0$. Reste le cas $\alpha = 0$, où le taux vaut $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$: le long de la suite (y_n) ci-dessus, il vaut $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, qui tend vers $+\infty$, donc il n'a pas de limite finie.

Conclusion. La fonction f_α est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha \geq 2$, et alors

$$f'_\alpha(0) = 0. \quad \square$$

Les deux premiers seuils sont donc distincts : f_1 est continue en 0 sans y être dérivable. Sur la figure, le panneau $\alpha = 1$ montre pourquoi : la courbe atteint bien l'origine, mais elle y arrive en oscillant entre deux droites de pentes 1 et -1 , sans jamais se décider pour une direction. Il n'y a pas de tangente.

3. La dérivée de f_2 hors de 0, et son absence de limite

Le calcul. Soit $x \neq 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $-\frac{1}{x^2}$; le sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$: par composition, $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$. La formule du produit donne alors

$$f'_2(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Les deux suites. Posons, pour $n \geq 1$,

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}.$$

Ce sont des réels non nuls, et tous deux tendent vers 0. On calcule :

$$f'_2(x_n) = 2x_n \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = 0 - 1 = -1,$$

$$f'_2(y_n) = 2y_n \sin((2n+1)\pi) - \cos((2n+1)\pi) = 0 - (-1) = 1.$$

Les deux suites images sont constantes, égales à -1 et à 1 .

La conclusion. Si f'_2 admettait une limite ℓ en 0, la caractérisation séquentielle donnerait $\ell = -1$ et $\ell = 1$, ce qui est absurde. Donc f'_2 **n'a pas de limite en 0**. $\square$

Remarque

Le terme coupable est identifié. Dans l'expression de f'_2 , le premier terme $2x \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0, par le même encadrement qu'à la question 1. C'est le second, $-\cos \frac{1}{x}$, qui interdit toute limite : il oscille entre -1 et 1 **sans être multiplié par quoi que ce soit qui l'écrase**. La dérivation a fait apparaître un facteur $\frac{1}{x^2}$ qui a mangé deux des puissances de x disponibles ; c'est le mécanisme général de cette famille, et il explique tous les seuils rencontrés.

4. Ce que l'exemple f_2 démontre

Ce qu'on peut dire. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par les opérations, comme on vient de le voir, et dérivable en 0 d'après la question 2 avec $f'_2(0) = 0$. Elle est donc **dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier**, et sa dérivée est définie partout :

$$f'_2(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \quad f'_2(0) = 0.$$

Ce qu'on ne peut pas dire. Cette dérivée n'a pas de limite en 0, donc elle n'y est pas continue. La fonction f_2 n'est **pas de classe $\mathcal{C}^1$** sur $\mathbb{R}$, bien qu'elle soit dérivable partout. L'inclusion des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans les fonctions dérivables est donc **stricte**, et f_2 en est le témoin.

L'énoncé mis en défaut, et dans quel sens. Le théorème de la limite de la dérivée (section 17 du cours) affirme ceci : si f est continue sur un intervalle I , dérivable sur I privé d'un point a , et si $f'(x)$ tend vers un réel ℓ quand $x \rightarrow a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Ce théorème donne une condition **suffisante** de dérivabilité en a . La fonction f_2 montre qu'elle n'est **pas nécessaire** : f_2 est dérivable en 0, et pourtant f'_2 n'a aucune limite en 0. La réciproque du théorème est donc fausse, et c'est précisément ce que cet exemple établit. $\square$

Méthode

La faute que cet exemple interdit à jamais. En voyant que $f'(x)$ n'a pas de limite en a , on ne conclut **jamais** que f n'est pas dérivable en a . Le théorème de la limite de la dérivée ne se lit que dans un sens.

Ce qu'on écrit quand la limite existe : « f est continue en a , dérivable au voisinage de a sauf peut-être en a , et $f'(x) \rightarrow \ell$; d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. »

Ce qu'on écrit quand elle n'existe pas : rien de ce théorème. On **revient au taux d'accroissement**, qui est la seule définition de la dérivabilité en un point, et on conclut avec lui. C'est ce qu'a fait la question 2, et c'est ce qui a permis de trouver $f'_2(0) = 0$ alors qu'aucun théorème général ne le donnait.

5. Le seuil de la classe $\mathcal{C}^1$

Soit $\alpha \geq 2$, de sorte que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2. Le même calcul qu'à la question 3, mené avec un exposant quelconque, donne pour $x \neq 0$

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x},$$

et $f'_\alpha(0) = 0$. Être de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est exactement demander que f'_α soit continue en 0, les autres points ne posant aucun problème.

Si $\alpha \geq 3$. Alors $\alpha - 1 \geq 2$ et $\alpha - 2 \geq 1$, donc

$$|f'_\alpha(x)| \leq \alpha |x|^{\alpha-1} + |x|^{\alpha-2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par encadrement, $f'_\alpha(x) \rightarrow 0 = f'_\alpha(0)$: la dérivée est continue en 0, donc f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Si $\alpha = 2$. C'est la question 3 : la dérivée n'a pas de limite en 0, donc f_2 n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\alpha \leq 1$. La fonction n'est même pas dérivable en 0, la question ne se pose pas.

Conclusion. La fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha \geq 3$. $\square$

α	continue en 0	dérivable en 0	de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
0	non	non	non
1	oui	non	non
2	oui	oui, $f'_2(0) = 0$	non
$\alpha \geq 3$	oui	oui, $f'_\alpha(0) = 0$	oui

Remarque

Le mécanisme se poursuit. Chaque dérivation fait perdre deux puissances de x , à cause du facteur $\frac{1}{x^2}$ venu de la dérivée de $\frac{1}{x}$. En dérivant une fois de plus l'expression de f'_α , on voit apparaître un terme en $x^{\alpha-4} \sin \frac{1}{x}$, qui est le plus dangereux : la fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ dès que $\alpha \geq 5$, par le même argument d'encadrement. Les seuils ne sont donc pas des accidents, mais ils ne forment pas non plus une seule suite : ils s'organisent en **deux** suites de raison 2, entrelacées. La fonction f_α est k fois dérivable dès que $\alpha \geq 2k$, et de classe $\mathcal{C}^k$ dès que $\alpha \geq 2k + 1$. On retrouve 1 pour la continuité, 2 pour la dérivabilité, 3 pour la classe $\mathcal{C}^1$, 4 pour la dérivabilité seconde et 5 pour la classe $\mathcal{C}^2$: les entiers défilent un par un parce qu'on lit alternativement les deux suites. Cette famille permet ainsi de fabriquer, pour chaque k , une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^{k+1}$: il suffit de prendre $\alpha = 2k + 1$.

Commentaire

Trois témoins classiques montrent chacun une façon de ne pas être dérivable : la valeur absolue en 0, avec ses deux dérivées latérales distinctes ; la racine cubique en 0, avec sa tangente verticale ; et $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, qui n'a même pas de limite. Cet exercice ne les prend pas un par un : il fait **varier un paramètre** et regarde les seuils tomber, ce qui donne quelque chose qu'aucun témoin isolé ne donne, à savoir la séparation nette de quatre propriétés qu'on confond volontiers.

Le résumé tient en une chaîne d'implications strictes, illustrée par la famille elle-même :

$$\text{de classe } \mathcal{C}^1 \implies \text{dérivable} \implies \text{continue},$$

avec f_2 qui réfute la réciproque de la première implication, et f_1 celle de la seconde.

Il reste une leçon de méthode, qui vaut bien au-delà de cette famille. Aux trois questions, la réponse s'est obtenue par **le même encadrement**, $|x^\beta \sin \frac{1}{x}| \leq |x|^\beta$, appliqué à trois expressions

différentes : la fonction, son taux d'accroissement, sa dérivée. Et à chaque fois que la conclusion était négative, elle s'est démontrée par **deux suites**, jamais par la phrase « la limite n'existe pas parce que ça oscille ». Une oscillation qui n'a pas produit deux suites explicites n'a rien démontré du tout.

Exercice 5 ★ Dix dérivées, et les domaines qui vont avec

Notions : Opérations sur les dérivées : somme, produit, quotient, composée

Pour chacune des dix fonctions ci-dessous, on demande **le couple** formé par son ensemble de définition D_f et son ensemble de dérivabilité $D_{f'}$, puis l'expression de la dérivée sur $D_{f'}$.

La dérivée n'est donc pas le but : elle est le moyen. Ce qui est évalué, c'est le couple $(D_f, D_{f'})$, et **chaque inclusion stricte** $D_{f'} \subsetneq D_f$ **doit être justifiée**, c'est-à-dire qu'il faut dire ce qui se passe aux points de D_f qui ne sont pas dans $D_{f'}$.

Conventions de notation, à lire avant de commencer, car deux items en dépendent :

- pour un exposant réel β quelconque, x^β désigne $e^{\beta \ln x}$, qui n'a de sens que pour $x > 0$;
- en revanche $x^{1/3}$ désigne la **racine cubique**, réciproque de $x \mapsto x^3$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $x^{2/3}$ désigne $(x^{1/3})^2$, également définie sur $\mathbb{R}$;
- $\log_3$ est le logarithme de base 3, c'est-à-dire $\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$.

a. $x \mapsto x^{\sqrt{2}}$

f. $x \mapsto x^{2/3}$

b. $x \mapsto 2^x$

g. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

c. $x \mapsto \log_3 x$

h. $x \mapsto x^{1/x}$

d. $x \mapsto x^{1/3}$

i. $x \mapsto \frac{\ln x}{1 + \ln x}$

e. $x \mapsto |x|^3$

j. $x \mapsto (1 + x^2)^{\sin x}$

Corrigé

Méthode

Comment on rédige un couple $(D_f, D_{f'})$. Quatre gestes, dans cet ordre.

1. **Ramener toute puissance à une exponentielle.** Une écriture u^v , où l'exposant n'est pas un entier fixé, se réécrit $e^{v \ln u}$: c'est la seule forme sur laquelle on sait dériver, et c'est aussi elle qui donne la condition $u > 0$.
2. **Déterminer D_f ,** en listant les conditions : ce qui doit être strictement positif sous un logarithme, ce qui ne doit pas s'annuler au dénominateur.
3. **Déterminer $D_{f'}$,** qui est contenu dans D_f et jamais l'inverse. On l'obtient en appliquant les théorèmes d'opérations sur les intervalles ouverts où toutes les hypothèses sont réunies. Les points suspects sont toujours les mêmes : ceux où une racine, une puissance non entière ou une valeur absolue s'annule.
4. **Traiter à la main les points de $D_f \setminus D_{f'}$,** s'il y en a, en calculant le taux d'accroissement. Tant que ce calcul n'est pas fait, on ne sait pas si le point manque à $D_{f'}$ ou s'il y appartient.

L'erreur à éviter est de confondre les deux ensembles, ou de croire que le second est automatiquement le premier privé de quelques points. Sur les dix items ci-dessous, huit fois ils sont égaux, et deux fois seulement l'inclusion est stricte. Les huit égalités se démontrent aussi : « toutes les hypothèses des théorèmes d'opérations sont vérifiées sur D_f » est une justification, « il n'y a pas de problème » n'en est pas une.

a. La puissance d'exposant $\sqrt{2}$

Posons $f(x) = x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln x}$. Le logarithme impose $x > 0$, donc $D_f =]0, +\infty[$.

Sur cet intervalle, f est la composée de $x \mapsto \sqrt{2}\ln x$, dérivable sur $]0, +\infty[$, et de l'exponentielle, dérivable sur $\mathbb{R}$: la **formule de la composée** s'applique en tout point de D_f , donc $D_{f'} =]0, +\infty[= D_f$. Elle donne

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x} e^{\sqrt{2}\ln x} = \frac{\sqrt{2}}{x} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}.$$

C'est la ligne des puissances réelles du tableau des dérivées usuelles, retrouvée sur un cas particulier, et l'on voit au passage pourquoi cette ligne est limitée à $]0, +\infty[$: c'est le domaine du logarithme qui la contraint, pas la formule finale.

b. L'exponentielle de base 2

Posons $f(x) = 2^x = e^{x\ln 2}$. Ici, $\ln 2$ est une **constante** et l'exposant est x : aucune condition n'est imposée, donc $D_f = \mathbb{R}$.

Par la formule de la composée avec la fonction affine $x \mapsto x \ln 2$, on a $D_{f'} = \mathbb{R} = D_f$ et

$$f'(x) = \ln 2 \times e^{x\ln 2} = (\ln 2) 2^x.$$

Le contraste avec l'item a mérite d'être noté : les deux fonctions s'écrivent avec les mêmes symboles, et pourtant l'une est définie sur une demi-droite et l'autre sur $\mathbb{R}$. Ce qui décide, c'est **où se trouve la variable** : sous le logarithme dans l'item a, en facteur devant lui dans l'item b.

c. Le logarithme de base 3

Posons $f(x) = \log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$. Comme $\ln 3$ est une constante non nulle, f est le produit de $\ln$ par la constante $\frac{1}{\ln 3}$: donc $D_f = D_{f'} =]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}.$$

Il n'y a **pas** de formule nouvelle à retenir : un logarithme de base quelconque est un multiple du logarithme népérien.

d. La racine cubique

Posons $f(x) = x^{1/3}$, réciproque de $x \mapsto x^3$. Cette réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, puisque $x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: donc $D_f = \mathbb{R}$.

La dérivabilité s'obtient par le **théorème de la dérivée d'une réciproque**, qui exige que la dérivée de $x \mapsto x^3$, soit $3x^2$, ne s'annule pas au point considéré : elle ne s'annule qu'en 0. On obtient donc $D_{f'} = \mathbb{R}^*$, avec

$$f'(x) = \frac{1}{3(x^{1/3})^2} = \frac{1}{3} x^{-2/3}.$$

Le détail de ce calcul est conduit à l'exercice 06, où la formule est établie pour tout exposant $\frac{1}{n}$.

L'inclusion est stricte, et voici pourquoi. En 0, le taux d'accroissement vaut, pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{1/3}}{x} = \frac{1}{x^{2/3}},$$

et $x^{2/3} > 0$ tend vers 0 quand x tend vers 0 : le taux tend vers $+\infty$. La fonction n'est donc pas dérivable en 0, et sa courbe y présente une **tangente verticale**.

e. Le cube de la valeur absolue

Posons $f(x) = |x|^3$. La valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exposant est l'entier 3 : aucune condition, $D_f = \mathbb{R}$.

Explicitons pour se débarrasser de la valeur absolue : $f(x) = x^3$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = -x^3$ pour $x < 0$. Sur chacun des deux ouverts $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$, f coïncide avec un polynôme, donc y est dérivable, avec $f'(x) = 3x^2$ à droite et $f'(x) = -3x^2$ à gauche.

Le point 0, qu'il faut traiter. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|^3}{x} = x^2 \times \frac{|x|}{x},$$

et ce produit est majoré en valeur absolue par x^2 , puisque $\frac{|x|}{x}$ vaut ± 1 . Il tend donc vers 0 : la fonction **est** dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.

Ainsi $D_{f'} = \mathbb{R} = D_f$, et les trois cas se résument en une seule formule :

$$f'(x) = 3x|x|.$$

Le réflexe « valeur absolue donc non dérivable » est ici en défaut, et il fallait le calcul pour le voir. Signalons au passage que f' vaut $3u$, où $u : x \mapsto x|x|$ est la fonction étudiée à l'exercice 01 : elle est donc elle-même dérivable en 0, avec $f''(0) = 0$. En revanche $f''(x) = 6|x|$ n'est pas dérivable en 0 : cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et pas $\mathcal{C}^3$.

f. La puissance $\frac{2}{3}$

Posons $f(x) = x^{2/3} = (x^{1/3})^2$, définie sur $\mathbb{R}$ par la convention de l'énoncé : $D_f = \mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}^*$, f est le carré de la racine cubique, dérivable d'après l'item d : la formule du produit, ou celle de la composée, donne

$$f'(x) = 2x^{1/3} \times \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

Le point 0. Pour $x \neq 0$, le taux d'accroissement vaut $\frac{x^{2/3}}{x} = x^{-1/3}$, c'est-à-dire $\frac{1}{x^{1/3}}$. Quand $x \rightarrow 0^+$, il tend vers $+\infty$; quand $x \rightarrow 0^-$, la racine cubique est négative et il tend vers $-\infty$. La fonction n'est pas dérivable en 0, donc $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ et l'inclusion est stricte.

La différence avec l'item d se lit sur ces deux limites. Pour la racine cubique, le taux tendait vers $+\infty$ des **deux** côtés : la courbe traverse le point avec une tangente verticale. Ici les deux limites sont infinies **de signes contraires** : les deux demi-branches arrivent en 0 tangentiellement à l'axe des ordonnées mais en venant du même côté, et la courbe présente un **point de rebroussement**. La première situation, la tangente verticale traversée, est décrite en section 5 du cours ; la seconde, le point de rebroussement, s'en déduit par le même calcul de limites latérales, avec des signes opposés. Les deux ne se distinguent que par ce calcul.

g. La tangente hyperbolique

Posons $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, qui est la fonction th. Le dénominateur est une somme de deux exponentielles, donc **strictement positif** pour tout réel x : il ne s'annule jamais, et $D_f = \mathbb{R}$. La **formule du quotient** s'applique donc partout, avec $u(x) = e^x - e^{-x}$ et $v(x) = e^x + e^{-x}$, qui vérifient $u' = v$ et $v' = u$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{v^2 - u^2}{v^2}.$$

Le numérateur se factorise :

$$v^2 - u^2 = (v - u)(v + u) = (2e^{-x})(2e^x) = 4.$$

Donc $D_{f'} = \mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - f(x)^2,$$

la seconde écriture s'obtenant en repartant de $\frac{v^2 - u^2}{v^2} = 1 - \frac{u^2}{v^2}$. C'est la ligne $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$ du tableau des dérivées usuelles.

h. La fonction $x \mapsto x^{1/x}$

Posons $f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Il faut $x > 0$ pour le logarithme, ce qui assure du même coup $x \neq 0$ au dénominateur : $D_f =]0, +\infty[$.

L'exposant $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ est dérivable sur D_f par la formule du quotient :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Par composition avec l'exponentielle, $D_{f'} =]0, +\infty[= D_f$ et

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} x^{1/x}.$$

La dérivée s'annule pour $\ln x = 1$, soit $x = e$: c'est là que cette fonction atteint son maximum, ce qui ne se devinait pas sur son écriture.

i. Un quotient de logarithmes

Posons $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$. Deux conditions : $x > 0$ pour le logarithme, et $1 + \ln x \neq 0$ pour le quotient, c'est-à-dire $\ln x \neq -1$, soit $x \neq e^{-1}$. Donc

$$D_f =]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[.$$

La formule du quotient s'applique en tout point de D_f , donc $D_{f'} = D_f$, et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(1 + \ln x) - \ln x \times \frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x}[(1 + \ln x) - \ln x]}{(1 + \ln x)^2} = \frac{1}{x(1 + \ln x)^2}. \end{aligned}$$

Deux remarques. D'abord, D_f n'est **pas un intervalle** : c'est une réunion de deux intervalles, et il faut l'écrire comme telle. Cela aura des conséquences dès que l'on voudra parler de variations, car les théorèmes qui relient le signe de f' à la monotonie exigent un intervalle — c'est le piège signalé en section 15 du cours. Ensuite, f' est ici strictement positive sur tout D_f , sans que f soit croissante sur D_f : elle l'est sur chacun des deux morceaux séparément, et c'est tout ce qu'on peut dire.

j. Une puissance dont la base et l'exposant varient

Posons $f(x) = (1 + x^2)^{\sin x} = e^{\sin x \ln(1+x^2)}$. La base $1 + x^2$ est strictement positive pour tout réel x : aucune condition, $D_f = \mathbb{R}$.

L'exposant $g(x) = \sin x \ln(1 + x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de $\sin$ et de la composée $x \mapsto \ln(1 + x^2)$, cette dernière étant dérivable puisque $1 + x^2 > 0$. La formule du produit donne

$$g'(x) = \cos x \ln(1 + x^2) + \sin x \times \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Par composition avec l'exponentielle, $D_{f'} = \mathbb{R} = D_f$ et

$$f'(x) = (1 + x^2)^{\sin x} \left[\cos x \ln(1 + x^2) + \frac{2x \sin x}{1 + x^2} \right].$$

Ce qu'il ne faut surtout pas faire : appliquer la formule $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$, qui suppose l'exposant **constant**, ni la formule $(a^u)' = (\ln a) a^u u'$, qui suppose la base constante. Ici les deux varient, et la seule voie est le passage à l'exponentielle, qui les traite d'un coup.

Le bilan des dix couples

Fonction	D_f	$D_{f'}$
$x^{\sqrt{2}}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
2^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\log_3 x$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
$x^{1/3}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$ x ^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^{2/3}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^{1/x}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
$\frac{\ln x}{1 + \ln x}$	$]0, \frac{1}{e}[\cup] \frac{1}{e}, +\infty[$	idem
$(1 + x^2)^{\sin x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Commentaire

Deux inclusions strictes sur dix, et ce sont les deux items où une **puissance non entière s'annule** : la racine cubique en 0, et son carré. Partout ailleurs, les théorèmes d'opérations couvrent tout l'ensemble de définition, et c'est le cas général — mais on ne le sait qu'après avoir regardé.

Les huit égalités ne se rédigent pas pour autant en une ligne vide. Ce qui les justifie, c'est la **liste des hypothèses vérifiées** : dénominateur non nul pour l'item **g**, base strictement positive pour l'item **j**, constante non nulle pour l'item **c**. C'est cette liste qui a de la valeur, parce que c'est elle qui manquerait si une hypothèse tombait.

Deux confusions d'écriture ont été rencontrées, et elles se paient cher en partiel.

L'exposant réel contre l'exposant entier. L'écriture x^β ne veut pas dire la même chose selon que β est un entier ou non : x^3 est défini sur $\mathbb{R}$, $x^{\sqrt{2}}$ sur $]0, +\infty[$, et $x^{1/3}$ sur $\mathbb{R}$ **par une autre définition**, celle de la réciproque. Écrire $(x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ pour $x < 0$ n'est correct que parce qu'on a pris la peine de dire ce que $x^{1/3}$ signifie pour x négatif.

La base contre l'exposant. Trois formules de dérivation cohabitent pour des écritures voisines : exposant constant, base constante, ou les deux variables. Devant une puissance, la question à se poser n'est pas « quelle formule » mais « qui varie », et la réponse dicte la formule. En cas d'hésitation, le passage à $e^{v \ln u}$ ne se trompe jamais : les trois formules en découlent.

Exercice 6 ★★ Dériver une réciproque, de l'arccosinus à la racine n-ième

Notions : Dérivée d'une fonction réciproque, Opérations sur les dérivées : somme, produit, quotient, composée

Toutes les fonctions réciproques de cet exercice ont été **construites au chapitre précédent** par le théorème de la bijection : leur existence et leur continuité sont acquises, et on ne les redémontre pas. Ce qui reste à faire, et qui est l'objet du chapitre, c'est de les **dériver**, au moyen du théorème de la section 8.

1. Arccosinus.

a. Rappeler la restriction du cosinus dont Arccos est la réciproque, et déterminer les points où la dérivée de cette restriction s'annule. En déduire l'ensemble des réels en lesquels le théorème de dérivation d'une réciproque s'applique.

b. Établir que $\text{Arccos}'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ pour tout $y \in]-1, 1[$. On détaillera la levée de la valeur absolue, qui est le seul point délicat.

c. Que peut-on dire de la courbe de Arccos aux deux points d'abscisses -1 et 1 ?

2. Le chapitre précédent a établi l'identité $\text{Arcsin } y + \text{Arccos } y = \frac{\pi}{2}$ pour tout $y \in [-1, 1]$. En déduire Arcsin' sur $] -1, 1[$, et dire ce que cette déduction suppose acquis.

3. **Racine n-ième.** Soit n un entier, $n \geq 2$, et $\varphi_n : x \mapsto x^n$ définie sur $[0, +\infty[$.

a. Justifier que φ_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, et nommer le théorème employé.

b. Démontrer, **par le théorème de dérivation d'une réciproque**, que la fonction $y \mapsto y^{1/n}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$(y^{1/n})' = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

On n'utilisera à aucun moment la formule des puissances réelles : c'est elle qu'on démontre, sur ces exposants.

c. En déduire, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, la dérivée de $x \mapsto x^{p/q}$ sur $]0, +\infty[$.

4. **Argument sinus hyperbolique.** La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque notée argsh. Établir que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\text{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Dire pourquoi, cette fois, aucune discussion de signe n'est nécessaire.

5. **Le point où la dérivée s'annule.** Le théorème exige $f'(a) \neq 0$.

a. Que dit-il, exactement, lorsque $f'(a) = 0$?

b. Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I , dérivable en un point a de I avec $f'(a) = 0$, et soit $b = f(a)$. Démontrer que f^{-1} n'est **pas** dérivable en b . On raisonnera par l'absurde, en dérivant l'identité $f^{-1} \circ f = \text{id}$.

c. Illustrer sur $f : x \mapsto x^5$, définie sur $\mathbb{R}$, et sur le point $a = 0$: retrouver le résultat par le calcul direct du taux d'accroissement de f^{-1} en 0, et décrire la courbe de f^{-1} en ce point.

Corrigé

1.a. Où le théorème s'applique

La fonction Arccos a été construite comme réciproque de la restriction du cosinus à $[0, \pi]$. Cette restriction est continue sur $[0, \pi]$ et strictement décroissante, car sa dérivée $-\sin$ est strictement

négative sur $]0, \pi[$; comme $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$, elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa réciproque va donc de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$.

La dérivée de cette restriction est $-\sin$, et $\sin \theta = 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$ si et seulement si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Les points à écarter sont donc les **images** de ces deux valeurs, à savoir

$$\cos 0 = 1 \quad \text{et} \quad \cos \pi = -1.$$

Le théorème de dérivation d'une réciproque s'applique donc en tout point y de l'**ouvert** $] -1, 1[$, et en ces points seulement. C'est l'étape que l'on saute le plus volontiers, et c'est elle qui décide du domaine de la formule finale.

1.b. Le calcul, et la levée de la valeur absolue

Soit $y \in] -1, 1[$ et posons $\theta = \text{Arccos } y$, de sorte que $\cos \theta = y$. Le théorème donne

$$\text{Arccos}'(y) = \frac{1}{\cos'(\theta)} = \frac{-1}{\sin \theta}.$$

Il reste à exprimer $\sin \theta$ en fonction de y , et c'est là que tout se joue. La relation fondamentale donne

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - y^2, \quad \text{donc} \quad |\sin \theta| = \sqrt{1 - y^2}.$$

Ce que l'on a obtenu est une valeur absolue, pas encore un sinus. Pour la lever, on utilise l'intervalle où vit θ , et lui seul : comme $y \in] -1, 1[$, on a $\theta \in]0, \pi[$, intervalle sur lequel le sinus est **strictement positif**. Donc $\sin \theta = +\sqrt{1 - y^2}$, et

$$\forall y \in] -1, 1[, \quad \text{Arccos}'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}. \quad \square$$

Le signe moins n'est pas une surprise : Arccos est strictement décroissante, comme réciproque d'une fonction strictement décroissante, donc sa dérivée doit être négative. C'est un contrôle de cohérence à faire systématiquement, et il coûte une demi-ligne.

1.c. Les deux extrémités

Quand y tend vers 1 par valeurs inférieures, $1 - y^2$ tend vers 0 en restant strictement positif, donc $\text{Arccos}'(y)$ tend vers $-\infty$; il en va de même quand y tend vers -1 par valeurs supérieures. La courbe de Arccos présente donc en ces deux points des **tangentes verticales**, et la fonction n'y est pas dérivable — ce dernier point sera démontré en toute généralité à la question **5.b**, dont ce cas est une application immédiate, puisque $\cos'(0) = 0$ et $\cos'(\pi) = 0$.

Géométriquement, c'est le reflet exact des deux tangentes **horizontales** du cosinus en 0 et en π : la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ échange les deux directions.

2. Arcsinus, retrouvé par l'identité

L'identité $\text{Arcsin } y + \text{Arccos } y = \frac{\pi}{2}$ vaut sur $[-1, 1]$. Sur $] -1, 1[$, les deux fonctions sont dérivables — Arccos par la question 1, Arcsin par le même raisonnement mené sur la restriction du sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ — donc on peut dériver les deux membres. La dérivée d'une constante étant nulle,

$$\text{Arcsin}'(y) + \text{Arccos}'(y) = 0, \quad \text{donc} \quad \text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Ce que cette déduction suppose acquis, et qu'il faut dire : d'une part l'identité elle-même, qui vient du chapitre précédent ; d'autre part la **dérivabilité de Arcsin** sur $] -1, 1[$, sans laquelle on n'aurait pas le droit de dériver le premier membre. Une identité ne donne jamais la dérivabilité, elle ne fait que relier deux dérivées quand les deux existent déjà.

3.a. La bijection

La fonction $\varphi_n : x \mapsto x^n$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme fonction polynomiale, et strictement croissante sur cet intervalle : sa dérivée $\varphi'_n(x) = nx^{n-1}$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$, et le critère de stricte monotonie de la section 15 s'applique. Enfin $\varphi_n(0) = 0$ et $\varphi_n(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Le **théorème de la bijection** du chapitre précédent donne donc que φ_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, et que sa réciproque, notée $y \mapsto y^{1/n}$, est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

3.b. La dérivée, obtenue par le théorème

Notons $g(y) = y^{1/n}$ cette réciproque. Soit $y > 0$ et posons $a = g(y)$, de sorte que $a > 0$ et $a^n = y$.

Comme $a > 0$, on a $\varphi'_n(a) = na^{n-1} \neq 0$: l'hypothèse du théorème est vérifiée. Il donne donc que g est dérivable en y , avec

$$g'(y) = \frac{1}{\varphi'_n(a)} = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}}.$$

Reste à simplifier ce dénominateur, **et c'est ici qu'il faut prendre garde à ne rien postuler**. On n'utilise qu'une seule chose, à savoir la définition de g , qui donne $(y^{1/n})^n = y$. Alors

$$(y^{1/n})^{n-1} = \frac{(y^{1/n})^n}{y^{1/n}} = \frac{y}{y^{1/n}} = y^{1-\frac{1}{n}},$$

la dernière égalité étant le quotient de deux puissances réelles de $y > 0$, licite puisque $y^\beta = e^{\beta \ln y}$ pour $y > 0$. En reportant,

$$g'(y) = \frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}. \quad \square$$

Ce que cette démonstration établit vraiment. La formule $(x^\beta)' = \beta x^{\beta-1}$ est écrite dans le tableau des dérivées usuelles pour tout exposant réel, et son cas général se démontre en dérivant $e^{\beta \ln x}$. Ce qu'on vient de faire est différent et plus instructif : on a obtenu la formule **sans jamais l'utiliser**, à partir du seul théorème sur les réciproques. C'est une vérification de cohérence de la théorie, et c'est le seul chemin disponible si l'on veut la formule pour la racine n -ième avant d'avoir défini les puissances réelles.

3.c. Les exposants rationnels

Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Sur $]0, +\infty[$, on écrit

$$x^{p/q} = (x^{1/q})^p.$$

La fonction $x \mapsto x^{1/q}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **3.b**, et elle y prend des valeurs **strictement positives**, donc en particulier non nulles : la formule de la puissance entière, valable sur $\mathbb{R}^*$ pour un exposant de $\mathbb{Z}$, s'applique à la composée. La formule de la composée donne alors

$$\begin{aligned} (x^{p/q})' &= p(x^{1/q})^{p-1} \times \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}, \end{aligned}$$

en additionnant les exposants : $\frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q} - 1$. $\square$

Remarque

Le cas des racines d'indice impair, et des x négatifs. Tout ce qui précède se passe sur $]0, +\infty[$, parce que la bijection de départ était posée sur $[0, +\infty[$. Quand n est **impair**, la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, et le même théorème, appliqué en un point $a \neq 0$, donne la dérivabilité de la réciproque en tout point non nul. C'est ce que fait le cours en section 8 sur l'exemple de la racine cubique, et c'est ce qui justifie la ligne $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ de l'exercice 05.

Pour n **pair**, la question ne se pose pas : $x \mapsto x^n$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, et il n'y a pas de réciproque à dériver.

4. Argument sinus hyperbolique

La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée ch, et

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \geq 1 > 0$$

pour tout réel t — c'est une somme de deux exponentielles strictement positives, et l'on peut même préciser la minoration par 1. **La dérivée ne s'annule donc en aucun point**, et le théorème s'applique en tout point de $\mathbb{R}$, sans exclusion : argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $t = \operatorname{argsh} y$, de sorte que $\operatorname{sh} t = y$. Le théorème donne

$$\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

L'identité $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, établie au chapitre précédent, donne $\operatorname{ch}^2 t = 1 + y^2$, donc $|\operatorname{ch} t| = \sqrt{1 + y^2}$.

Aucune discussion de signe n'est nécessaire ici, et la raison est celle qu'on vient d'écrire : $\operatorname{ch} t > 0$ pour **tout** réel t , sans aucune restriction d'intervalle. La valeur absolue se lève donc immédiatement, alors que pour Arccos il fallait invoquer l'intervalle $]0, \pi[$, faute de quoi le sinus aurait pu être négatif. D'où

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}. \quad \square$$

5.a. Ce que dit le théorème quand $f'(a) = 0$

Il ne dit **rien du tout**. Une de ses hypothèses n'est pas vérifiée, donc sa conclusion n'est pas disponible : ni pour affirmer que f^{-1} est dérivable en b , ni pour affirmer qu'elle ne l'est pas. Un théorème dont une hypothèse tombe est un théorème muet, et c'est le point de logique le plus rentable de tout le chapitre.

Il faut donc autre chose pour conclure, et la question **5.b** le fournit.

5.b. La réciproque n'est alors jamais dérivable

Soient f , I , a et $b = f(a)$ comme dans l'énoncé, et notons $g = f^{-1}$, définie sur $J = f(I)$. Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I , elle réalise une bijection de I sur J , et l'on a

$$\forall x \in I, \quad g(f(x)) = x.$$

Raisonnons par l'absurde et **supposons g dérivable en b** . Alors la formule de la composée s'applique en a : la fonction f est dérivable en a , et g est dérivable en $f(a) = b$. Elle donne

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \times f'(a) = g'(b) \times 0 = 0.$$

Mais $g \circ f$ est la fonction identité sur I , dont la dérivée vaut 1 en tout point. On obtient donc $0 = 1$, ce qui est absurde.

Par conséquent $g = f^{-1}$ **n'est pas dérivable en b** . $\square$

Ce que ce résultat complète. Le théorème de la section 8 dit : $f'(a) \neq 0$ entraîne f^{-1} dérivable en b . La question 5.b dit : $f'(a) = 0$ entraîne f^{-1} **non** dérivable en b . Les deux ensemble forment une équivalence, et il n'y a plus de cas douteux. On notera que la démonstration ne dit rien de la **continuité** de f^{-1} en b , qui reste vraie : elle vient du théorème de la bijection, et elle est ce qui permet de parler de la courbe de f^{-1} au voisinage de ce point.

5.c. L'exemple de $x \mapsto x^5$

La fonction $f : x \mapsto x^5$ est continue sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée $f'(x) = 5x^4$ est positive, nulle **au seul point** 0 : d'après le critère de la section 15, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $\pm\infty$ étant $\pm\infty$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, dont la réciproque g est continue et strictement croissante.

Comme $f'(0) = 0$, la question 5.b s'applique avec $a = 0$ et $b = f(0) = 0$: la fonction g n'est pas dérivable en 0. Retrouvons-le par le calcul direct, ce qui donnera en plus l'allure de la courbe. Pour $y \neq 0$, en notant $g(y) = y^{1/5}$ et $g(0) = 0$,

$$\frac{g(y) - g(0)}{y - 0} = \frac{y^{1/5}}{y} = \frac{y^{1/5}}{(y^{1/5})^5} = \frac{1}{(y^{1/5})^4}.$$

Le dénominateur est une puissance **quatrième**, donc strictement positive pour $y \neq 0$, et il tend vers 0 quand y tend vers 0 par continuité de g . Le taux d'accroissement tend donc vers $+\infty$, des deux côtés.

La fonction g n'est donc pas dérivable en 0, et sa courbe y présente une **tangente verticale**, qu'elle traverse. $\square$

Le mécanisme, en une phrase. La courbe de f a en 0 une tangente horizontale, puisque $f'(0) = 0$; la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ la transforme en une tangente verticale, et une tangente verticale n'est pas le graphe d'un nombre dérivé. Rien n'est perdu géométriquement, tout est perdu analytiquement : c'est exactement ce que les questions 5.a et 5.b disent en langage de théorème.

Commentaire

Le théorème de dérivation d'une réciproque a été employé quatre fois, et la structure de la rédaction n'a pas varié d'un iota : établir la bijection en citant le théorème du chapitre précédent, repérer **où la dérivée s'annule** et écarter les images de ces points, écrire la formule avec $f^{-1}(y)$ non explicité, puis éliminer f^{-1} au moyen d'une identité.

C'est la deuxième étape qui décide de tout, et c'est elle qu'on abrège à tort. Pour Arccos, elle retire deux points et donne un domaine ouvert ; pour la racine n -ième, elle retire l'origine ; pour argsh, elle ne retire rien, parce que ch ne s'annule jamais. Et la question 5 montre ce qui arrive en un point retiré : la réciproque n'y est jamais dérivable, sa courbe y a une tangente verticale. La quatrième étape, l'élimination de f^{-1} , est celle où l'on croit ne faire que du calcul. Elle demande pourtant à chaque fois une **justification de signe**, sauf quand aucune racine carrée n'apparaît. Deux cas se sont présentés : le sinus de Arccos y , dont la positivité vient de l'intervalle $]0, \pi[$ et de nulle part ailleurs ; et le ch de argsh y , dont la positivité est universelle. Confondre les deux situations, c'est écrire un signe juste par chance.

Un dernier point, sur la formule elle-même. Elle s'écrit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

et le dénominateur est f' **composée avec** f^{-1} , jamais f' évaluée en y . La raison est de simple bon sens : f' attend un point du domaine de f , et y n'y est pas — il est dans l'ensemble d'arrivée. Contrôler la cohérence des domaines suffit à ne jamais se tromper sur cette écriture.

Exercice 7 ★★★ Une réciproque qu'on ne sait pas expliciter

Notions : Dérivée d'une fonction réciproque, Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x + \sin x.$$

Aucune des questions ci-dessous ne demande d'expression explicite de la réciproque de f : il n'en existe pas au moyen des fonctions usuelles, et c'est précisément ce qui rend l'exercice intéressant. Tout s'obtient à partir de f elle-même.

1. Démontrer que $f'(x) \geq 1$ pour tout réel x . En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, en citant le théorème employé et en vérifiant ses hypothèses.

On note désormais g la bijection réciproque de f .

2. Calculer $f(0)$ et $f(\pi)$. En déduire $g(0)$, $g(2\pi)$, puis $g'(0)$ et $g'(2\pi)$.

3. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{3} \leq g'(y) \leq 1.$$

4. En déduire, par l'**inégalité des accroissements finis appliquée à g** , que g est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Sachant que $g(0) = 0$, quel encadrement de $g(1)$ obtient-on ? On donnera d'abord celui que fournit le caractère lipschitzien, puis le meilleur encadrement que permet la question 3.

5. L'équation $2x + \sin x = 1$ admet-elle des solutions réelles ? Si oui, combien ? Encadrer chacune d'elles entre deux rationnels.

Corrigé

1. La bijection

La minoration de la dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une fonction affine et du sinus, et

$$f'(x) = 2 + \cos x.$$

Or $-1 \leq \cos x \leq 1$ pour tout réel x , donc

$$1 \leq f'(x) \leq 3.$$

En particulier $f'(x) \geq 1 > 0$: la dérivée est **strictement positive** en tout point. $\square$

La bijection. Trois hypothèses à vérifier pour le théorème de la bijection, établi au chapitre précédent.

- *Intervalle* : $\mathbb{R}$ en est un.
- *Continuité* : f est continue sur $\mathbb{R}$, étant dérivable.
- *Stricte monotonie* : $f' > 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante d'après le critère du signe de la dérivée.

Le théorème s'applique : f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle image $f(\mathbb{R})$, et sa réciproque g est continue et strictement croissante.

L'intervalle image. Il reste à voir que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ce qui n'est pas automatique. Comme $|\sin x| \leq 1$, on a pour tout réel x

$$2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1.$$

Le membre de gauche tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$; le membre de droite tend vers $-\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$. L'image d'un intervalle par une fonction continue strictement croissante étant l'intervalle de bornes les deux limites, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ainsi g est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. $\square$

Remarque

Pourquoi on ne peut pas expliciter g . Résoudre $f(x) = y$, c'est résoudre $2x + \sin x = y$, équation dans laquelle x apparaît à la fois hors et sous un sinus : aucune manipulation algébrique ne permet de l'isoler, et l'on démontre en théorie des fonctions qu'aucune combinaison de fonctions usuelles n'exprime la solution. C'est le cas général, et non l'exception : les réciproques qu'on sait écrire ($\ln$, Arctan , la racine carrée) sont celles auxquelles on a donné un nom, précisément parce qu'on ne pouvait pas les écrire autrement.

L'exercice montre qu'on peut travailler avec g sans rien de tout cela : la calculer en quelques points, la dériver, l'encadrer, et résoudre une équation avec elle.

2. Deux valeurs, et deux nombres dérivés

Les valeurs de f . On a $f(0) = 0 + \sin 0 = 0$ et

$$f(\pi) = 2\pi + \sin \pi = 2\pi.$$

Les valeurs de g . Une bijection et sa réciproque échangent antécédents et images : de $f(0) = 0$ on tire $g(0) = 0$, et de $f(\pi) = 2\pi$ on tire $g(2\pi) = \pi$.

Les nombres dérivés. La dérivée de f ne s'annulant jamais, le théorème de dérivation d'une réciproque s'applique en tout point, et donne

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

En $y = 0$, comme $g(0) = 0$ et $f'(0) = 2 + \cos 0 = 3$,

$$g'(0) = \frac{1}{3}.$$

En $y = 2\pi$, comme $g(2\pi) = \pi$ et $f'(\pi) = 2 + \cos \pi = 2 - 1 = 1$,

$$g'(2\pi) = 1.$$

Ce qui rend ces deux calculs possibles. On n'a jamais eu besoin de l'expression de g , seulement de **deux de ses valeurs**, obtenues en lisant à l'envers deux valeurs de f . C'est le mode d'emploi de la formule : on l'écrit avec $g(y)$ non explicité, puis on remplace $g(y)$ par la valeur qu'on connaît. Chercher g d'abord, ce serait s'arrêter tout de suite.

3. L'encadrement de la dérivée de g

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$: le théorème de dérivation d'une réciproque s'applique en tout point y , puisque f est dérivable en $g(y)$ et que $f'(g(y)) \geq 1 \neq 0$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. D'après la question 1 appliquée au point $g(y)$,

$$1 \leq f'(g(y)) \leq 3.$$

Ces trois quantités sont strictement positives, donc le passage à l'inverse renverse les inégalités :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{f'(g(y))} \leq 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{3} \leq g'(y) \leq 1. \quad \square$$

Le point de méthode. L'encadrement de f' obtenu à la question 1 vaut **pour tout réel**, donc en particulier au point $g(y)$, que l'on ne connaît pas. C'est ce qui permet de conclure sans rien savoir de g : une majoration uniforme se transporte à travers une composition, une majoration ponctuelle ne se transporte pas.

4. Le caractère lipschitzien, et l'encadrement de $g(1)$

Application de l'inégalité des accroissements finis. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et sa dérivée est majorée en valeur absolue par 1, d'après la question 3 : comme g' est positive, $|g'(y)| = g'(y) \leq 1$ pour tout y . L'inégalité des accroissements finis donne alors, pour tous réels y et y' ,

$$|g(y) - g(y')| \leq 1 \times |y - y'|.$$

La fonction g est donc **1-lipschitzienne** sur $\mathbb{R}$. $\square$

Premier encadrement. En prenant $y = 1$ et $y' = 0$, et puisque $g(0) = 0$:

$$|g(1)| \leq 1, \quad \text{soit} \quad -1 \leq g(1) \leq 1.$$

Meilleur encadrement. L'inégalité des accroissements finis n'utilise que la **majoration** de $|g'|$; la question 3 donne aussi une minoration, et il serait dommage de la perdre. Appliquons l'égalité des accroissements finis à g sur le segment $[0, 1]$: g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, donc il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$g(1) - g(0) = g'(c) \times (1 - 0) = g'(c).$$

Comme $g(0) = 0$ et $\frac{1}{3} \leq g'(c) \leq 1$, il vient

$$\frac{1}{3} \leq g(1) \leq 1.$$

La borne inférieure -1 était donc très pessimiste : la seule majoration ne pouvait pas voir que g est croissante.

5. L'équation $2x + \sin x = 1$

Existence et unicité. L'équation s'écrit $f(x) = 1$. Comme f est une **bijection** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, tout réel a un antécédent et un seul : l'équation admet donc **exactement une solution**, à savoir

$$x_0 = g(1).$$

On insistera sur le fait que la bijectivité fournit les deux moitiés du résultat d'un coup : l'existence, par la surjectivité, et l'unicité, par l'injectivité. Aucun théorème des valeurs intermédiaires n'est à réinvoquer ici, il a déjà servi à la question 1.

Premier encadrement. La question 4 donne déjà $\frac{1}{3} \leq x_0 \leq 1$.

Encadrement affiné. On utilise la stricte croissance de f : pour comparer x_0 à un réel t , il suffit de comparer $f(t)$ à 1.

Borne inférieure. Prenons $t = \frac{1}{3}$. On a besoin de l'inégalité $\sin u < u$ pour $u > 0$, qui s'établit en deux lignes avec les outils du chapitre : la fonction $\varphi : u \mapsto u - \sin u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée $\varphi'(u) = 1 - \cos u$ est positive et ne s'annule qu'aux points $2k\pi$, donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; comme $\varphi(0) = 0$, on a $\varphi(u) > 0$ pour tout $u > 0$. Elle donne

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + \sin \frac{1}{3} < \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Donc $f(\frac{1}{3}) < 1 = f(x_0)$, et la stricte croissance de f donne $\frac{1}{3} < x_0$.

Borne supérieure. Prenons $t = \frac{1}{2}$. Comme $0 < \frac{1}{2} < \pi$, on a $\sin \frac{1}{2} > 0$, donc

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \sin \frac{1}{2} > 1.$$

Donc $f(\frac{1}{2}) > f(x_0)$, et la stricte croissance donne $x_0 < \frac{1}{2}$.

Conclusion. L'équation $2x + \sin x = 1$ a une solution unique, et

$$\frac{1}{3} < x_0 < \frac{1}{2}. \quad \square$$

Méthode

Comment on encadre une solution qu'on ne peut pas calculer. Le procédé tient en une ligne, et il ne demande aucune valeur approchée.

Si f est strictement croissante, alors pour comparer la solution de $f(x) = k$ à un réel t , on compare $f(t)$ à k :

$$f(t) < k \iff t < x_0.$$

Le travail se déplace donc sur le choix de t , qu'on prend simple, et sur le calcul du signe de $f(t) - k$, qu'on obtient par une inégalité connue plutôt que par une calculatrice. Ici, deux inégalités élémentaires sur le sinus ont suffi, et l'encadrement obtenu est **démontré**, non pas lu sur un écran.

Commentaire

L'exercice a produit, sur une fonction dont on ne sait rien écrire, une liste de résultats précis : deux valeurs, deux nombres dérivés, un encadrement de la dérivée valable partout, un caractère lipschitzien, un encadrement de $g(1)$, et la résolution complète d'une équation. Tout cela avec un seul ingrédient, la fonction f , et deux théorèmes.

Trois idées méritent d'être retenues séparément.

Une réciproque se manipule par la fonction directe. Chaque calcul sur g s'est ramené à un calcul sur f : $g(2\pi) = \pi$ parce que $f(\pi) = 2\pi$, et $g'(2\pi) = 1$ parce que $f'(\pi) = 1$. La formule du théorème n'est rien d'autre que la traduction de ce va-et-vient.

Un encadrement uniforme est plus utile qu'une valeur exacte. La question 3 a produit $\frac{1}{3} \leq g' \leq 1$ sans localiser quoi que ce soit, et c'est cet encadrement qui a ensuite tout donné : le caractère lipschitzien, puis l'encadrement de $g(1)$. Les constantes $\frac{1}{3}$ et 1 ne sont pas mystérieuses : ce sont les inverses de 3 et de 1, valeurs extrêmes de f' . La réciproque est d'autant plus « plate » que la fonction est « raide ».

Les deux accroissements finis ne servent pas au même usage. L'inégalité donne une majoration valable pour tous les couples de points, sans exhiber aucun point : c'est ce qui définit une fonction lipschitzienne, et c'est ce qu'on utilise pour majorer un écart. L'égalité, elle, fournit un point c dont on ne sait rien sauf qu'il est dans l'ouvert, et c'est ce qui permet de garder les deux bornes de l'encadrement de g' , donc d'obtenir $g(1) \geq \frac{1}{3}$. Choisir la mauvaise des deux ne rend pas la copie fausse, elle la rend faible.

Exercice 8 ★★ Le lemme de Fermat, et l'hypothèse point intérieur

Notions : Extremum local intérieur et théorème de Rolle

On rappelle deux définitions de la section 10 du cours. La fonction f , définie sur un intervalle I , admet un **maximum local** en $c \in I$ lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout x de $I \cap]c - r, c + r[$; et le point c est **intérieur** à I lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $]c - r, c + r[\subset I$.

1. Démontrer le **lemme de Fermat** : si f est définie sur un intervalle I , si c est un point **intérieur** à I , si f admet un extremum local en c et si f est **dérivable** en c , alors $f'(c) = 0$.

On traitera le cas d'un maximum local, en écrivant séparément le taux d'accroissement **à droite** et le taux d'accroissement **à gauche**, et en passant à la limite dans chacun des deux. On indiquera comment le cas d'un minimum s'en déduit.

2. Relire sa propre démonstration et répondre précisément : **où l'hypothèse « c est intérieur à I » a-t-elle servi, exactement ?** Une seule ligne de la preuve doit être citée.

3. Que devient l'énoncé si l'on suppose seulement que f est **dérivable à droite** en c ? Énoncer ce qui subsiste, pour un maximum puis pour un minimum, et montrer sur un exemple que l'égalité, elle, est perdue.

4. Deux contre-exemples à construire.

a. Exhiber une fonction **monotone** sur $[0, 1]$, dérivable sur $[0, 1]$, dont le maximum et le minimum sont atteints et dont la dérivée ne s'annule **nulle part**. Dire pourquoi il n'y a aucune contradiction avec le lemme, et ce que le lemme dit encore en 0 et en 1.

b. Montrer que la réciproque du lemme est fautive, sur la fonction $x \mapsto x^5$.

5. Une question de vocabulaire. Donner une fonction **majorée** qui n'atteint **pas** sa borne supérieure, et dire ce que le lemme de Fermat a, ou n'a pas, à en dire.

Corrigé

1. La démonstration du lemme

Supposons que f admette un **maximum local** en c , point intérieur à I , et que f soit dérivable en c .

Les deux rayons, et leur minimum. Deux réels strictement positifs nous sont donnés par les hypothèses. L'intériorité de c fournit $r_1 > 0$ tel que $]c - r_1, c + r_1[\subset I$. La définition du maximum local fournit $r_2 > 0$ tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout x de $I \cap]c - r_2, c + r_2[$. Posons

$$r = \min(r_1, r_2) > 0.$$

Sur l'intervalle $]c - r, c + r[$, les deux propriétés sont vraies **simultanément** : cet intervalle est contenu dans I , et f y est majorée par $f(c)$. C'est le seul rôle de ce minimum, et il est indispensable : sans lui, on manipulerait deux voisinages différents sans avoir le droit de les confondre.

Le taux d'accroissement à droite. Soit $x \in]c, c + r[$. Un tel x existe, car cet intervalle est non vide. Alors $x \in I$ et $f(x) \leq f(c)$, donc $f(x) - f(c) \leq 0$; et $x > c$ donne $x - c > 0$. Le quotient d'un nombre négatif ou nul par un nombre strictement positif est négatif ou nul :

$$\tau_c(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

La fonction f étant dérivable en c , ce taux tend vers $f'(c)$ quand x tend vers c , et en particulier quand x tend vers c **par valeurs supérieures**. Le passage à la limite dans une inégalité large,

acquis au chapitre précédent, donne

$$f'(c) \leq 0.$$

Le taux d'accroissement à gauche. Soit maintenant $x \in]c - r, c[$, intervalle également non vide. Alors $x \in I$ et $f(x) - f(c) \leq 0$ comme précédemment, mais cette fois $x - c < 0$. Le quotient de deux nombres de signes contraires, le numérateur pouvant être nul, est positif ou nul :

$$\tau_c(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Le même passage à la limite, quand x tend vers c par valeurs inférieures, donne

$$f'(c) \geq 0.$$

Conclusion. Les deux inégalités $f'(c) \leq 0$ et $f'(c) \geq 0$ donnent $f'(c) = 0$. $\square$

Le cas d'un minimum local. Si f admet un minimum local en c , alors $-f$ admet un maximum local en c : en effet $f(x) \geq f(c)$ équivaut à $-f(x) \leq -f(c)$. La fonction $-f$ est dérivable en c , de dérivée $-f'(c)$, et le cas déjà traité lui donne $-f'(c) = 0$, donc $f'(c) = 0$.

Remarque

Le minimum, traité directement. On peut aussi refaire les deux calculs, et il est instructif de voir où les signes basculent. Pour un minimum, $f(x) - f(c) \geq 0$; à droite le taux est donc positif ou nul, ce qui donne $f'(c) \geq 0$, et à gauche négatif ou nul, ce qui donne $f'(c) \leq 0$. Les deux inégalités sont **échangées** par rapport au cas du maximum, et la conclusion est la même. Le passage par $-f$ n'est donc pas un artifice : il évite exactement cette réécriture.

Pourquoi on n'obtient que des inégalités larges. Le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes : de $\tau_c(x) < 0$ pour tout x à droite, on ne peut conclure que $f'(c) \leq 0$. Ce n'est pas une faiblesse de la rédaction, c'est la règle, et heureusement la conclusion $f'(c) = 0$ ne demande rien de plus.

2. Où l'intériorité a servi

Elle a servi **une seule fois**, et à un endroit repérable : dans la phrase « *Soit $x \in]c - r, c[$, intervalle également non vide* ». C'est là, et nulle part ailleurs, que l'on utilise le fait qu'il existe des points de I **à gauche** de c aussi près qu'on veut.

Plus précisément, l'intériorité fournit le rayon r_1 tel que $]c - r_1, c + r_1[\subset I$, donc elle garantit que les **deux** intervalles $]c, c + r[$ et $]c - r, c[$ sont non vides et contenus dans I . Sans elle, l'un des deux pourrait être vide, ou sortir du domaine : on n'aurait alors qu'une seule des deux inégalités, et une seule inégalité ne donne pas une égalité.

C'est tout son rôle, et c'est pourquoi cette hypothèse ne peut pas être affaiblie : elle ne sert pas à rendre le calcul plus commode, elle sert à ce qu'il y ait **deux** calculs.

3. Si f n'est dérivable qu'à droite

La démonstration se coupe en deux, et la moitié qui survit est celle du taux à droite.

Propriété

Soit c un point de I tel que $]c, c + r[\subset I$ pour un certain $r > 0$, et supposons f **dérivable à droite** en c .

- Si f admet un maximum local en c , alors $f'_d(c) \leq 0$.
- Si f admet un minimum local en c , alors $f'_d(c) \geq 0$.

La démonstration est le premier des deux calculs de la question 1, sans modification : pour un maximum, le taux est négatif ou nul à droite de c , et le passage à la limite à droite donne $f'_d(c) \leq 0$; pour un minimum, les signes s'inversent. $\square$

L'égalité, elle, est perdue. Prenons $f : x \mapsto -|x|$ sur $\mathbb{R}$ et $c = 0$. Cette fonction admet en 0 un maximum, et même un maximum **global**, puisque $-|x| \leq 0 = f(0)$ pour tout réel x . Elle est dérivable à droite en 0, avec

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x - 0}{x} = -1.$$

L'inégalité annoncée est bien vérifiée, puisque $-1 \leq 0$, mais elle est **stricte** : il n'y a aucune égalité à espérer. La conclusion du lemme de Fermat est donc réellement perdue, et pas seulement affaiblie par précaution.

Les quatre cas, aux extrémités d'un segment. Le même découpage s'applique quand c est une extrémité de $I = [a, b]$, où un seul côté est disponible. En reprenant les deux calculs, on obtient le tableau suivant, qu'il vaut mieux redémontrer en dix secondes que retenir :

Extremum atteint en...	Côté disponible	Conclusion
un maximum en a	à droite	$f'_d(a) \leq 0$
un minimum en a	à droite	$f'_d(a) \geq 0$
un maximum en b	à gauche	$f'_g(b) \geq 0$
un minimum en b	à gauche	$f'_g(b) \leq 0$

Les deux dernières lignes surprennent au premier coup d'œil, et le calcul les impose : en un maximum atteint à l'extrémité **droite**, la fonction monte encore quand elle rencontre le bord, donc sa dérivée à gauche est positive ou nulle. Le moyen de ne pas se tromper est de refaire le quotient : pour $x < b$, le numérateur $f(x) - f(b)$ est négatif ou nul, le dénominateur $x - b$ est strictement négatif, donc le quotient est positif ou nul.

4.a. Une fonction monotone sur un segment

Prenons

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x} \quad \text{sur } [0, 1].$$

Pour $x \in [0, 1]$, on a $1+x \geq 1 > 0$: la fonction est définie et dérivable sur $[0, 1]$, avec

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

Cette dérivée est **strictement négative** en tout point de $[0, 1]$: elle ne s'annule nulle part, et f est strictement décroissante.

Comme f est strictement décroissante sur $[0, 1]$, son maximum est atteint en 0, avec $f(0) = 1$, et son minimum en 1, avec $f(1) = \frac{1}{2}$. Les deux extremums sont donc **atteints**, et ce sont même des extremums globaux.

Pourquoi il n'y a aucune contradiction. Le lemme de Fermat exige que le point soit **intérieur** à l'intervalle. Or l'ensemble des points intérieurs à $[0, 1]$ est $]0, 1[$, et ni 0 ni 1 n'y appartient. Le lemme ne s'applique donc à aucun des deux points où les extremums sont atteints : il ne dit rien, et son silence n'est pas une contradiction.

Ce que le lemme dit encore. Les deux moitiés de la question 3 s'appliquent. En 0, un maximum est atteint et seul le côté droit est disponible : on doit avoir $f'_d(0) \leq 0$, et en effet $f'_d(0) = -1 \leq 0$. En 1, un minimum est atteint et seul le côté gauche est disponible : on doit avoir $f'_g(1) \leq 0$, et en effet $f'_g(1) = -\frac{1}{4} \leq 0$. Les deux inégalités sont vérifiées, strictement, et c'est tout ce qui subsiste.

4.b. La réciproque est fausse

Considérons $f : x \mapsto x^5$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $f'(x) = 5x^4$, donc

$$f'(0) = 0.$$

Le point 0 est bien intérieur à $\mathbb{R}$, et f y est dérivable : toutes les hypothèses du lemme sont réunies **sauf** celle d'extremum, et sa conclusion est vérifiée. La question est de savoir si l'implication se retourne.

Elle ne se retourne pas. La dérivée $5x^4$ est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0, donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, d'après le critère du signe de la dérivée. Soit alors $r > 0$ quelconque. La stricte croissance donne

$$f\left(-\frac{r}{2}\right) < f(0) < f\left(\frac{r}{2}\right),$$

et les deux points $\pm \frac{r}{2}$ appartiennent à $] -r, r[$. Ainsi, dans **tout** voisinage de 0, la fonction prend une valeur strictement inférieure à $f(0)$ et une valeur strictement supérieure : elle n'admet en 0 ni maximum local, ni minimum local. $\square$

Le point 0 est ce qu'on appelle un **point critique** de f : un point où la dérivée s'annule. Le vocabulaire est prudent à dessein, et cet exemple explique pourquoi il ne dit pas « extremum ».

Remarque

Un candidat qui ne convient pas, et il faut savoir le voir. On pourrait songer à $x \mapsto x + x^3$, dont la courbe ressemble à celle de $x \mapsto x^5$ près de l'origine. Ce serait une erreur : sa dérivée vaut $1 + 3x^2$, qui est **toujours strictement positive**. Cette fonction n'a donc aucun point critique, et elle ne peut pas servir de contre-exemple à un énoncé qui parle des points où la dérivée s'annule. Un contre-exemple doit vérifier l'hypothèse dont on teste la suffisance, ici « $f'(c) = 0$ » : à défaut, il ne réfute rien.

5. Majorée sans maximum

Prenons

$$f : x \mapsto 1 - e^{-x} \quad \text{sur } [0, +\infty[.$$

Elle est majorée par 1. Pour tout $x \geq 0$, on a $e^{-x} > 0$, donc $f(x) < 1$. En particulier f est majorée, et 1 est un majorant.

Sa borne supérieure vaut 1. Soit $M < 1$ un réel. Alors $1 - M > 0$, et l'inégalité $f(x) > M$ équivaut à $e^{-x} < 1 - M$, c'est-à-dire à $x > -\ln(1 - M)$, ce qui est réalisé dès que x est assez grand. Aucun réel strictement inférieur à 1 n'est donc un majorant : 1 est le **plus petit** des majorants, autrement dit $\sup f = 1$.

Elle n'atteint pas cette borne. L'égalité $f(x) = 1$ équivaut à $e^{-x} = 0$, qui n'a aucune solution. La fonction n'admet donc **pas de maximum**.

Ce que le lemme de Fermat a à en dire : rien, et c'est cohérent. Le lemme parle d'un point c où un extremum est **atteint**. Ici il n'y a pas de tel point pour le maximum, donc aucune hypothèse à vérifier et aucune conclusion à tirer. Et de fait, $f'(x) = e^{-x}$ ne s'annule en aucun point : si le lemme avait quelque chose à dire, il dirait quelque chose de faux.

Le point de vocabulaire. La **borne supérieure** est un nombre attaché à l'ensemble des valeurs de la fonction ; elle existe dès que la fonction est majorée, sans qu'aucun point du domaine ne lui corresponde. Le **maximum** est une valeur **prise** par la fonction, en un point qu'on peut nommer. Le lemme de Fermat, comme toute la théorie des extremums, ne parle que de la seconde notion : « f admet un maximum local en c » contient à la fois une valeur et un point, et le point est ce qui permet de dériver.

On notera que si l'on remplace $[0, +\infty[$ par un segment $[0, b]$, le maximum devient atteint, en b : c'est le théorème des bornes atteintes du chapitre précédent, dont l'hypothèse est un segment, et cet exemple montre qu'elle est indispensable.

Commentaire

La démonstration du lemme tient en deux calculs symétriques, et tout le contenu de l'exercice consiste à voir que ces deux calculs sont **deux**.

Retirer l'intériorité, c'est perdre l'un des deux, et l'on tombe sur la question **4.a** : une fonction dont les extremums sont aux bords, dont la dérivée ne s'annule jamais, et qui ne contredit rien. Retirer la dérivabilité d'un côté, c'est la même perte vue autrement, et la question **3** en donne l'énoncé exact avec ses quatre cas.

Deux fautes de raisonnement sont couvertes par cet exercice, et elles se ressemblent assez pour être confondues.

Croire que la conclusion vaut sans l'hypothèse. « Le maximum d'une fonction dérivable est en un point où $f' = 0$ » est faux sur un segment : il faut ajouter « ou en l'une des deux extrémités ». C'est la faute la plus coûteuse en optimisation, parce qu'elle fait rendre une réponse sans avoir regardé les bords.

Croire que l'hypothèse découle de la conclusion. « $f'(c) = 0$ donc f a un extremum en c » est la réciproque, et $x \mapsto x^5$ la réfute. Un point critique est un **candidat**, et il faut un second argument pour trancher : le signe de f' de part et d'autre, ou la comparaison des valeurs.

Enfin, la question **5** rappelle que le mot « maximum » engage l'existence d'un point. Une copie qui écrit « le maximum est 1 » pour la fonction $1 - e^{-x}$ n'a pas fait une erreur de calcul, elle a employé un mot qu'aucun point du domaine ne justifie.

Exercice 9 ★ Rolle, trois hypothèses et trois contre-exemples

Notions : Extremum local intérieur et théorème de Rolle

Le théorème de Rolle s'énonce ainsi. Soient $a < b$ deux réels et f définie sur $[a, b]$ telle que

1. f est **continue sur le segment** $[a, b]$;
2. f est **dérivable sur l'intervalle ouvert** $]a, b[$;
3. $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Construire **trois** contre-exemples, un par hypothèse mise en défaut. Pour chacun, on demande :

- la fonction et l'intervalle ;
- la vérification que les **deux autres** hypothèses sont bien satisfaites ;
- la vérification que la conclusion est fausse, c'est-à-dire qu'aucun point c de $]a, b[$ ne vérifie $f'(c) = 0$.

Le deuxième point est le cœur de l'exercice : un exemple qui viole deux hypothèses à la fois ne démontre rien du tout, et on dira pourquoi.

2. Pour chacun des trois, indiquer **à quel endroit précis** la démonstration du cours se casse. On rappelle qu'elle se déroule en trois temps : le théorème des bornes atteintes fournit deux points x_m et x_M où le minimum m et le maximum M sont atteints ; on traite à part le cas $m = M$; sinon on montre que l'un des deux points est intérieur, et l'on y applique le lemme de Fermat.

3. Le théorème de Rolle donne-t-il l'**unicité** du point c ? Exhiber une fonction vérifiant les trois hypothèses sur un segment et pour laquelle il existe au moins **trois** points c convenables. Que faut-il en conclure sur la façon de rédiger l'emploi du théorème ?

Corrigé

1.a. La continuité sur le segment, mise en défaut

La fonction. Sur $[0, 1]$, posons

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Les deux autres hypothèses sont satisfaites.

Hypothèse 2. Sur l'ouvert $]0, 1[$, la fonction f coïncide avec $x \mapsto x$, qui est dérivable ; comme la dérivabilité en un point ne dépend que des valeurs de la fonction au voisinage de ce point, et que $]0, 1[$ est un voisinage de chacun de ses points, f est dérivable sur $]0, 1[$, avec $f'(x) = 1$.

Hypothèse 3. On a $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ par définition : les deux valeurs sont bien égales.

L'hypothèse 1 tombe. La fonction est continue en tout point de $[0, 1[$, mais en 1 on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq 0 = f(1).$$

Elle n'est donc pas continue en 1, donc pas continue sur le segment $[0, 1]$.

La conclusion est fausse. Pour tout $c \in]0, 1[$, on a $f'(c) = 1 \neq 0$. Il n'existe donc aucun point convenable. $\square$

1.b. La dérivabilité sur l'ouvert, mise en défaut

La fonction. Sur $[-1, 1]$, posons $f(x) = |x|$.

Les deux autres hypothèses sont satisfaites.

Hypothèse 1. La valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur le segment $[-1, 1]$.

Hypothèse 3. On a $f(-1) = 1$ et $f(1) = 1$: les deux valeurs sont égales.

L'hypothèse 2 tombe. La fonction n'est pas dérivable en 0, qui appartient pourtant à l'ouvert $] - 1, 1[$: ses deux dérivées latérales en 0 existent et valent $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$, donc elles diffèrent (section 5 du cours).

La conclusion est fausse. Soit $c \in] - 1, 1[$. Si $c > 0$, alors $f'(c) = 1 \neq 0$; si $c < 0$, alors $f'(c) = -1 \neq 0$; et si $c = 0$, l'égalité $f'(c) = 0$ n'a même pas de sens, puisque $f'(0)$ n'existe pas. Aucun point de $] - 1, 1[$ ne convient. $\square$

1.c. L'égalité des valeurs aux bornes, mise en défaut

La fonction. Sur $[0, 1]$, posons $f(x) = x$.

Les deux autres hypothèses sont satisfaites. La fonction est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, étant affine, donc les hypothèses 1 et 2 sont vérifiées, et même sur $[0, 1]$ tout entier pour la seconde, ce qui est plus que demandé.

L'hypothèse 3 tombe. On a $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc $f(0) \neq f(1)$.

La conclusion est fausse. Pour tout c , $f'(c) = 1 \neq 0$. $\square$

Méthode

Pourquoi un contre-exemple ne doit violer qu'une hypothèse. Le but d'un contre-exemple est de démontrer qu'une hypothèse est **indispensable**, c'est-à-dire qu'on ne peut pas la retirer de l'énoncé. Pour cela il faut exhiber une situation où **elle seule** manque et où la conclusion tombe. Si deux hypothèses manquent, la conclusion peut tomber à cause de l'autre, et l'on n'a rien appris sur celle qu'on visait.

Un exemple de ce piège : pour tester la nécessité de la dérivabilité, prendre $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 2]$ serait sans valeur, car $f(-1) = 1$ et $f(2) = 2$ ne sont pas égaux : l'hypothèse 3 tombe aussi, et le contre-exemple ne prouve plus rien sur l'hypothèse 2. C'est pour cela que l'intervalle $[-1, 1]$, symétrique, a été choisi : il rétablit l'hypothèse 3 gratuitement.

Le réflexe de rédaction : après avoir donné la fonction, écrire les trois hypothèses dans l'ordre et les cocher une à une, deux « oui » et un « non ». Trois lignes, et le contre-exemple est complet.

2. Où la démonstration se casse

Cas a : dès la première ligne. La démonstration commence par appliquer le théorème des bornes atteintes, dont l'hypothèse est « f continue sur un segment ». Elle n'est pas vérifiée, et la conclusion du théorème est effectivement fausse ici : l'ensemble des valeurs de f est $[0, 1]$, dont la borne supérieure vaut 1 et n'est **pas atteinte**. Il n'existe donc aucun point x_M , et la suite de la démonstration, qui travaille avec ce point, n'a plus d'objet.

Cas b : à la dernière ligne. Ici, tout fonctionne jusqu'au bout. Le théorème des bornes atteintes s'applique et donne $m = 0$, atteint en $x_m = 0$, et $M = 1$, atteint **en deux points**, -1 et 1 ; on peut prendre pour x_M l'un ou l'autre. La valeur commune aux bornes est $v = f(-1) = f(1) = 1$, donc $M = v$, et c'est l'autre branche de la disjonction qui sert : $m = 0 < 1 = v$. Le point $x_m = 0$ est donc distinct de -1 et de 1 , il appartient à $] - 1, 1[$, il est **intérieur**, et f y admet un minimum global donc local. La démonstration en est alors à invoquer le lemme de Fermat, qui exige que f soit **dérivable en ce point** : c'est exactement là qu'elle se casse, et nulle part avant.

Cas c : au milieu. Le théorème des bornes atteintes s'applique et donne $m = 0$, atteint uniquement en 0, et $M = 1$, atteint uniquement en 1. Mais il n'y a plus de valeur commune $v = f(a) = f(b)$: c'est cette valeur qui permettait d'affirmer que $x_M \neq a$ et $x_M \neq b$, et donc que ce point était intérieur. Ici les deux extremums sont atteints aux deux bornes, la démonstration ne produit aucun point intérieur, et le lemme de Fermat ne peut pas être appelé.

Remarque

Le lien avec l'exercice 08. Le cas **c** est, vu du côté de Rolle, la même situation que la question 4.a de l'exercice 08 : une fonction monotone sur un segment, dont les extremums sont aux bords et dont la dérivée ne s'annule nulle part. Ce qui change est l'énoncé qu'on met en défaut, donc la lecture : là-bas c'était l'hypothèse d'intériorité du lemme de Fermat, ici c'est l'hypothèse $f(a) = f(b)$ de Rolle. Les deux hypothèses jouent le même rôle, à un intermédiaire près, et c'est visible dans la démonstration : c'est $f(a) = f(b)$ qui **produit** l'intériorité dont Fermat a besoin.

Le bilan des trois cas se résume ainsi.

Contre-exemple	Intervalle	Hypothèse en défaut	Les deux autres	Étape cassée
x sur $[0, 1[$, puis 0 en 1	$[0, 1]$	1, continuité	vérifiées	bornes atteintes
$ x $	$[-1, 1]$	2, dérivabilité	vérifiées	lemme de Fermat
x	$[0, 1]$	3, valeurs égales	vérifiées	intériorité du point

3. Pas d'unicité, et ce que cela impose à la rédaction

Le théorème ne donne aucune unicité. Il affirme l'existence d'au moins un point, et rien de plus.

Une fonction avec trois points convenables. Prenons $f = \sin$ sur $[0, 3\pi]$.

Les trois hypothèses. Le sinus est continu et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, 3\pi]$ et sur $]0, 3\pi[$. Et $\sin 0 = 0$, $\sin(3\pi) = 0$: les valeurs aux bornes sont égales.

Les points obtenus. On cherche les $c \in]0, 3\pi[$ tels que $\cos c = 0$, c'est-à-dire les c de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier. Ceux qui appartiennent à $]0, 3\pi[$ sont

$$c_1 = \frac{\pi}{2}, \quad c_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad c_3 = \frac{5\pi}{2},$$

puisque le suivant, $\frac{7\pi}{2}$, dépasse 3π . Il y a donc **trois** points convenables, et le théorème de Rolle n'en désigne aucun en particulier. $\square$

On peut faire encore plus simple, et plus radical : une fonction **constante** sur $[a, b]$ vérifie les trois hypothèses, et **tout** point de $]a, b[$ convient. Il y en a alors une infinité.

Ce que cela impose à la rédaction. Trois règles, et la troisième est celle qu'on oublie.

- On écrit « **il existe** $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ », jamais « **le point** c ». L'article défini suppose une unicité qui n'est pas démontrée.
- On ne suppose **rien** sur la position de c : ni qu'il est au milieu, ni qu'il est unique, ni qu'il dépend continûment des données. Tout ce qu'on sait de lui est qu'il est dans l'**ouvert**.
- Quand on applique le théorème deux fois, sur deux intervalles différents, on nomme les deux points **différemment**, par exemple c_1 et c_2 . Réutiliser la même lettre revient à affirmer qu'il s'agit du même point, ce qui est faux en général — et c'est la faute qui ruine les raisonnements de comptage de racines, où l'on a justement besoin que les points obtenus soient distincts.

Commentaire

Les trois hypothèses de Rolle sont **indépendantes** : chacun des trois contre-exemples conserve les deux autres, ce qui démontre qu'aucune des trois n'est superflue. C'est le sens exact du travail demandé, et c'est ce qui distingue un contre-exemple d'une simple illustration.

Il reste une dissymétrie à comprendre : la continuité est exigée sur le **fermé** $[a, b]$, la dérivabilité seulement sur l'**ouvert** $]a, b[$. Les cas **a** et **b** expliquent pourquoi. La continuité sert à appeler le théorème des bornes atteintes, qui exige un segment, donc les deux extrémités ; la dérivabilité ne sert qu'en **un seul point**, celui que ce théorème produit, et ce point est intérieur dès qu'on n'est pas dans le cas constant. Exiger la dérivabilité en a et en b serait donc une hypothèse plus forte et parfaitement inutile — et ce serait coûteux, car cela exclurait des fonctions aussi courantes que $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$, dont la courbe a deux tangentes verticales aux bornes. Enfin, un mot sur ce que les contre-exemples ne disent pas. Les trois hypothèses sont **suffisantes**, elles ne sont pas nécessaires : une fonction peut très bien avoir un point à tangente horizontale sans les vérifier. Le sinus sur $[0, \frac{3\pi}{4}]$ en est un exemple, car $\sin 0 = 0$ et $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ne sont pas égaux, et pourtant $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ avec $\frac{\pi}{2}$ dans l'ouvert. Un théorème dont les hypothèses tombent est muet, il n'est pas contredit : c'est la distinction la plus utile de tout le chapitre, et elle sert autant en analyse qu'ailleurs.

Exercice 10 ★★★ Compter les racines, par Rolle ou par les variations

Notions : Extremum local intérieur et théorème de Rolle, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

Partie A. Par le théorème de Rolle

1. Soit f continue sur un intervalle I et dérivable sur son intérieur.
 - a. Démontrer que **entre deux racines de f , il y a au moins une racine de f'** .
 - b. En déduire que si f' admet **au plus n racines** sur I , alors f en admet **au plus $n + 1$** . On soignera l'argument qui garantit que les racines de f' obtenues sont deux à deux distinctes.
2. Soit m un réel et P_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_m(x) = x^4 - 4x + m.$$

- a. Majorer, par la question 1, le nombre de solutions réelles de l'équation $P_m(x) = 0$.
- b. Déterminer ensuite le nombre **exact** de solutions, en discutant selon la valeur de m .

Partie B. Par les variations

3. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.
 - a. Démontrer que l'équation $\tan x = x$ admet **exactement une** solution dans chaque I_k .
 - b. Encadrer celle qui appartient à $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, d'abord entre deux multiples de π , puis entre deux décimaux à un chiffre.

Partie C. Comparer les deux approches

4. Répondre aux trois questions suivantes, en s'appuyant sur les parties A et B.
 - a. Laquelle des deux méthodes fournit une **majoration**, laquelle fournit le **compte exact** ?
 - b. Que coûte chacune, c'est-à-dire de quelles informations sur la fonction a-t-elle besoin ?
 - c. Sur la partie B, que donnerait la méthode de la partie A ? Le résultat serait-il optimal ?

Corrigé**1.a. Entre deux racines de f , une racine de f'**

Soient $\alpha < \beta$ deux racines de f dans I . Vérifions les trois hypothèses du théorème de Rolle sur le segment $[\alpha, \beta]$, qui est contenu dans I puisque I est un intervalle.

- f est continue sur $[\alpha, \beta]$, comme restriction d'une fonction continue sur I .
- f est dérivable sur $] \alpha, \beta [$, car cet ouvert est contenu dans l'intérieur de I .
- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, puisque ce sont deux racines : l'hypothèse $f(\alpha) = f(\beta)$ est vérifiée, avec la valeur commune 0.

Le théorème de Rolle fournit donc un $c \in] \alpha, \beta [$ tel que $f'(c) = 0$. $\square$

1.b. Le comptage

Raisonnons par l'absurde et supposons que f admette **au moins** $n + 2$ racines distinctes sur I . Rangeons-en $n + 2$ par ordre strictement croissant :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n+2}.$$

Pour chaque i de 1 à $n + 1$, la question **1.a** appliquée au couple (α_i, α_{i+1}) fournit un réel

$$c_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[\quad \text{tel que} \quad f'(c_i) = 0.$$

On obtient ainsi $n + 1$ racines de f' .

Elles sont deux à deux distinctes, et c'est le point à ne pas escamoter : c_i appartient à $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ et c_j à $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$, et pour $i < j$ ces deux intervalles ouverts sont **disjoints**, puisque $\alpha_{i+1} \leq \alpha_j$. Deux éléments d'ensembles disjoints ne peuvent pas être égaux.

La fonction f' admet donc au moins $n + 1$ racines distinctes, ce qui contredit l'hypothèse « au plus n ». Par conséquent f admet au plus $n + 1$ racines sur I . $\square$

Remarque

Ce que ce corollaire ne donne pas. Il majore, et il ne fait que cela. Il ne dit pas que f a des racines, il ne dit pas combien elle en a, et il ne les localise pas. En particulier, une fonction sans aucune racine vérifie l'énoncé sans le moindre problème : « au plus $n + 1$ » inclut 0.

2.a. La majoration pour P_m

La fonction P_m est polynomiale, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$P'_m(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1).$$

Comme $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation $x^3 = 1$ a la solution unique $x = 1$: la dérivée admet donc **exactement une** racine.

Remarquons que P'_m ne dépend pas de m : la majoration sera la même pour toutes les valeurs du paramètre. D'après la question **1.b** avec $n = 1$, l'équation $P'_m(x) = 0$ admet **au plus deux** solutions réelles, et cela quel que soit m . $\square$

2.b. Le compte exact, selon m

La majoration ne dit pas si ces deux solutions existent. Passons donc par le signe de la dérivée, qui donne les variations, ce que Rolle ne donne pas.

Le signe de $P'_m(x) = 4(x^3 - 1)$ est celui de $x^3 - 1$, donc négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$. Par ailleurs, quand $|x| \rightarrow +\infty$, le terme x^4 domine et $P_m(x) \rightarrow +\infty$ dans les deux directions. Enfin

$$P_m(1) = 1 - 4 + m = m - 3.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P'_m(x)$	—	0	+
$P_m(x)$	$+\infty$	$m - 3$	$+\infty$

La fonction P_m est donc strictement décroissante sur $] -\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et son minimum global vaut $m - 3$, atteint en 1 et là seulement. Trois cas.

Si $m > 3$. Alors $P_m(x) \geq P_m(1) = m - 3 > 0$ pour tout réel x : l'équation n'a **aucune solution**.

Si $m = 3$. Alors $P_m(1) = 0$, donc 1 est solution. Et pour $x \neq 1$, la stricte monotonie sur chacune des deux branches donne $P_m(x) > P_m(1) = 0$: il y a **exactement une solution**, $x = 1$.

Si $m < 3$. Alors $P_m(1) = m - 3 < 0$. Traitons les deux branches séparément.

Sur $] -\infty, 1]$. La fonction P_m y est continue, strictement décroissante, de limite $+\infty$ en $-\infty$ et de valeur $m - 3 < 0$ en 1. Le théorème de la bijection, ou le théorème des valeurs intermédiaires suivi de la stricte monotonie, donne **exactement une** solution dans cet intervalle, et elle est strictement inférieure à 1.

Sur $[1, +\infty[$. Mêmes arguments : continue, strictement croissante, valeur $m - 3 < 0$ en 1 et limite $+\infty$ en $+\infty$, donc **exactement une** solution, strictement supérieure à 1.

Ces deux solutions sont distinctes, l'une étant < 1 et l'autre > 1 : l'équation a donc **exactement deux solutions**. $\square$

On notera que la majoration de la question 2.a est atteinte dans ce dernier cas, et seulement dans celui-là.

3.a. Une solution dans chaque I_k

Fixons $k \in \mathbb{Z}$ et posons, pour $x \in I_k$,

$$\varphi(x) = \tan x - x.$$

Résoudre $\tan x = x$ sur I_k , c'est chercher les racines de φ sur I_k . Trois étapes.

φ est dérivable, et sa dérivée est positive. L'intervalle I_k ne contient aucun réel de la forme $\frac{\pi}{2} + j\pi$, donc la tangente y est dérivable, et

$$\varphi'(x) = (1 + \tan^2 x) - 1 = \tan^2 x \geq 0.$$

φ est strictement croissante sur I_k . La dérivée est positive, mais elle s'annule : $\tan^2 x = 0$ équivaut à $\tan x = 0$, c'est-à-dire à x multiple de π . Or l'intervalle I_k , de longueur π , contient exactement un multiple de π , à savoir $k\pi$. La dérivée s'annule donc en **un seul point** de I_k , et n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle : le critère de stricte monotonie de la section 15 s'applique, et φ est strictement croissante sur I_k .

Les limites aux bornes. Quand x tend vers $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ par valeurs supérieures, $\tan x$ tend vers $-\infty$, et x tend vers un réel fini : donc $\varphi(x) \rightarrow -\infty$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2} + k\pi$ par valeurs inférieures, $\tan x \rightarrow +\infty$, donc $\varphi(x) \rightarrow +\infty$.

Conclusion. La fonction φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle I_k , de limites $-\infty$ et $+\infty$ à ses bornes : d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I_k sur $\mathbb{R}$. Le réel 0 a donc un antécédent et un seul : l'équation $\tan x = x$ admet **exactement une solution** dans I_k . $\square$

Le décompte de « exactement », à savoir décomposer en deux affirmations, mérite d'être explicité : l'existence vient des deux limites infinies, c'est-à-dire du théorème des valeurs intermédiaires ; l'unicité vient de la stricte monotonie, c'est-à-dire du signe de φ' . Aucun des deux arguments ne peut donner l'autre.

3.b. L'encadrement de la solution de $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

Cet intervalle est I_1 ; notons x_1 sa solution.

Premier encadrement, entre deux multiples de π . L'égalité $\tan x_1 = x_1$ impose $\tan x_1 > 0$, puisque $x_1 > \frac{\pi}{2} > 0$. Or sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$, la tangente est négative ou nulle. Donc $x_1 > \pi$, et

$$\pi < x_1 < \frac{3\pi}{2}.$$

On peut le retrouver par le signe de φ : $\varphi(\pi) = \tan \pi - \pi = -\pi < 0$, et φ est strictement croissante, donc $x_1 > \pi$.

Second encadrement. Comme φ est strictement croissante sur I_1 , il suffit de trouver deux points où son signe change. À la calculatrice,

$$\varphi(4,4) = \tan(4,4) - 4,4 \approx 3,0963 - 4,4 = -1,3037 < 0,$$

$$\varphi(4,5) = \tan(4,5) - 4,5 \approx 4,6373 - 4,5 = 0,1373 > 0.$$

Ces deux réels appartiennent bien à I_1 , puisque $\frac{\pi}{2} \approx 1,571$ et $\frac{3\pi}{2} \approx 4,712$. La stricte croissance de φ donne alors

$$4,4 < x_1 < 4,5. \quad \square$$

Une valeur approchée est $x_1 \approx 4,4934$. On remarquera qu'elle est proche de $\frac{3\pi}{2} \approx 4,712$, et c'est le cas général : plus k est grand, plus la solution de I_k se rapproche de la borne droite, car il faut que la tangente atteigne la valeur x , de plus en plus grande.

4. La comparaison des deux méthodes

4.a. Ce que chacune produit.

La méthode de la partie A produit une **majoration** du nombre de racines, et rien d'autre. Elle est muette sur l'existence : dans le cas $m > 3$, elle annonçait « au plus deux » alors qu'il n'y en a aucune.

La méthode de la partie B produit le **compte exact**, parce qu'elle fournit les deux moitiés du résultat : la stricte monotonie donne « au plus une par intervalle de monotonie », et le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué grâce aux limites et aux valeurs aux bornes, donne « au moins une ». Une copie qui ne produit qu'une des deux moitiés a démontré une inégalité, pas une égalité, et doit le dire.

4.b. Ce que chacune coûte.

La partie A ne demande qu'une **seule information** : le nombre de racines de f' . On n'a pas eu besoin de la moindre valeur de P_m , ni d'une limite, ni du signe de quoi que ce soit — et c'est pourquoi la réponse ne dépendait pas de m . C'est une méthode très bon marché, et c'est la seule disponible quand on ne sait rien calculer : elle s'applique par exemple à un polynôme dont on connaît le degré de la dérivée sans connaître ses coefficients.

La partie B demande **beaucoup plus** : le signe de la dérivée sur chaque intervalle, donc sa résolution complète ; les valeurs de la fonction aux points charnières, ici $P_m(1) = m - 3$; les limites aux bornes du domaine ; et enfin une discussion selon le paramètre. En échange de ce travail, on obtient le nombre exact et une localisation de chaque solution, ce qui permet ensuite de l'encadrer comme en 3.b.

4.c. Ce que la partie A donnerait sur la partie B.

Sur I_k , la dérivée $\varphi'(x) = \tan^2 x$ s'annule en un point exactement, à savoir $k\pi$. La question 1.b, appliquée avec $n = 1$ racine de la dérivée, donnerait donc : φ admet **au plus deux** racines sur I_k .

Ce n'est **pas optimal**, puisque la réponse exacte est une. La raison est identifiable : le corollaire ne sait pas que la dérivée, bien que nulle en un point, ne **change pas de signe** en ce point. Une racine de f' où f' garde le même signe des deux côtés ne casse pas la monotonie, donc elle n'autorise pas de racine supplémentaire pour f ; le comptage brut ne fait pas cette distinction, et il perd une unité.

La même remarque valait déjà dans la partie A : la majoration « au plus deux » était atteinte pour $m < 3$, trop grande d'une unité pour $m = 3$, et fausse d'exactly deux unités pour $m > 3$.

Commentaire

Les deux méthodes ne s'opposent pas, elles s'emboîtent, et la façon efficace de traiter un comptage de racines est de les employer dans cet ordre.

D'abord Rolle, qui coûte le prix d'une dérivée et d'une équation, et qui fixe un plafond. Ce plafond a une vertu que l'on sous-estime : il dit **combien de solutions il faut chercher**, donc quand s'arrêter. Ayant établi « au plus deux », on sait que trouver deux solutions clôt la question, et qu'il est inutile d'explorer plus loin.

Ensuite les variations, qui coûtent une étude complète et qui remplissent ce plafond, ou révèlent qu'il ne l'est pas.

Deux points de rigueur traversent l'exercice, et ce sont ceux que les correcteurs sanctionnent.

Les points fournis par Rolle doivent être distincts, sans quoi le comptage s'effondre. C'est le rôle de l'argument des intervalles ouverts disjoints à la question **1.b** : ce n'est pas une précaution de style, c'est la clé de la démonstration.

« **Exactement une solution** » est toujours deux affirmations. L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires, donc de la continuité et d'un changement de signe ; l'unicité vient de la stricte monotonie, donc du signe de la dérivée. Écrire l'un et croire avoir écrit l'autre est la faute la plus fréquente sur ce type de question, et elle est invisible pour celui qui la commet.

Exercice 11 ★★★★★ Accroissements finis généralisés et règle de L'Hôpital

Notions : Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes, Extremum local intérieur et théorème de Rolle

Partie A. Le théorème des accroissements finis généralisés

Soient $a < b$ deux réels, et f et g deux fonctions **continues** sur $[a, b]$ et **dérivables** sur $]a, b[$. On suppose de plus que g' **ne s'annule en aucun point** de $]a, b[$.

1. Démontrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. On pose, pour $x \in [a, b]$,

$$h(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x).$$

Vérifier **une par une** les trois hypothèses du théorème de Rolle pour h , puis en déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. Que devient cet énoncé lorsque g est la fonction $x \mapsto x$?

Partie B. La règle de L'Hôpital

4. Soient I un intervalle, a un point de I , et u, v deux fonctions continues sur I , dérivables sur $I \setminus \{a\}$, telles que

$$u(a) = v(a) = 0,$$

et telles que v' ne s'annule en aucun point de $I \setminus \{a\}$. On suppose enfin que $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ tend vers un réel ℓ quand x tend vers a .

- a. Démontrer que $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, de sorte que le quotient $\frac{u(x)}{v(x)}$ a un sens.

- b. Démontrer que $\frac{u(x)}{v(x)}$ tend vers ℓ quand x tend vers a .

5. Calculer les trois limites suivantes en appliquant la règle, et en vérifiant à chaque étape que la forme est bien indéterminée :

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3};$

- b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^2 x}{x^2};$

- c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2}.$

Partie C. Deux façons d'échouer, et deux fautes de copie

6. La réciproque est fausse. On pose, sur $\mathbb{R}$,

$$u(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, \quad u(0) = 0, \quad \text{et} \quad v(x) = \sin x.$$

Démontrer que $\frac{u(x)}{v(x)}$ admet une limite en 0, alors que $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ n'en admet aucune. Que faut-il en conclure sur le sens de lecture de la règle ?

7. Un calcul qui tourne en rond. On considère $q(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- Étudier la limite de q en 0. La règle de L'Hôpital s'applique-t-elle ? Que donnerait son application aveugle ?
 - Étudier la limite de q en $+\infty$. Que produit l'application répétée de la règle ? Conclure par une autre méthode.
- 8.** Citer deux erreurs fréquentes dans l'emploi de cette règle, et les illustrer sur les exemples de l'exercice.

Corrigé

1. Les deux valeurs de g aux bornes sont distinctes

Raisonnons par l'absurde et supposons $g(a) = g(b)$. Les trois hypothèses du théorème de Rolle sont alors vérifiées par g : elle est continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'ouvert $]a, b[$, et prend la même valeur aux deux bornes. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle g' ne s'annule nulle part sur $]a, b[$.

Donc $g(a) \neq g(b)$, et le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ a un sens. $\square$

Ce que cette question met en place. L'hypothèse de l'énoncé porte sur g' , et ce dont on a besoin porte sur g : c'est Rolle qui fait le passage, et il le fait dans le sens de la contraposée. On retiendra le procédé, qui reviendra à la question 4.a presque mot pour mot.

2. La démonstration du théorème

Les trois hypothèses de Rolle pour h . Notons $A = f(b) - f(a)$ et $B = g(b) - g(a)$, qui sont deux **constantes** : elles ne dépendent pas de x . Alors $h = Ag - Bf$.

- *Continuité sur $[a, b]$.* Les fonctions f et g sont continues sur $[a, b]$ par hypothèse, donc toute combinaison linéaire à coefficients constants l'est aussi. Donc h est continue sur $[a, b]$.
- *Dérivabilité sur $]a, b[$.* Même argument avec la dérivabilité : h est dérivable sur $]a, b[$, et

$$h'(x) = A g'(x) - B f'(x).$$

- *Égalité des valeurs aux bornes.* On calcule les deux valeurs séparément :

$$h(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$

les deux termes en $f(a)g(a)$ se détruisant, et

$$h(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b),$$

les deux termes en $f(b)g(b)$ se détruisant. Les deux résultats sont égaux, donc $h(a) = h(b)$.

L'application du théorème. Les trois hypothèses étant vérifiées, le théorème de Rolle fournit un réel $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

La division, et ce qui l'autorise. Deux quantités doivent être non nulles pour conclure : $g'(c)$, qui ne l'est pas par hypothèse puisque $c \in]a, b[$, et $g(b) - g(a)$, qui ne l'est pas d'après la question 1. En divisant les deux membres par leur produit,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \square$$

Remarque

Pourquoi on ne peut pas se contenter d'appliquer deux fois l'égalité des accroissements finis. L'idée naïve consiste à écrire

$$f(b) - f(a) = f'(c_1)(b - a) \quad \text{et} \quad g(b) - g(a) = g'(c_2)(b - a),$$

puis à diviser. On obtient

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$

et ce n'est **pas** le résultat cherché : les deux points c_1 et c_2 sont fournis par deux applications distinctes du théorème, donc rien ne dit qu'ils soient égaux, et ils ne le sont pas en général. C'est exactement la faute contre laquelle l'exercice 09 met en garde : deux applications d'un théorème d'existence donnent deux points, qui se nomment différemment. Toute la valeur de la fonction auxiliaire h est là : elle réunit f et g dans une **seule** application de Rolle, donc elle produit un **seul** point c , le même pour les deux dérivées.

3. Le cas $g(x) = x$

Prenons pour g la fonction identité. Elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $g'(x) = 1$ ne s'annule jamais : les hypothèses sont vérifiées. Comme $g(b) - g(a) = b - a$ et $g'(c) = 1$, la conclusion devient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

C'est exactement l'**égalité des accroissements finis**. Le théorème de la partie A la contient donc comme cas particulier, ce qui justifie son nom : il est bien une généralisation, et non un énoncé parallèle.

4.a. Le dénominateur ne s'annule pas

Soit $x \in I \setminus \{a\}$ et supposons $v(x) \neq 0$. Comme on a aussi $v(a) \neq 0$, la fonction v prend la même valeur en a et en x . Appliquons-lui le théorème de Rolle sur le segment d'extrémités a et x , contenu dans I : v y est continue, elle est dérivable sur l'ouvert correspondant, qui ne contient pas a , et ses valeurs aux deux extrémités sont égales. Il existe donc un point de cet ouvert où v' s'annule, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, et le quotient $\frac{u(x)}{v(x)}$ est défini sur $I \setminus \{a\}$. $\square$

4.b. La règle de L'Hôpital

L'égalité fondamentale. Soit $x \in I$, $x \neq a$. Sur le segment d'extrémités a et x , les fonctions u et v vérifient les hypothèses de la partie A : continues sur le segment, dérivables sur l'ouvert — qui ne contient ni a ni x si l'on prend garde à ce que a soit une extrémité, ce qui est le cas — et v' ne s'annule pas sur cet ouvert. Le théorème des accroissements finis généralisés fournit donc un point c_x **strictement compris** entre a et x tel que

$$\frac{u(x) - u(a)}{v(x) - v(a)} = \frac{u'(c_x)}{v'(c_x)}.$$

Comme $u(a) = v(a) = 0$, cette égalité s'écrit

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c_x)}{v'(c_x)}.$$

Le passage à la limite. L'idée est claire : quand $x \rightarrow a$, l'encadrement $a < c_x < x$ force $c_x \rightarrow a$ avec $c_x \neq a$, et le membre de droite tend donc vers ℓ . Le cours rédige ainsi, par composition des limites, et c'est correct. Il vaut cependant la peine de l'écrire une fois **à la main**, car $x \mapsto c_x$ n'est pas une fonction donnée par une formule : c'est un point **choisi** pour chaque x , dont on ne connaît que la position. La démonstration en ε - δ n'utilise que cette position, et elle tient en trois lignes.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{u'}{v'}$ tend vers ℓ en a , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in I, \quad 0 < |t - a| \leq \delta \implies \left| \frac{u'(t)}{v'(t)} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Soit alors $x \in I$ tel que $0 < |x - a| \leq \delta$. Le point c_x est strictement compris entre a et x , donc

$$0 < |c_x - a| < |x - a| \leq \delta,$$

et $c_x \in I$. L'implication ci-dessus s'applique donc au réel $t = c_x$, et l'égalité fondamentale donne

$$\left| \frac{u(x)}{v(x)} - \ell \right| = \left| \frac{u'(c_x)}{v'(c_x)} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\left| \frac{u(x)}{v(x)} - \ell \right| \leq \varepsilon$ dès que $0 < |x - a| \leq \delta$: par définition,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \ell. \quad \square$$

Ce que cette rédaction met en évidence. Le point c_x n'a jamais été traité comme la valeur d'une fonction : on s'est contenté de dire qu'il est **assez proche de a** , ce qui est tout ce dont on a besoin.

Remarque

La version du cours est un peu plus générale, et la démonstration ne change pas. Elle suppose seulement $u(x) \rightarrow 0$ et $v(x) \rightarrow 0$, sans exiger que a appartienne au domaine : il suffit alors de poser $u(a) = v(a) = 0$, ce qui rend les deux fonctions continues en a et ramène exactement à la situation ci-dessus. Elle autorise de plus une limite ℓ infinie, et a peut être une borne de l'intervalle. Les variantes pour la forme $\frac{\infty}{\infty}$ et pour $a = \pm\infty$ sont admises, et l'on s'en servira à la question **7.b**.

5. Trois limites

Méthode

Comment on rédige une application de la règle. Trois points, et le troisième est le plus surprenant.

1. **Vérifier la forme.** On calcule la limite du numérateur et celle du dénominateur, et l'on écrit qu'il s'agit d'une forme $\frac{0}{0}$. Sans cette vérification, la règle ne s'applique pas, et la question **7** montre qu'elle donne alors un résultat faux.
2. **Dériver séparément** le numérateur et le dénominateur. On n'écrit **jamais** la dérivée du quotient : ce n'est pas ce que dit le théorème.
3. **Lire la chaîne dans le bon sens.** Quand il faut appliquer la règle plusieurs fois, c'est la limite du **dernier** quotient qui existe, et elle se propage vers le premier. La rédaction honnête calcule donc de bas en haut : on obtient $\frac{u''}{v''} \rightarrow \ell$, on en déduit $\frac{u'}{v'} \rightarrow \ell$, puis $\frac{u}{v} \rightarrow \ell$. Écrire les égalités dans l'autre sens, comme une suite de transformations, revient à supposer ce qu'on veut démontrer.

5.a. Posons $u(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ et $v(x) = x^3$ sur $I = \mathbb{R}$, avec $a = 0$.

Les formes. On a $u(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ et $v(0) = 0$: forme $\frac{0}{0}$. Les dérivées successives sont

$$u'(x) = e^x + e^{-x} - 2, \quad u''(x) = e^x - e^{-x}, \quad u'''(x) = e^x + e^{-x},$$

$$v'(x) = 3x^2, \quad v''(x) = 6x, \quad v'''(x) = 6.$$

On vérifie $u'(0) = 1 + 1 - 2 = 0$ et $v'(0) = 0$: encore une forme $\frac{0}{0}$. Puis $u''(0) = 0$ et $v''(0) = 0$: forme $\frac{0}{0}$ à nouveau. Enfin $u'''(0) = 2$ et $v'''(0) = 6$, qui n'est pas nul : la chaîne s'arrête.

Les dénominateurs ne s'annulent pas ailleurs qu'en 0. On a $v'(x) = 3x^2 \neq 0$ et $v''(x) = 6x \neq 0$ pour $x \neq 0$: les hypothèses sont vérifiées à chaque étage.

La conclusion, de bas en haut. Comme $\frac{u'''(x)}{v'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{6}$ tend vers $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, la règle appliquée

à u'' et v'' donne $\frac{u''}{v''} \rightarrow \frac{1}{3}$; appliquée à u' et v' , elle donne $\frac{u'}{v'} \rightarrow \frac{1}{3}$; appliquée à u et v , elle donne enfin

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

5.b. Posons $u(x) = \cos 2x - \cos^2 x$ et $v(x) = x^2$, avec $a = 0$.

La forme. $u(0) = 1 - 1 = 0$ et $v(0) = 0$: forme $\frac{0}{0}$.

Le premier étage. En dérivant, et en utilisant $2 \sin x \cos x = \sin 2x$:

$$u'(x) = -2 \sin 2x - 2 \cos x \times (-\sin x) = -2 \sin 2x + \sin 2x = -\sin 2x, \quad v'(x) = 2x.$$

On a $u'(0) = 0$ et $v'(0) = 0$: encore une forme $\frac{0}{0}$, et $v'(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$.

Le second étage. $u''(x) = -2 \cos 2x$ et $v''(x) = 2$, donc $\frac{u''(x)}{v''(x)} \rightarrow \frac{-2}{2} = -1$. En remontant la chaîne,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^2 x}{x^2} = -1.$$

Remarque

Le raccourci qu'il valait mieux voir. Les formules de duplication donnent $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, donc

$$\cos 2x - \cos^2 x = -\sin^2 x.$$

Le quotient valait donc $-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$, dont la limite -1 s'obtient d'une ligne avec la limite usuelle $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

La leçon n'est pas que la règle de L'Hôpital soit mauvaise, mais qu'elle n'est **pas la première chose à essayer**. Une simplification algébrique, une factorisation ou une limite usuelle sont presque toujours plus courtes et moins risquées. La règle est l'outil de dernier recours, et elle sert surtout quand aucune simplification n'apparaît.

5.c. Posons $u(x) = (1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3}$ et $v(x) = x^2$, sur $I =]-1, +\infty[$ et $a = 0$.

La forme. $u(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ et $v(0) = 0$: forme $\frac{0}{0}$.

Le premier étage. La fonction $x \mapsto (1+x)^{1/3}$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$, où $1+x > 0$, de dérivée $\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$. Donc

$$u'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} - \frac{1}{3}, \quad v'(x) = 2x.$$

On a $u'(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ et $v'(0) = 0$: forme $\frac{0}{0}$, et $v'(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$.

Le second étage.

$$u''(x) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-5/3} = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}, \quad v''(x) = 2,$$

donc $\frac{u''(x)}{v''(x)} = -\frac{1}{9}(1+x)^{-5/3} \rightarrow -\frac{1}{9}$. En remontant,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2} = -\frac{1}{9}.$$

6. La réciproque est fausse

Les hypothèses sont en place. La fonction u est celle de l'exercice 04 avec $\alpha = 2$: elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ et

$$u'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

La fonction $v = \sin$ vérifie $v(0) = 0$, et $v'(x) = \cos x$ ne s'annule pas sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ privé de 0 — ni même en 0. Prenons cet intervalle comme I : toutes les hypothèses de la question 4 sont satisfaites, **sauf** celle qui porte sur l'existence de la limite de $\frac{u'}{v'}$.

Le quotient $\frac{u}{v}$ a une limite. Pour $x \in I$, $x \neq 0$,

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \times x \sin \frac{1}{x}.$$

Le premier facteur tend vers 1, par la limite usuelle. Le second tend vers 0, car $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1 \times 0 = 0.$$

Le quotient $\frac{u'}{v'}$ n'en a aucune. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Reprenons les deux suites de l'exercice 04 : $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, toutes deux formées de réels non nuls tendant vers 0. On y avait calculé $u'(x_n) = -1$ et $u'(y_n) = 1$. Comme $\cos x_n \rightarrow \cos 0 = 1$ et $\cos y_n \rightarrow 1$, on obtient

$$\frac{u'(x_n)}{v'(x_n)} = \frac{-1}{\cos x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1, \quad \frac{u'(y_n)}{v'(y_n)} = \frac{1}{\cos y_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Deux suites tendant vers 0 le long desquelles le quotient tend vers deux valeurs différentes : par la caractérisation séquentielle, $\frac{u'}{v'}$ n'a pas de limite en 0. $\square$

La conclusion sur le sens de lecture. La règle de L'Hôpital affirme une implication, et une seule :

$$\frac{u'}{v'} \text{ a une limite} \implies \frac{u}{v} \text{ a la même limite.}$$

La réciproque est fausse, et cet exemple le démontre. Il en découle une conséquence pratique importante : **si $\frac{u'}{v'}$ n'a pas de limite, on ne peut rien conclure.** On ne conclut surtout pas que $\frac{u}{v}$ n'en a pas — ici elle en a une, égale à 0. Il faut alors abandonner la règle et employer autre chose, comme la factorisation utilisée ci-dessus.

7.a. Une forme qui n'est pas indéterminée

Étudions $q(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en 0. Le numérateur tend vers $1 - 1 = 0$, mais le dénominateur tend vers $1 + 1 = 2$, qui **n'est pas nul**. Il n'y a donc aucune indétermination : le quotient d'une fonction tendant vers 0 par une fonction tendant vers 2 tend vers 0, et

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = \frac{0}{2} = 0.$$

La règle de L'Hôpital ne s'applique pas, faute d'hypothèse $v(a) = 0$.

Ce que donnerait son application aveugle. En dérivant numérateur et dénominateur sans réfléchir, on obtient

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

dont le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 0 : ce quotient n'a pas de limite finie, sa valeur absolue tend vers $+\infty$. On aurait donc conclu que la limite est infinie, alors qu'elle vaut 0. **La faute ne se voit pas dans le calcul, elle se voit dans l'hypothèse non vérifiée**, et c'est pourquoi la vérification de la forme indéterminée n'est pas une formalité.

7.b. Un calcul qui tourne en rond

Étudions maintenant q en $+\infty$. Le numérateur $e^x - e^{-x}$ et le dénominateur $e^x + e^{-x}$ tendent tous deux vers $+\infty$: c'est une forme $\frac{\infty}{\infty}$, qui est bien indéterminée. La version de la règle démontrée à la question 4 ne la couvre pas, puisqu'elle suppose $u(a) = v(a) = 0$; il en existe une variante pour cette forme, qu'on se contentera de mentionner.

Même en l'admettant, regardons ce qu'elle produit. En dérivant séparément,

$$\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

qui est de nouveau une forme $\frac{\infty}{\infty}$: le numérateur et le dénominateur ont simplement été **échangés**. Une seconde application redonne

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = q(x),$$

c'est-à-dire le quotient de départ. Le procédé est donc **périodique de période deux** : il ne s'arrêtera jamais, et il ne conclura jamais.

La méthode qui conclut. On factorise par le terme dominant. Pour tout réel x , comme $e^x \neq 0$,

$$q(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $e^{-2x} \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

La fonction q n'est autre que $\tanh$, dont on retrouve la limite 1 en $+\infty$. $\square$

Le diagnostic. La règle de L'Hôpital ne garantit aucun progrès : elle remplace un quotient par un autre, en espérant que le second soit plus simple. Quand la dérivation ne simplifie rien — ici parce que l'exponentielle est sa propre dérivée — il faut en changer, et le signe qui doit alerter est de retomber sur une expression déjà rencontrée.

8. Les deux erreurs à ne pas commettre

Première erreur : ne pas vérifier que la forme est indéterminée. C'est la faute de la question 7.a, et elle est particulièrement dangereuse parce que le calcul qui suit est correct : ce sont les hypothèses qui manquent, et rien dans les lignes suivantes ne le signale. Le remède tient en une phrase à écrire avant toute dérivation : « le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0, la forme est indéterminée ».

Seconde erreur : dériver le quotient au lieu de dériver séparément le numérateur et le dénominateur. La règle porte sur $\frac{u'}{v'}$, qui n'a aucun rapport avec $\left(\frac{u}{v}\right)'$. Sur l'exemple de la question 5.b, la première quantité est

$$\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{-\sin 2x}{2x},$$

tandis que la dérivée du quotient vaut

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{-\sin 2x \times x^2 - (\cos 2x - \cos^2 x) \times 2x}{x^4}.$$

Les deux expressions n'ont ni la même forme, ni la même limite, et la seconde ne sert à rien dans ce contexte. On notera que l'écriture $\frac{u'}{v'}$ ne comporte **aucune barre de fraction dérivée** : c'est un quotient de deux dérivées, pas la dérivée d'un quotient.

Commentaire

La chaîne logique de cet exercice se lit d'un bout à l'autre : **Rolle** donne les accroissements finis généralisés, par une fonction auxiliaire ; les accroissements finis généralisés donnent la règle de L'Hôpital, par un passage à la limite ; et l'égalité des accroissements finis en est le cas $g(x) = x$. Trois énoncés, un seul mécanisme.

Ce mécanisme est celui de la **fonction auxiliaire**, et il vaut d'être isolé. On veut une conclusion qui mêle f et g en un seul point c ; on fabrique donc une combinaison de f et de g qui prend la même valeur en a et en b ; Rolle produit alors un point, et un seul, où sa dérivée s'annule. Ce schéma resservira à l'identique pour la formule de Taylor-Lagrange, où la fonction auxiliaire est un peu plus longue à écrire mais où le raisonnement est le même.

Restent trois avertissements sur la règle de L'Hôpital, qui est l'énoncé le plus mal employé de tout le chapitre.

Elle se lit dans un sens. La question 6 exhibe deux fonctions dont le quotient a une limite alors que le quotient des dérivées n'en a pas. Une hypothèse non vérifiée n'autorise aucune conclusion, ni positive, ni négative.

Elle ne dispense pas de regarder l'expression. Dans la question 5.b, une identité trigonométrique donnait la réponse en une ligne, là où la règle demandait deux dérivations. Le réflexe utile est d'abord de simplifier.

Elle peut ne jamais s'arrêter. La question 7.b montre un quotient sur lequel la dérivation permute le numérateur et le dénominateur : le procédé boucle, et aucune insistance ne le fera aboutir.

Exercice 12 ★ Chercher le point c de l'égalité des accroissements finis

Notions : Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

L'égalité des accroissements finis affirme, pour f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, qu'il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Tout l'exercice consiste à regarder ce que ce réel c est, et surtout ce qu'il n'est pas.

- Pour chacune des trois situations suivantes, vérifier les hypothèses du théorème, puis déterminer **tous** les réels c qu'il fournit.
 - $f(x) = x^2$ sur $[1, 4]$. Où se situe le point obtenu par rapport aux deux extrémités ? Refaire le calcul sur un segment $[a, b]$ quelconque.
 - $g(x) = \ln x$ sur $[1, e]$. Comparer le point obtenu à la moyenne arithmétique et à la moyenne géométrique des deux extrémités, c'est-à-dire à $\frac{1+e}{2}$ et à $\sqrt{e}$.
 - $h(x) = x^3$ sur $[-1, 2]$. L'équation obtenue a deux solutions réelles : combien en retient-on, et pourquoi ?
- Exhiber une fonction et un segment pour lesquels le théorème fournit **au moins deux** valeurs de c , puis une situation où il en fournit une infinité. Qu'en conclure sur l'expression « le point c donné par le théorème » ?
- Un radar tronçon mesure le temps mis par un véhicule pour parcourir une portion d'autoroute de 40 kilomètres, limitée à 110 km/h. Un véhicule met 20 minutes.
 - Modéliser la situation par une fonction, et énoncer les hypothèses que l'on suppose vérifiées.
 - Qu'affirme exactement l'égalité des accroissements finis ici ? Rédiger la conclusion en une phrase, sans rien affirmer de plus que le théorème.
 - L'automobiliste plaide qu'il n'a « pas forcément » dépassé la limite, le radar ne mesurant qu'une moyenne. Que lui répondre ?
- Voici une rédaction telle qu'on la lit sur une copie.
 - Soit f dérivable sur $[a, b]$.
 - D'après l'égalité des accroissements finis, $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
 - Le point c est le milieu de $[a, b]$, donc $f(b) - f(a) = (b - a)f'(m)$ avec $m = \frac{a+b}{2}$.
 - On en déduit $f(b)$ dès que l'on connaît $f(a)$ et l'expression de f' .

Relever toutes les fautes, ligne par ligne, et dire ce que le théorème autorise réellement à faire du réel c .

Corrigé

1.a Hypothèses. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est polynomiale, donc continue sur $[1, 4]$ et dérivable sur $]1, 4[$, avec $f'(x) = 2x$. Les deux hypothèses du théorème sont vérifiées.

Le calcul. La pente de la corde vaut

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16 - 1}{3} = 5.$$

Le théorème affirme l'existence d'au moins un $c \in]1, 4[$ tel que $f'(c) = 5$, c'est-à-dire $2c = 5$. Cette équation a pour unique solution $c = \frac{5}{2}$, et $\frac{5}{2}$ appartient bien à $]1, 4[$. Le théorème fournit donc ici **un seul** réel, $c = \frac{5}{2}$.

Sa position. Le milieu de $[1, 4]$ vaut $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$: le point obtenu **est** le milieu du segment.

Sur un segment quelconque. Soient $a < b$. La pente de la corde vaut

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{b - a} = a + b,$$

et l'équation $2c = a + b$ donne $c = \frac{a+b}{2}$, qui appartient à $]a, b[$. Pour la fonction carré, le point est **toujours** le milieu, quel que soit le segment.

Le même calcul mené sur $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $\alpha \neq 0$ donne la pente $\alpha(a+b) + \beta$ et l'équation $2\alpha c + \beta = \alpha(a+b) + \beta$, donc encore $c = \frac{a+b}{2}$. **Ce phénomène est une particularité des polynômes de degré 2, et c'est précisément lui qui fabrique la fausse intuition corrigée à la question 4.**

1.b Hypothèses. La fonction $g : x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, qui contient $[1, e]$; en particulier elle est continue sur $[1, e]$ et dérivable sur $]1, e[$, avec $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Le calcul. La pente de la corde vaut

$$\frac{\ln e - \ln 1}{e - 1} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1},$$

et l'équation $\frac{1}{c} = \frac{1}{e-1}$ a pour unique solution $c = e - 1 \approx 1,718282$, qui appartient bien à $]1, e[$ puisque $1 < 1,718 < 2,719$.

La comparaison. Les trois nombres valent

$$\sqrt{e} \approx 1,648721, \quad c = e - 1 \approx 1,718282, \quad \frac{1+e}{2} \approx 1,859141.$$

Le point fourni par le théorème n'est **ni** la moyenne arithmétique **ni** la moyenne géométrique des extrémités : sur cet exemple il est strictement compris entre les deux, sans coïncider avec aucune.

Le cas général. Sur un segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, l'équation s'écrit $\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a}$, d'où

$$c = \frac{b - a}{\ln b - \ln a}.$$

C'est une troisième façon de « moyenner » a et b , produite par le logarithme et par lui seul. Il n'y a donc pas de formule universelle donnant c : chaque fonction fabrique la sienne. $\square$

1.c Hypothèses. La fonction $h : x \mapsto x^3$ est polynomiale, donc continue sur $[-1, 2]$ et dérivable sur $] -1, 2[$, avec $h'(x) = 3x^2$.

Le calcul. La pente de la corde vaut

$$\frac{h(2) - h(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8 - (-1)}{3} = \frac{9}{3} = 3,$$

et l'équation $3c^2 = 3$ équivaut à $c^2 = 1$, donc à $c = -1$ ou $c = 1$.

Le tri. Le théorème place c dans l'intervalle **ouvert** $] -1, 2[$. Or -1 est une extrémité du segment, il n'appartient pas à $] -1, 2[$: cette solution est à rejeter. Le théorème fournit donc **un seul** réel, $c = 1$.

Il faut retenir le geste : résoudre $h'(c) = p$ est une équation posée sur $\mathbb{R}$, et sa résolution ne connaît pas le segment. **L'intersection avec $]a, b[$ est une étape à part entière**, et la rédaction doit la faire apparaître.

2. Deux valeurs. Prenons $f = \sin$ sur $[0, 2\pi]$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc les hypothèses sont vérifiées. La pente de la corde vaut

$$\frac{\sin(2\pi) - \sin(0)}{2\pi - 0} = \frac{0 - 0}{2\pi} = 0,$$

et l'équation $\cos c = 0$ avec $c \in]0, 2\pi[$ a exactement deux solutions,

$$c = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{3\pi}{2}.$$

Les deux conviennent, et le théorème ne permet pas de choisir entre elles.

Une infinité. Prenons pour f une fonction constante sur un segment $[a, b]$ quelconque, par exemple $f(x) = 7$ sur $[0, 1]$. La pente de la corde est nulle, la dérivée est nulle partout : **tout** point de $]0, 1[$ convient. Le théorème en fournit une infinité.

La conclusion de langage. L'article défini de « le point c » est fautif : il suggère une unicité que le théorème n'affirme nulle part. La rédaction correcte est « **il existe $c \in]a, b[$ tel que ...** », et l'on n'écrit jamais « soit c le point donné par le théorème » sans avoir démontré, à part, qu'il n'y en a qu'un. C'est un théorème d'existence, exactement comme le théorème de Rolle dont il descend.

3.a Notons t le temps écoulé depuis l'entrée sur le tronçon, exprimé en heures, et $s(t)$ la distance parcourue depuis cette entrée, exprimée en kilomètres. Vingt minutes valent $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ heure, et les données du radar sont

$$s(0) = 0 \quad \text{et} \quad s\left(\frac{1}{3}\right) = 40.$$

Les hypothèses que l'on suppose vérifiées, et qu'il faut énoncer parce qu'elles sont l'objet même du théorème, sont les suivantes : s est **continue** sur $[0, 1/3]$, un véhicule ne se téléportant pas, et **dérivable** sur $]0, 1/3[$, sa dérivée $s'(t)$ étant par définition la vitesse instantanée en kilomètres par heure.

3.b La pente de la corde vaut

$$\frac{s(1/3) - s(0)}{1/3 - 0} = \frac{40}{1/3} = 120,$$

c'est la vitesse moyenne, en km/h. L'égalité des accroissements finis fournit un réel $c \in]0, 1/3[$ tel que $s'(c) = 120$.

La conclusion s'écrit en une phrase : **il a existé au moins un instant, strictement compris entre l'entrée et la sortie du tronçon, où la vitesse instantanée du véhicule valait exactement 120 km/h.**

Et rien de plus. Le théorème ne dit ni à quel instant, ni combien de fois, ni si la vitesse est montée plus haut, ni pendant combien de temps elle a dépassé 110.

3.c L'objection confond deux énoncés. Le radar mesure bien une moyenne, mais le théorème transforme cette moyenne en une **valeur réellement atteinte** : il existe un instant où le compteur indiquait 120. Comme $120 > 110$, le dépassement est certain, et il n'est pas seulement probable.

Ce qui reste exact dans le propos de l'automobiliste, c'est que le calcul ne localise rien : on ignore où et quand, et la vitesse a très bien pu être inférieure à 110 sur presque tout le trajet.

Remarque

Un second chemin, plus faible. On peut raisonner par contraposée sans nommer de valeur atteinte : si l'on avait $s'(t) \leq 110$ pour tout t , l'inégalité des accroissements finis donnerait

$$s\left(\frac{1}{3}\right) - s(0) \leq 110 \times \frac{1}{3} \approx 36,7,$$

ce qui contredit la distance de 40 km. On obtient ainsi « la vitesse a dépassé 110 à un moment », ce qui suffit à la verbalisation, mais on perd la valeur exacte 120. C'est la différence entre l'égalité et l'inégalité des accroissements finis, et l'exercice 13 exploite systématiquement la seconde.

4. Ligne 1 : une maladresse, pas une faute. Supposer f dérivable sur le segment **fermé** $[a, b]$ est plus fort que nécessaire : le théorème ne demande que la continuité sur $[a, b]$ et la dérivabilité sur $]a, b[$. La copie ne dit rien de faux, mais elle s'interdit toutes les fonctions à tangente verticale aux extrémités, qui sont justement celles où cette dissymétrie sert.

Ligne 2 : le quantificateur manque. La formule est la bonne, mais le réel c y apparaît sans avoir été introduit. Il faut écrire « **il existe** $c \in]a, b[$ **tel que** », faute de quoi la ligne suivante peut lui attribuer n'importe quelle valeur, ce qui est exactement ce qui se produit.

Ligne 3 : c'est la faute. Le réel c n'est pas le milieu de $[a, b]$ en général. La question 1.b en donne le contre-exemple : pour $g = \ln$ sur $[1, e]$, le seul c possible est $e - 1 \approx 1,718$, alors que le milieu vaut $\frac{1+e}{2} \approx 1,859$, et g' y prend des valeurs différentes. L'erreur est compréhensible, puisque la question 1.a montre que la propriété est vraie pour les polynômes de degré 2 ; **une propriété vraie sur un exemple n'est pas une propriété du théorème.**

Ligne 4 : la conclusion tombe avec la ligne 3. Même réparée, la ligne 3 ne donnerait rien : le théorème est un théorème d'**existence**, il ne produit aucune valeur de c , donc il ne permet jamais de calculer $f(b)$ à partir de $f(a)$. Une copie qui « calcule » avec l'égalité des accroissements finis se trompe de théorème.

Ce que le théorème autorise réellement. On sait de c une seule chose : **il appartient à** $]a, b[$. C'est peu, et c'est suffisant, car cela permet de lui appliquer toute majoration valable sur $]a, b[$. Si $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$, alors $|f'(c)| \leq M$, donc

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

On ne calcule pas $f'(c)$, on le **major**e : c'est l'inégalité des accroissements finis, et c'est de là que vient tout l'usage pratique du théorème. $\square$

Commentaire. Les quatre questions disent la même chose sous quatre éclairages. La question 1 montre que c existe, qu'il se calcule parfois, et que sa valeur dépend de la fonction bien plus que du segment. La question 2 montre qu'il n'est pas unique, ce qui interdit l'article défini. La question 3 montre ce que l'existence pure vaut dans la vraie vie : elle suffit à conclure, alors même qu'on ne sait rien de c . La question 4 montre l'erreur symétrique, celle qui consiste à vouloir en savoir trop.

Le fil est le suivant : un théorème d'existence ne se lit pas comme une formule. Il se lit comme une autorisation, et l'autorisation ici est de **majorer** une variation par la longueur du segment multipliée par une borne de la dérivée.

Exercice 13 ★★ Linéariser, et contrôler une erreur

Notions : Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes, Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité

L'inégalité des accroissements finis dit que si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

C'est l'outil qui transforme une information sur la dérivée en une majoration d'écart. Cet exercice l'emploie là où il sert vraiment : contrôler l'erreur d'une approximation.

- Propagation d'une incertitude de mesure.** Dans les deux situations suivantes, une grandeur est mesurée avec une incertitude de 10^{-3} , puis on lui applique une fonction. Majorer l'incertitude sur le résultat, et comparer l'incertitude **relative** d'entrée à celle de sortie.
 - L'arête d'un cube est mesurée à 5,000 cm près à 10^{-3} cm. On en calcule le volume.
 - La durée d'une période est mesurée à 0,250 s près à 10^{-3} s. On en calcule la fréquence, c'est-à-dire l'inverse de cette durée.
- Majorer $|\sin(1,01) - \sin(1)|$, puis comparer la majoration obtenue à l'écart exact donné par la calculatrice.
- De combien la fonction Arctan varie-t-elle entre 1 et 1,1 ? En donner un encadrement sans calculatrice, puis le vérifier.
- La linéarisation du physicien.** Justifier proprement l'approximation $\sin \theta \approx \theta$ pour un petit angle θ exprimé en radians, puis **majorer l'erreur commise** pour $\theta = 0,1$ rad, puis pour $\theta = 0,3$ rad. Comparer aux erreurs réelles.
- Question de rigueur.** La majoration employée dans tout l'exercice exige-t-elle que f soit dérivable partout, ou seulement sur l'intervalle considéré ? Que se passe-t-il si l'intervalle contient un point où f n'est pas dérivable ? Et si f' existe sur l'intervalle ouvert mais n'y est pas bornée ?

Corrigé

1.a La modélisation. Notons x la valeur exacte de l'arête, en centimètres, et u la fonction volume, $u(x) = x^3$. La mesure affirme $|x - 5| \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $x \in [4,999; 5,001]$. On veut majorer $|u(x) - u(5)|$.

Les hypothèses. La fonction u est polynomiale, donc continue sur le segment $[4,999; 5,001]$ et dérivable sur son intérieur, avec $u'(t) = 3t^2$.

La borne de la dérivée. Sur cet intervalle, $t \leq 5,001$ et $t > 0$, donc, la fonction carré étant croissante sur les réels positifs,

$$|u'(t)| = 3t^2 \leq 3 \times 5,001^2 = 3 \times 25,010001 = 75,030003 \leq 75,04.$$

La majoration. L'inégalité des accroissements finis, appliquée entre 5 et x (dans un sens ou dans l'autre, la valeur absolue s'en moque), donne

$$|u(x) - 125| \leq 75,04 \times |x - 5| \leq 75,04 \times 10^{-3} = 0,07504.$$

Le volume vaut donc 125 cm^3 à $0,08 \text{ cm}^3$ près.

Les incertitudes relatives. En entrée, $\frac{10^{-3}}{5} = 2 \times 10^{-4}$. En sortie, $\frac{0,075}{125} = 6 \times 10^{-4}$. **L'incertitude relative a été multipliée par 3**, et ce 3 est l'exposant de la fonction cube. Ce n'est pas une coïncidence : c'est la lecture, sur cet exemple, du fait que $u'(t)t/u(t) = 3$.

1.b La modélisation. Notons T la valeur exacte de la période, en secondes, et v la fonction inverse, $v(t) = \frac{1}{t}$. La mesure affirme $T \in [0,249; 0,251]$, et la fréquence calculée est $v(0,250) = 4$ hertz.

Les hypothèses. La fonction v est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, qui contient le segment $[0,249; 0,251]$, avec $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$.

La borne de la dérivée. Sur ce segment, $t \geq 0,249 > 0$, donc $t^2 \geq 0,249^2 = 0,062001$ et, en passant à l'inverse entre réels strictement positifs,

$$|v'(t)| = \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{0,062001} \approx 16,128 \leq 16,13.$$

La majoration. L'inégalité des accroissements finis donne

$$|v(T) - 4| \leq 16,13 \times 10^{-3} \approx 1,61 \times 10^{-2}.$$

La fréquence vaut donc 4 Hz à $1,7 \times 10^{-2}$ Hz près.

Les incertitudes relatives. En entrée, $\frac{10^{-3}}{0,250} = 4 \times 10^{-3}$. En sortie, $\frac{1,61 \times 10^{-2}}{4} \approx 4,0 \times 10^{-3}$.

Elles sont égales, et l'exposant de $t \mapsto t^{-1}$ vaut -1 , de valeur absolue 1.

Méthode

Comment on rédige une propagation d'incertitude. Quatre lignes, toujours les mêmes.

1. Écrire l'intervalle dans lequel vit la grandeur exacte : c'est le segment sur lequel on va travailler, et il est **borné**, ce qui est indispensable.
2. Vérifier que la fonction est continue sur ce segment et dérivable sur son intérieur.
3. Majorer $|f'|$ **sur ce segment et pas ailleurs** : c'est l'unique étape où l'on réfléchit, et c'est celle qui est sautée dans les copies.
4. Conclure par l'inégalité des accroissements finis, en gardant la valeur absolue jusqu'au bout.

L'erreur classique consiste à évaluer $|f'|$ **au point mesuré** au lieu de la majorer sur tout le segment. Cela donne presque toujours le bon ordre de grandeur, et ce n'est pourtant pas une démonstration : on écrirait $u'(5) = 75$ au lieu de 75,04, sans aucun droit de le faire.

2. Les hypothèses. La fonction $\sin$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[1; 1,01]$, avec $\sin' = \cos$.

La borne. On a $1,01 < \pi/2 \approx 1,5708$, donc $[1; 1,01] \subset [0, \pi/2]$, intervalle sur lequel $\cos$ est positive et décroissante. Pour tout $t \in [1; 1,01]$,

$$0 < \cos(1,01) \leq \cos t \leq \cos(1) \approx 0,540302.$$

La majoration. L'inégalité des accroissements finis donne

$$|\sin(1,01) - \sin(1)| \leq 0,540302 \times 0,01 \approx 5,403 \times 10^{-3}.$$

La comparaison. La calculatrice donne $\sin(1) \approx 0,841471$ et $\sin(1,01) \approx 0,846832$, donc un écart réel de

$$0,846832 - 0,841471 = 5,361 \times 10^{-3}.$$

La majoration vaut $5,403 \times 10^{-3}$: elle dépasse la valeur réelle de moins de 1%. Elle est donc excellente, et cela s'explique : sur un intervalle aussi court, $\cos$ ne varie presque pas, donc la borne $\cos(1)$ est presque atteinte.

Remarque

On peut même encadrer. L'égalité des accroissements finis donne $\sin(1,01) - \sin(1) = 0,01 \cos c$ pour un certain $c \in]1; 1,01[$, et l'encadrement de $\cos c$ ci-dessus fournit alors

$$5,3186 \times 10^{-3} \leq \sin(1,01) - \sin(1) \leq 5,4030 \times 10^{-3},$$

en utilisant $\cos(1,01) \approx 0,531860$. La valeur exacte, $5,3609 \times 10^{-3}$, tombe bien à l'intérieur. C'est le luxe que l'égalité offre et que l'inégalité perd : les deux côtés au lieu d'un.

3. Les hypothèses. La fonction $\varphi = \text{Arctan}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

L'encadrement de la dérivée, sans calculatrice. Pour $t \in [1; 1,1]$, on a $1 \leq t^2 \leq 1,21$, donc $2 \leq 1+t^2 \leq 2,21$, et le passage à l'inverse entre réels strictement positifs renverse ces inégalités :

$$\frac{1}{2,21} \leq \varphi'(t) \leq \frac{1}{2}.$$

L'encadrement de la variation. L'égalité des accroissements finis sur $[1; 1,1]$ fournit $c \in]1; 1,1[$ tel que

$$\text{Arctan}(1,1) - \text{Arctan}(1) = 0,1 \times \varphi'(c),$$

et l'encadrement précédent donne

$$\frac{0,1}{2,21} \leq \text{Arctan}(1,1) - \text{Arctan}(1) \leq \frac{0,1}{2},$$

c'est-à-dire, en effectuant les deux divisions à la main,

$$0,0452 \leq \text{Arctan}(1,1) - \text{Arctan}(1) \leq 0,0500.$$

Au passage, la variation est strictement positive, ce qui redonne la croissance de Arctan sur ce segment.

La vérification. La calculatrice donne $\text{Arctan}(1) \approx 0,785398$ et $\text{Arctan}(1,1) \approx 0,832981$, soit une variation de 0,047583. Elle est bien dans l'encadrement. $\square$

Ce que coûte cet encadrement. Sa largeur vaut 0,0048, soit environ 10% de la valeur cherchée : c'est le prix d'une méthode qui n'utilise **que** les deux valeurs extrêmes de φ' sur le segment. On remarquera que la moyenne des deux bornes, 0,0476, approche la valeur exacte à 4×10^{-5} près, soit cent fois mieux que la largeur de l'encadrement, mais que rien dans ce qui précède ne le garantissait : c'est une observation, pas un résultat.

4. La justification de l'approximation. La fonction $\sin$ est dérivable en 0, avec $\sin(0) = 0$ et $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. Son approximation affine en 0, c'est-à-dire l'équation de sa tangente en ce point, est donc

$$y = \sin(0) + \sin'(0)(\theta - 0) = \theta.$$

Dire « $\sin \theta \approx \theta$ » n'est donc rien d'autre que remplacer la courbe par sa tangente en 0. C'est légitime **au voisinage de 0**, et la phrase du physicien ne devient une mathématique que lorsqu'on chiffre l'erreur.

La majoration de l'erreur. Posons $g(\theta) = \sin \theta - \theta$. Alors $g(0) = 0$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(t) = \cos t - 1, \quad \text{donc} \quad |g'(t)| = 1 - \cos t,$$

puisque $\cos t \leq 1$ pour tout t . Soit $\theta \in]0, \pi/2]$. Sur $[0, \theta]$, la fonction $\cos$ est décroissante, donc $t \mapsto 1 - \cos t$ est croissante et

$$|g'(t)| \leq 1 - \cos \theta \quad \text{pour tout } t \in [0, \theta].$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à g sur $[0, \theta]$ donne alors

$$|\sin \theta - \theta| = |g(\theta) - g(0)| \leq \theta(1 - \cos \theta). \quad \square$$

Pour $\theta = 0,1$ rad, soit environ 5,7 degrés. On a $\cos(0,1) \approx 0,995004$, donc $1 - \cos(0,1) \approx 4,996 \times 10^{-3}$ et

$$|\sin(0,1) - 0,1| \leq 0,1 \times 4,996 \times 10^{-3} \approx 5,0 \times 10^{-4}.$$

L'erreur réelle vaut $0,1 - 0,0998334 = 1,666 \times 10^{-4}$, soit 0,17% de la valeur de $\sin(0,1)$.

Pour $\theta = 0,3$ rad, soit environ 17,2 degrés. On a $\cos(0,3) \approx 0,955336$, donc $1 - \cos(0,3) \approx 4,466 \times 10^{-2}$ et

$$|\sin(0,3) - 0,3| \leq 0,3 \times 4,466 \times 10^{-2} \approx 1,34 \times 10^{-2}.$$

L'erreur réelle vaut $0,3 - 0,295520 = 4,480 \times 10^{-3}$, soit 1,5% de la valeur de $\sin(0,3)$.

Lecture. La règle du physicien est excellente en dessous de 0,1 rad, où l'erreur relative reste sous les deux millièmes, et elle se dégrade vite : à 0,3 rad on est déjà à un pour cent et demi. C'est cette dégradation, et non l'existence d'une erreur, qui décide de l'endroit où l'on arrête de linéariser.

On notera enfin que notre majoration surestime l'erreur réelle d'un facteur 3 dans les deux cas (5,0 contre 1,67, puis 13,4 contre 4,48). Elle est correcte, elle est très bon marché, et elle n'est pas fine : une majoration meilleure demande la formule de Taylor-Lagrange, et fait l'objet de l'exercice 22.

5. Ce que l'inégalité exige. Trois choses, et **seulement sur le segment considéré** : f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $|f'|$ majorée par M sur $]a, b[$. Le comportement de f ailleurs est sans objet. C'est important en pratique : à la question 1.b, la fonction $t \mapsto 1/t$ n'est pas dérivable en 0, et cela n'a aucune conséquence, puisque 0 n'est pas dans $[0,249; 0,251]$.

Un point de non-dérivabilité à l'intérieur, la fonction restant continue. La conclusion **survit**, à condition de couper. Supposons f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[\setminus \{d\}$ avec $a < d < b$, et $|f'| \leq M$ là où f' existe. On applique l'inégalité séparément sur $[a, d]$ et sur $[d, b]$, puis l'inégalité triangulaire :

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(d)| + |f(d) - f(a)| \leq M(b - d) + M(d - a) = M(b - a).$$

On retrouve exactement la même majoration. Le raisonnement s'étend à un nombre fini de mauvais points, et c'est ce qui rend l'outil utilisable sur les fonctions définies par morceaux.

Si la continuité tombe, tout tombe. Soit χ définie sur $\mathbb{R}$ par $\chi(x) = 0$ pour $x < 0$ et $\chi(x) = 1$ pour $x \geq 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle, donc $M = 0$ convient sur $\mathbb{R}^*$. Pourtant

$$|\chi(0,001) - \chi(-0,001)| = 1, \quad \text{alors que} \quad M \times 0,002 = 0.$$

La majoration est fautive. Ce n'est pas la dérivabilité en 0 qui manque, c'est la **continuité** : sans elle, la découpe précédente ne recolle plus. L'exercice 16 étudie ce phénomène pour lui-même.

Si f' existe mais n'est pas bornée. Le théorème s'applique encore, et il ne dit plus rien. Prenons $f(x) = x^{1/3}$ sur $[0, 1]$: elle est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ avec

$$f'(t) = \frac{1}{3} t^{-2/3},$$

quantité qui tend vers $+\infty$ quand $t \rightarrow 0^+$. Aucun réel M ne majore $|f'|$ sur $]0, 1[$: la conclusion s'écrit $|f(1) - f(0)| \leq +\infty$, ce qui est vrai et vide. En revanche, sur $[\delta, 1]$ avec $\delta > 0$, la borne $M = \frac{1}{3}\delta^{-2/3}$ est finie et l'inégalité redevient utile.

La question à se poser n'est donc jamais « le théorème s'applique-t-il ? » mais « le majorant de $|f'|$ est-il fini, et petit ? ». C'est là que se décide la valeur d'une majoration.

Commentaire. Les cinq questions emploient une seule inégalité, et l'endroit où le travail se fait est toujours le même : borner $|f'|$ sur le bon intervalle. Tout le reste est de la recopie.

Deux lectures méritent d'être retenues. D'abord, l'inégalité des accroissements finis **est** la théorie de la propagation des incertitudes : la formule que les physiciens écrivent $\Delta y \approx |f'| \Delta x$ n'est rien d'autre qu'elle, avec un $\approx$ à la place d'un $\leq$, et c'est le $\leq$ qui en fait une garantie. Ensuite, la qualité de la majoration se lit d'avance : plus l'intervalle est court, moins f' y varie, et plus la borne colle au réel. La question 2 en donne le cas idéal, avec un écart de 1% entre la borne et la vérité ; la question 4 en donne le cas moyen, avec un facteur 3.

Exercice 14 ★★★ Contracter vers un point fixe

Notions : Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x,$$

et soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f , et en déduire que la suite est bien définie et que $u_n \in [1, 2]$ pour tout n .
2. Montrer que l'équation $x = 1 + \frac{1}{2} \sin x$ admet une unique solution ℓ dans $[1, 2]$, et préciser un intervalle plus court la contenant.
3. Montrer que $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $[1, 2]$, puis, **en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre u_n et ℓ** , établir

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. En déduire que (u_n) converge, et préciser sa limite.
5. Déterminer, à partir de l'inégalité de la question 3, un rang à partir duquel les trois premières décimales de u_n sont celles de ℓ . Calculer ensuite u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 à 10^{-6} près et comparer.
6. **Question de méthode.** La monotonie aurait aussi permis de démontrer la convergence. Qu'apporte l'inégalité des accroissements finis de plus ?

Corrigé

1. *Stabilité de $[1, 2]$.* Soit $x \in [1, 2]$. Comme $\pi \approx 3,1416$, on a $[1, 2] \subset]0, \pi[$, intervalle sur lequel la fonction $\sin$ est **strictement positive**. Donc $\frac{1}{2} \sin x > 0$ et

$$f(x) > 1.$$

Par ailleurs $\sin x \leq 1$ pour tout réel x , donc

$$f(x) \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi $f(x) \in]1, 3/2]$, et comme $]1, 3/2] \subset [1, 2]$, l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f . $\square$

La suite est bien définie et localisée. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc la suite est définie sans réserve ; ce qui est utile, c'est la localisation. Notons $P(n)$ la propriété « $u_n \in [1, 2]$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 \in [1, 2]$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $u_n \in [1, 2]$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [1, 2]$ par stabilité, et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$. La démonstration donne au passage un résultat plus précis, qui servira à la question 6 : pour tout $n \geq 1$, $u_n \in]1, 3/2]$.

2. *Une équation, une fonction auxiliaire.* Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = x - 1 - \frac{1}{2} \sin x,$$

de sorte que x est solution de l'équation si et seulement si $g(x) = 0$.

Stricte croissance. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x.$$

Comme $\cos x \leq 1$, on a $\frac{1}{2} \cos x \leq \frac{1}{2}$, donc $g'(x) \geq \frac{1}{2} > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et par conséquent **injective** : l'équation a au plus une solution réelle, et pas seulement au plus une dans $[1, 2]$.

Existence. La fonction g est continue sur $[1, 2]$, comme somme de fonctions continues. On calcule

$$g(1) = -\frac{1}{2} \sin(1) \approx -0,4207 < 0 \quad \text{et} \quad g(2) = 1 - \frac{1}{2} \sin(2) \approx 0,5454 > 0,$$

en utilisant $\sin(1) \approx 0,841471$ et $\sin(2) \approx 0,909297$. Le théorème de la bijection, acquis au chapitre précédent, appliqué à g continue et strictement croissante sur $[1, 2]$, donne l'existence et l'unicité d'un réel $\ell \in]1, 2[$ tel que $g(\ell) = 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$. $\square$

Un intervalle plus court. Comme $\ell = f(\ell)$ et $\ell \in [1, 2]$, la question 1 donne $\ell \in]1, 3/2]$. Cette précision est celle qui servira à la question 5 : elle fournit $|u_0 - \ell| = \ell - 1 \leq \frac{1}{2}$ **sans connaître** ℓ .

3. La borne sur la dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \frac{1}{2} \cos x$. Comme $|\cos x| \leq 1$ pour tout réel x ,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

donc en particulier sur $[1, 2]$. $\square$

L'inégalité en un pas. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux réels u_n et ℓ appartiennent à $[1, 2]$, d'après les questions 1 et 2 ; comme $[1, 2]$ est un **intervalle**, le segment dont ils sont les extrémités est tout entier contenu dans $[1, 2]$. Sur ce segment, f est continue et dérivable, et $|f'| \leq \frac{1}{2}$. L'inégalité des accroissements finis donne donc

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|.$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ par définition de la suite, et $f(\ell) = \ell$ parce que ℓ est un point fixe. Il vient

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|.$$

C'est ici que se joue le choix de la méthode. **On applique l'inégalité entre u_n et ℓ , et non entre u_n et u_{n-1}** , et cela pour une raison précise : l'égalité $f(\ell) = \ell$ transforme $f(\ell)$ en ℓ , donc l'inégalité obtenue parle directement de la distance à la limite. En l'appliquant entre deux termes consécutifs, on obtiendrait $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2} |u_n - u_{n-1}|$, il faudrait ensuite sommer une série géométrique, ou invoquer le critère de Cauchy, pour obtenir la convergence, puis recommencer un calcul pour majorer la distance à la limite. La voie courte est celle de ℓ .

L'itération. Notons $Q(n)$ la propriété « $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$ ».

Initialisation. Au rang 0, l'inégalité s'écrit $|u_0 - \ell| \leq |u_0 - \ell|$: elle est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vraie. L'inégalité en un pas, puis l'hypothèse de récurrence multipliée par $\frac{1}{2} > 0$, donnent

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|,$$

c'est-à-dire $Q(n+1)$.

Conclusion. L'inégalité vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Remarque

Ce que l'inégalité des accroissements finis apporte ici, et que rien d'autre n'apporte. Dans les exemples du chapitre sur les suites, la fonction itérée était polynomiale ou rationnelle, et la contraction se lisait sur une **factorisation** : par exemple $\frac{a^2-b^2}{6} = \frac{(a+b)(a-b)}{6}$, où le facteur $(a-b)$ apparaît tout seul. Avec $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x$, il n'y a pas de factorisation élémentaire de $f(a) - f(b)$ par $(a-b)$: c'est l'inégalité des accroissements finis qui **fabrique** le facteur, à partir de la seule borne sur la dérivée. C'est exactement pour cela qu'elle existe.

Soyons honnête sur un point : pour le sinus particulièrement, l'identité $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$ permettrait aussi de conclure. Mais c'est une astuce attachée à cette fonction-là, alors que l'inégalité des accroissements finis ne demande jamais qu'une chose, la même pour toutes les fonctions : une borne sur $|f'|$.

4. Pour tout n , l'encadrement

$$0 \leq |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$$

est vérifié. La suite géométrique de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge vers 0, sa raison vérifiant $0 < \frac{1}{2} < 1$; le membre de droite, produit de cette suite par la constante $|u_0 - \ell|$, tend donc vers 0. Par le théorème d'encadrement, $|u_n - \ell| \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell. \quad \square$$

On notera que la limite était **connue avant** d'être atteinte : elle a été construite à la question 2 comme unique point fixe, et la question 3 n'a fait que mesurer la distance. C'est l'inverse de l'ordre habituel, où l'on démontre d'abord la convergence puis on identifie la limite.

5. *Le rang garanti.* La question 2 donne $|u_0 - \ell| = \ell - 1 \leq \frac{1}{2}$, donc

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Avoir les trois premières décimales exactes est assuré dès que $|u_n - \ell| \leq 5 \times 10^{-4}$, ce qui est réalisé si

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq 5 \times 10^{-4}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2^{n+1} \geq 2000.$$

Or $2^{10} = 1024 < 2000$ et $2^{11} = 2048 \geq 2000$. Il faut donc $n+1 \geq 11$, soit

$$n \geq 10.$$

Le rang 10 convient, et c'est un résultat garanti a priori, sans avoir calculé un seul terme.

Les calculs. En partant de $u_0 = 1$ et en itérant $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sin u_n$, les angles étant en radians :

n	u_n	$ u_n - \ell $	majorant $2^{-(n+1)}$
0	1,000000	$4,99 \times 10^{-1}$	$5,00 \times 10^{-1}$
1	1,420735	$7,80 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-1}$
2	1,494381	$4,32 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-1}$
3	1,498541	$1,60 \times 10^{-4}$	$6,25 \times 10^{-2}$
4	1,498695	$5,8 \times 10^{-6}$	$3,13 \times 10^{-2}$
5	1,498701	2×10^{-7}	$1,56 \times 10^{-2}$

La valeur limite, obtenue en poursuivant les itérations jusqu'à stabilisation, est $\ell \approx 1,4987011$. *La comparaison.* Les trois premières décimales exactes, à savoir 1,498, sont acquises dès le rang 3, alors que la majoration ne les garantissait qu'au rang 10. **Le rang garanti est pessimiste de sept itérations, et il n'est pas faux pour autant** : il majore, il ne prédit pas.

Pourquoi cet écart. Deux raisons se cumulent, et il vaut la peine de les séparer.

D'abord, la constante $\frac{1}{2}$ n'est pas la meilleure sur $[1, 2]$. Sur cet intervalle, $\cos$ est décroissante de $\cos(1) \approx 0,5403$ à $\cos(2) \approx -0,4161$, donc $|\cos x| \leq 0,5403$ et l'on peut prendre $k = 0,271$ au lieu de $\frac{1}{2}$. La condition devient $0,5 \times 0,271^n \leq 5 \times 10^{-4}$, soit $0,271^n \leq 10^{-3}$, soit $n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln(1/0,271)} \approx$

5,3 : le rang 6 suffit. La majoration $|\cos| \leq 1$ était gratuite, et elle a coûté quatre itérations.

Ensuite, et c'est l'essentiel, la vitesse réelle n'est pas gouvernée par le maximum de $|f'|$ sur l'intervalle, mais par sa valeur **au point limite**. Ici $f'(\ell) = \frac{1}{2} \cos(\ell) \approx 0,036$, parce que $\ell \approx 1,4987$ est très proche de $\frac{\pi}{2}$, où le cosinus s'annule. Les rapports d'erreurs successifs de la table le confirment : 0,055, puis 0,037, puis 0,036. Chaque itération divise l'erreur par 28 environ, et non par 2.

6. Ce que la monotonie aurait donné. Le protocole habituel demande une fonction monotone sur un intervalle stable. Or f **n'est pas monotone sur** $[1, 2]$: sa dérivée $\frac{1}{2} \cos x$ change de signe en $\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$. Il faut donc d'abord resserrer l'intervalle, ce que la question 1 permet : pour $x \in [1, 2]$, on a $\sin x \geq \sin(1)$, donc $f(x) \geq 1 + \frac{1}{2} \sin(1) \approx 1,4207$, et finalement $u_n \in [1,4207; 1,5]$ pour tout $n \geq 1$. Sur cet intervalle, contenu dans $[0, \pi/2]$, la fonction f est croissante, la suite est donc monotone à partir du rang 1, elle est bornée, donc elle converge ; puis la continuité de f identifie la limite comme un point fixe, et l'unicité de la question 2 conclut.

C'est un chemin correct, mais on voit ce qu'il coûte : un intervalle à resserrer, une monotonie à établir, la continuité de f à invoquer, et le tri des points fixes.

Ce que l'inégalité des accroissements finis ajoute. Elle ne parle ni de monotonie, ni d'ordre. Elle donne la convergence en une ligne à partir de la seule borne $|f'| \leq \frac{1}{2}$, et surtout elle donne **une vitesse** : l'inégalité $|u_n - \ell| \leq 2^{-(n+1)}$ est quantitative, donc elle se traduit en un **nombre d'itérations** à effectuer pour une précision demandée, ce que la monotonie ne fournit jamais. La question 5 est impossible avec le seul argument de monotonie.

Deux avantages plus discrets méritent d'être signalés. Le calcul ne dépend pas de u_0 : pour n'importe quel point de départ dans $[1, 2]$, la même inégalité s'applique, et la même vitesse. Et il ne dépend pas du signe de $u_n - \ell$, donc il fonctionne à l'identique pour une suite qui oscille autour de sa limite, cas où l'argument de monotonie n'existe tout simplement pas.

Le prix à payer. Il faut connaître ℓ **avant**, c'est-à-dire disposer de la question 2, et donc du théorème de la bijection. La méthode par monotonie, elle, produit la limite sans l'avoir cherchée.

Commentaire. Cet exercice est une machine à trois pièces, et chaque pièce a son rôle exact. La question 1 fournit un intervalle stable, donc un terrain où tout se passe. La question 2 fournit un point fixe, donc une cible. La question 3 fournit une contraction, donc une vitesse pour y aller. Retirez la question 2 et l'inégalité de la question 3 n'a plus de ℓ à quoi se comparer ; retirez la question 1 et la borne $|f'| \leq \frac{1}{2}$ n'a plus d'intervalle où s'appliquer.

Reste la leçon numérique de la question 5, qui est la plus utile en pratique. Une majoration d'erreur sert à **garantir**, pas à prédire : elle donne un rang au-delà duquel on est sûr, et ce rang est en général très supérieur au rang réellement nécessaire. Améliorer la constante k améliore le rang ; mais aucune majoration uniforme sur un intervalle ne pourra rendre compte de ce qui se passe réellement au voisinage de la limite, où seul $|f'(\ell)|$ compte.

Exercice 15 ★★ Quatre inégalités, et le choix de l'outil

Notions : Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction, Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités, Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Le chapitre fournit trois outils pour démontrer une inégalité entre deux expressions.

- **Outil A, l'étude de la différence.** On pose φ égale au membre de gauche moins celui de droite, on détermine le signe de φ' , et on conclut par les variations et une valeur.
- **Outil B, les accroissements finis.** Utilisable quand un membre est une variation $f(b) - f(a)$ et l'autre le produit de la longueur $b - a$ par une borne de f' .
- **Outil C, la convexité.** Utilisable quand un membre est une tangente ou une corde de la courbe de l'autre.

Pour chacune des quatre inégalités ci-dessous, la consigne est double : **dire d'abord lequel des trois outils est le plus court, en justifiant l'élimination des deux autres**, puis rédiger la démonstration complète avec l'outil retenu.

1. $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ pour tout $x \geq 0$.
2. $\tan x \geq x$ pour tout $x \in [0, \pi/2[$.
3. $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
4. $\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
5. Reprendre l'inégalité 2 par les **deux autres** outils, et comparer la longueur des trois démonstrations.
6. Dégager une règle de décision : à quoi reconnaît-on, **avant** de commencer, lequel des trois outils va marcher, et combien il va coûter ?

Corrigé

1. *Le choix de l'outil.* L'outil C est éliminé : le membre de gauche est un polynôme de degré 3, ce n'est ni une tangente ni une corde de la courbe du sinus, et la convexité ne sait comparer une courbe qu'à des objets de degré 1. L'outil B est éliminé aussi : aucun des deux membres ne s'écrit comme une variation de l'autre, et il n'y a pas de longueur d'intervalle en facteur. Reste **l'outil A**, et il faudra le mener en cascade, car la différence et ses premières dérivées s'annulent toutes en 0.

La démonstration. Posons, pour $x \geq 0$,

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

La fonction φ est dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}$, comme somme d'une fonction trigonométrique et d'un polynôme. Calculons ses trois premières dérivées :

$$\varphi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi''(x) = -\sin x + x,$$

$$\varphi'''(x) = 1 - \cos x.$$

On vérifie immédiatement que les trois premières valeurs en 0 sont nulles : $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$.

Le signe de φ''' est lisible : $\cos x \leq 1$ pour tout réel x , donc $\varphi'''(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. On remonte alors la cascade, en utilisant à chaque étage le théorème qui relie le signe de la dérivée aux variations, et la valeur nulle en 0 :

1. $\varphi''' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$, donc φ'' est croissante sur $[0, +\infty[$; comme $\varphi''(0) = 0$, il vient $\varphi'' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$.
2. $\varphi'' \geq 0$, donc φ' est croissante ; comme $\varphi'(0) = 0$, il vient $\varphi' \geq 0$.
3. $\varphi' \geq 0$, donc φ est croissante ; comme $\varphi(0) = 0$, il vient $\varphi \geq 0$.

Ainsi $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, ce qui est l'inégalité demandée. $\square$

Chaque étage de la remontée utilise **deux** informations, le signe de la dérivée et une valeur en 0, et il est fautif d'en oublier une : « $\varphi'' \geq 0$ donc $\varphi \geq 0$ » n'a aucun sens. On remarquera au passage que l'étape 1 est exactement l'inégalité $\sin x \leq x$ sur $[0, +\infty[$, obtenue ici gratuitement, comme sous-produit.

2. Le choix de l'outil. Les trois marchent, la question 5 le montrera. Le plus court est **l'outil B**, et cela se voit à la forme de l'inégalité : $\tan 0 = 0$, donc le membre de gauche est la variation $\tan x - \tan 0$ de la fonction $\tan$ entre 0 et x ; et le membre de droite est $x \times 1$, c'est-à-dire la longueur de l'intervalle multipliée par un minorant de $\tan'$. C'est le schéma exact des accroissements finis.

La démonstration. Pour $x = 0$ l'inégalité est une égalité. Soit donc $x \in]0, \pi/2[$. Le segment $[0, x]$ est contenu dans $[0, \pi/2[$, où la fonction $\tan$ est continue et dérivable, avec

$$\tan'(t) = 1 + \tan^2 t.$$

L'égalité des accroissements finis, appliquée à $\tan$ sur $[0, x]$, fournit un réel $c \in]0, x[$ tel que

$$\tan x - \tan 0 = (x - 0) \tan'(c) = x(1 + \tan^2 c).$$

Or $c \in]0, \pi/2[$, donc $\tan c > 0$, donc $\tan^2 c > 0$ et $1 + \tan^2 c > 1$. Comme $x > 0$, la multiplication par x conserve l'inégalité stricte :

$$\tan x = x(1 + \tan^2 c) > x. \quad \square$$

On a obtenu au passage l'inégalité **stricte** pour $x > 0$, sans effort supplémentaire : c'est un avantage discret de cet outil, la stricte positivité de $\tan^2 c$ venant de ce que le théorème place c dans l'intervalle ouvert, donc loin de 0.

3. Le choix de l'outil. L'outil C est à écarter, et il faut dire pourquoi précisément, car c'est le piège de la question. La convexité de $\exp$ donne bien que la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes, donc $e^x \geq 1 + x$; mais le membre de droite ici est une **parabole**, et la convexité ne fournit aucune comparaison avec une parabole. Elle donne strictement moins que ce qu'on demande. L'outil B ne s'applique pas davantage : le membre de droite n'est pas de la forme « longueur fois borne de la dérivée ». Reste **l'outil A**, en cascade, avec deux dérivations cette fois.

La démonstration. Posons, pour $x \geq 0$,

$$\psi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

La fonction ψ est dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= e^x - 1 - x, \\ \psi''(x) &= e^x - 1. \end{aligned}$$

On a de plus $\psi(0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0$ et $\psi'(0) = 1 - 1 - 0 = 0$.

Le signe de ψ'' est lisible sur $[0, +\infty[$: la fonction $\exp$ est croissante et $e^0 = 1$, donc $e^x \geq 1$ et $\psi''(x) \geq 0$. On remonte :

1. $\psi'' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$, donc ψ' est croissante ; comme $\psi'(0) = 0$, il vient $\psi' \geq 0$.
2. $\psi' \geq 0$, donc ψ est croissante ; comme $\psi(0) = 0$, il vient $\psi \geq 0$.

D'où $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$. $\square$

Remarque

Un étage peut être acheté au lieu d'être démontré. L'étape 1 ci-dessus établit $\psi'(x) = e^x - 1 - x \geq 0$, c'est-à-dire l'inégalité de la tangente $e^x \geq 1 + x$. Si ce résultat est déjà acquis, l'outil C le donnant en une ligne par convexité de $\exp$, alors la cascade démarre directement à l'étape 2 et la démonstration tient en deux lignes. Les trois outils ne sont donc pas concurrents : le plus faible peut servir de marchepied au plus général.

4. Le choix de l'outil. Comme à la question 3, le membre de droite est une parabole : l'outil C ne peut pas conclure, et l'outil B n'a pas la bonne forme. Reste **l'outil A**, mais ici il ne coûtera **qu'une seule dérivation**, parce que la dérivée de la différence se factorise.

La démonstration. Posons, pour $x \geq 0$,

$$\chi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2},$$

expression bien définie puisque $1+x \geq 1 > 0$. On a $\chi(0) = \ln 1 - 0 + 0 = 0$, et χ est dérivable sur $[0, +\infty[$ avec

$$\chi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x.$$

Mettons au même dénominateur, ce qui est l'étape décisive :

$$\chi'(x) = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} = \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

Le numérateur est un carré, donc positif, et le dénominateur est strictement positif : $\chi'(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. La fonction χ est donc croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $\chi(0) = 0$, on conclut $\chi \geq 0$, c'est-à-dire

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \quad \text{pour tout } x \geq 0. \quad \square$$

L'inégalité est même stricte dès que $x > 0$, puisque $\chi'(t) > 0$ pour $t > 0$.

Pourquoi une seule dérivation a suffi. Parce que χ' s'est annulée en 0 **avec un facteur x^2 visible**. Ce n'est pas un hasard de calcul : les deux membres de l'inégalité coïncident jusqu'à l'ordre 2 en 0, ce qui force χ' à s'annuler à l'ordre 2, donc à contenir x^2 en facteur. Une factorisation qui « tombe bien » est presque toujours la trace d'un contact d'ordre élevé.

5. L'inégalité 2 par l'outil A. Posons $\theta(x) = \tan x - x$ sur $[0, \pi/2[$. Alors $\theta(0) = 0$ et

$$\theta'(x) = (1 + \tan^2 x) - 1 = \tan^2 x \geq 0.$$

Donc θ est croissante sur $[0, \pi/2[$, et comme $\theta(0) = 0$, on a $\theta \geq 0$, c'est-à-dire $\tan x \geq x$. $\square$

Deux lignes : c'est aussi court que l'outil B, et pour la même raison, la simplification miraculeuse $\tan' - 1 = \tan^2$.

L'inégalité 2 par l'outil C. La fonction $\tan$ est deux fois dérivable sur $[0, \pi/2[$, et en dérivant $\tan' = 1 + \tan^2$ par la formule de dérivation d'une composée, on obtient

$$\tan''(x) = 2 \tan x \times \tan'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x).$$

Sur $[0, \pi/2[$, on a $\tan x \geq 0$ et $1 + \tan^2 x > 0$, donc $\tan'' \geq 0$: la fonction $\tan$ est **convexe** sur $[0, \pi/2[$. D'après la caractérisation du cours, une fonction convexe et dérivable sur un intervalle a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes. La tangente en 0 a pour équation

$$y = \tan(0) + \tan'(0)(x - 0) = 0 + 1 \times x = x,$$

donc $\tan x \geq x$ sur $[0, \pi/2[$. $\square$

La comparaison des trois. En nombre de lignes, A et B sont à égalité et C arrive derrière, parce qu'il faut calculer $\tan''$. Mais le comptage des lignes n'est pas le bon critère, et voici ce que chacun consomme et rend :

- **B** ne demande qu'une minoration de $\tan'$, et rend en prime l'inégalité stricte. C'est le moins exigeant.
- **A** ne demande rien de plus qu'un calcul de dérivée, et c'est l'outil qui marche toujours ; il ne rend rien de plus que l'inégalité demandée.
- **C** est le plus coûteux et le plus généreux : la convexité est une propriété **globale** de la fonction, elle donne l'inégalité contre **toutes** les tangentes d'un coup. Par exemple, la tangente en $\pi/4$ donne aussi, sans travail supplémentaire, $\tan x \geq 1 + 2(x - \pi/4)$ sur $[0, \pi/2[$.

Quand une inégalité est un cas particulier d'une propriété globale, il est souvent plus économique de démontrer la propriété globale.

6. *La règle de décision.*

Méthode

Comment on choisit l'outil, en trois questions posées avant tout calcul.

1. **Un des deux membres est-il de degré 1 en la variable, ou une corde entre deux points de la courbe ?** Si oui, essayer la **convexité** : c'est la seule situation qu'elle traite, et elle la traite mieux que les autres puisqu'elle donne toutes les tangentes à la fois. Si le membre à comparer est de degré 2 ou plus, la convexité ne peut pas conclure : c'est le cas des questions 3 et 4.
2. **Un des deux membres est-il une variation $f(b) - f(a)$, l'autre étant le produit de la longueur $b - a$ par une constante ?** Si oui, les **accroissements finis** donnent la réponse en une ligne. Le signe extérieur à repérer est qu'un membre s'annule quand les deux bornes se confondent : à la question 2, $\tan 0 = 0$.
3. **Sinon, étude de la différence**, et son coût se prévoit : c'est le nombre de dérivations qu'il faut avant que le signe devienne constant. Ce nombre se lit sur le **contact** des deux membres au point de départ. Question 4 : les deux membres coïncident à l'ordre 2, une dérivation suffit. Question 3 : ordre 2 également, mais la dérivée ne se factorise pas, deux dérivations. Question 1 : les deux membres coïncident à un ordre plus élevé, trois dérivations.

Les deux fautes à ne pas commettre. Croire que la convexité permet de comparer une courbe à une parabole : elle ne compare qu'à des droites. Et oublier, dans une cascade, la valeur en 0 de chaque étage : le signe d'une dérivée ne dit rien du signe de la fonction sans un point d'ancrage.

Commentaire. L'exercice a l'air d'être une liste de quatre inégalités ; c'est en réalité un exercice de lecture. Les quatre énoncés se ressemblent beaucoup, et pourtant l'un se traite en une ligne par les accroissements finis, deux se traitent en cascade avec un coût différent, et le dernier se traite en une dérivation grâce à une factorisation.

Ce qui distingue les cas n'est pas la difficulté des fonctions, c'est la **forme** de l'inégalité. Un membre de degré 1 appelle la convexité ; une variation appelle les accroissements finis ; tout le reste tombe dans l'étude de la différence, qui est la méthode universelle et donc la plus chère. Un étudiant qui étudie systématiquement la différence obtiendra toutes les bonnes réponses de cet exercice, et il aura écrit trois fois plus de lignes que nécessaire, ce qui, dans un partiel de deux heures, se paie.

Exercice 16 ★★ Dérivée nulle : ce qu'il faut d'intervalle

Notions : Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction, Égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions lipschitziennes

Deux énoncés du cours sont employés si souvent qu'on finit par les croire évidents : « si $f' = 0$ sur un intervalle, alors f est constante » et « si $f' > 0$ sur un intervalle, alors f est strictement croissante ». Cet exercice les démontre, puis démonte le mot **intervalle**.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. **Démontrer** que f est constante sur I , en utilisant l'égalité des accroissements finis. Rédiger complètement, et signaler l'endroit exact où la nature d'intervalle de I intervient.
2. Reprendre la démonstration ligne à ligne et dire **précisément où elle casse** si I n'est pas un intervalle. Quelle propriété caractéristique des intervalles a-t-on utilisée ?
3. Construire un contre-exemple : une partie D de $\mathbb{R}$ réunion de deux intervalles disjoints, et une fonction dérivable sur D , de dérivée nulle sur D , qui n'est pas constante.
4. Faire le même travail, démonstration puis contre-exemple sur une réunion, pour l'énoncé « si $f' > 0$ sur un intervalle I , alors f est strictement croissante sur I ».
5. **Application.** Établir que

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

Sur quel ensemble exactement l'argument de la question 1 s'applique-t-il ? Comment traite-t-on alors les deux extrémités, et comment détermine-t-on la constante ?

6. **La version fine.** Soit f dérivable sur un intervalle I , telle que $f' \geq 0$ sur I et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I . La fonction f est-elle strictement croissante sur I ? Démontrer la réponse.

Corrigé

1. *Ce qu'il faut démontrer.* Que deux points quelconques de I ont la même image.

La démonstration. Si I est vide ou réduit à un point, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc I non réduit à un point, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

Comme I est un **intervalle** et que a et b lui appartiennent, le segment $[a, b]$ est tout entier contenu dans I . **C'est le seul endroit de la démonstration où la nature d'intervalle de I est utilisée, et elle y est indispensable.**

La fonction f est donc définie sur $[a, b]$, et elle y est dérivable puisque $[a, b] \subset I$. La dérivabilité entraînant la continuité, f est continue sur $[a, b]$; et elle est dérivable sur $]a, b[$, qui est contenu dans $[a, b]$. Les deux hypothèses de l'égalité des accroissements finis sont vérifiées : il existe donc $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Or $c \in]a, b[\subset I$, donc $f'(c) = 0$ par hypothèse, et il vient $f(b) - f(a) = 0$, c'est-à-dire

$$f(a) = f(b).$$

Conclusion. Fixons $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$, ce qui précède appliqué au couple (x, x_0) ou au couple (x_0, x) , selon leur ordre, donne $f(x) = f(x_0)$; et c'est trivialement vrai si $x = x_0$. La fonction f est donc constante sur I , égale à $f(x_0)$. $\square$

2. *Ligne par ligne.* Les lignes qui suivent « $[a, b] \subset I$ » sont irréfutables et ne dépendent pas de la forme de I . La rupture est **immédiate**, dès cette ligne-là.

La propriété employée est la propriété caractéristique des intervalles, celle-là même qui sert de définition dans le chapitre sur les réels :

$$I \text{ est un intervalle} \iff \text{pour tous } a, b \in I \text{ avec } a \leq b, [a, b] \subset I.$$

Si I n'est pas un intervalle, la négation de cette propriété fournit deux points $a < b$ de I et un réel $d \in]a, b[$ tel que $d \notin I$. Alors f **n'est pas définie en** d , donc la phrase « f est continue sur $[a, b]$ » n'a pas de sens, et l'égalité des accroissements finis ne peut pas être invoquée : il n'y a pas de fonction sur $[a, b]$ à qui l'appliquer.

Il faut bien mesurer la nature de la panne. Ce n'est pas une conclusion affaiblie, c'est une hypothèse impossible à vérifier. Et l'on voit du même coup **ce qui survit** : si a et b sont deux points de I tels que $[a, b] \subset I$, la démonstration s'applique et donne $f(a) = f(b)$. Autrement dit, f est constante sur chacun des intervalles maximaux contenus dans I , avec des constantes qui peuvent différer d'un morceau à l'autre.

3. Le contre-exemple. Posons

$$D =]0, 1[\cup]2, 3[,$$

et définissons f sur D par $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 1$ si $x \in]2, 3[$.

f est dérivable sur D , de dérivée nulle. Soit $x_0 \in D$. Alors x_0 appartient à l'un des deux intervalles ouverts, appelons-le J ; sur J , qui est un voisinage de x_0 , la fonction f est constante. Le taux d'accroissement de f en x_0 est donc nul pour tout $x \in J$ avec $x \neq x_0$, donc sa limite est nulle : f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$. Ceci valant pour tout $x_0 \in D$, on a bien $f' = 0$ sur D .

f n'est pas constante. On a $f(0,5) = 0$ et $f(2,5) = 1$, deux valeurs distinctes. $\square$

L'ensemble D n'est pas un intervalle : il contient 0,5 et 2,5 mais pas 1,5, qui est entre les deux. Conformément à la question 2, f est bien constante sur chacun des deux morceaux, et les deux constantes diffèrent.

Remarque

Une variante d'une ligne. Sur $D = \mathbb{R}^*$, la fonction σ définie par $\sigma(x) = -1$ pour $x < 0$ et $\sigma(x) = 1$ pour $x > 0$ fait exactement le même travail : elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée nulle, et elle prend deux valeurs. C'est le contre-exemple le plus court, et c'est celui à retenir, parce que $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble sur lequel on oublie le plus souvent qu'on n'est pas sur un intervalle.

4. La démonstration. Soit I un intervalle et f dérivable sur I avec $f' > 0$ sur I . Soient a et b dans I avec $a < b$. Comme I est un intervalle, $[a, b] \subset I$, donc f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. L'égalité des accroissements finis fournit $c \in]a, b[\subset I$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Le facteur $b - a$ est strictement positif, et $f'(c)$ l'est aussi par hypothèse : leur produit est strictement positif, donc $f(a) < f(b)$. La fonction f est strictement croissante sur I . $\square$

La démonstration est la même qu'à la question 1, à ceci près qu'on conclut sur le **signe** d'un produit au lieu de sa nullité. C'est pour cette raison que les deux énoncés ont la même hypothèse d'intervalle, et qu'ils tombent tous les deux au même endroit.

Le contre-exemple. Reprenons $D =]0, 1[\cup]2, 3[$ et posons

$$g(x) = x \text{ si } x \in]0, 1[, \quad g(x) = x - 3 \text{ si } x \in]2, 3[.$$

Sur chacun des deux morceaux, g coïncide avec une fonction affine de pente 1, donc g est dérivable sur D avec $g'(x) = 1 > 0$ pour tout $x \in D$.

Pourtant $0,5 < 2,5$, alors que

$$g(0,5) = 0,5 \quad \text{et} \quad g(2,5) = -0,5,$$

donc $g(0,5) > g(2,5)$: la fonction g n'est pas croissante sur D , pas même au sens large. $\square$
Elle est bien strictement croissante sur chacun des deux morceaux, ce qui est exactement ce que la question 2 laissait prévoir.

5. Le domaine, d'abord. Les fonctions Arcsin et Arccos sont définies sur $[-1, 1]$: la fonction

$$\varphi(x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$$

est donc définie sur $[-1, 1]$. Mais elles ne sont **dérivables que sur** $] -1, 1[$, et c'est là toute la subtilité de la question : l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité ne coïncident pas, et l'argument de la question 1 ne peut vivre que sur le second.

La dérivée. La **section 8 du cours** établit ces deux dérivées **directement**, par le théorème de dérivation d'une réciproque appliqué aux restrictions du sinus et du cosinus, et non à partir de l'identité qu'on démontre ici : le raisonnement n'est donc pas circulaire. Elle donne, pour tout $x \in] -1, 1[$

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

les deux expressions ayant un sens puisque $1 - x^2 > 0$ sur $] -1, 1[$. Par somme, φ est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Application de la question 1. L'ensemble $] -1, 1[$ **est un intervalle**, et φ y est dérivable de dérivée nulle : φ est donc constante sur $] -1, 1[$.

Détermination de la constante. Une seule valeur suffit, et l'on choisit celle qui se calcule sans effort. En $x = 0$:

$$\varphi(0) = \operatorname{Arcsin}(0) + \operatorname{Arccos}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in] -1, 1[$.

Les deux extrémités. Elles ne sont pas couvertes par ce qui précède, puisque φ n'y est pas dérivable, et il faut les traiter à part. Deux chemins, tous deux corrects.

Le calcul direct : $\operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arccos}(1) = 0$, donc $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$; et $\operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arccos}(-1) = \pi$, donc $\varphi(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$.

Ou bien la continuité : Arcsin et Arccos sont continues sur $[-1, 1]$ tout entier, donc φ l'est aussi, donc

$$\varphi(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \frac{\pi}{2},$$

et de même en -1 . Ce second chemin est celui qu'il faut connaître, car il fonctionne encore quand les valeurs aux bornes ne se calculent pas.

Conclusion. $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$. $\square$

La structure de la rédaction est celle à retenir pour toute identité obtenue par dérivée nulle : **un intervalle ouvert pour l'argument, une valeur particulière pour la constante, les bords en supplément.**

6. La réponse est oui. Soit f dérivable sur l'intervalle I , avec $f' \geq 0$ sur I , et telle que l'ensemble $Z = \{x \in I ; f'(x) = 0\}$ soit fini.

Première étape : f est croissante au sens large. Soient $a < b$ dans I . Comme à la question 4, $[a, b] \subset I$ et l'égalité des accroissements finis fournit $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \geq 0$, donc $f(a) \leq f(b)$.

Seconde étape : l'inégalité est stricte. Soient $a < b$ dans I et supposons par l'absurde $f(a) = f(b)$. Soit $x \in [a, b]$. La croissance large, appliquée aux couples (a, x) puis (x, b) , donne

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) = f(a),$$

donc $f(x) = f(a)$. La fonction f est ainsi **constante sur** $[a, b]$. Sa dérivée est donc nulle en tout point de $]a, b[$, c'est-à-dire $]a, b[\subset Z$.

Or $]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, donc **infini** : il contient par exemple tous les réels $a + \frac{b-a}{n}$ pour $n \geq 2$, qui sont deux à deux distincts. L'ensemble Z contiendrait donc une infinité d'éléments, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $f(a) \neq f(b)$, et avec $f(a) \leq f(b)$ il vient $f(a) < f(b)$: la fonction f est strictement croissante sur I . $\square$

Remarque

Ce que l'hypothèse de finitude sert vraiment à garantir. Relisons la démonstration : on n'y a jamais utilisé que Z était fini, seulement qu'il ne contenait aucun intervalle ouvert non vide. L'énoncé reste donc vrai sous l'hypothèse plus faible : **f' ne s'annule identiquement sur aucun sous-intervalle de I de longueur non nulle.**

Et la finitude n'est pas nécessaire. La fonction $x \mapsto x + \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, dérivée qui s'annule en une **infinité** de points, tous les $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$; ces points étant isolés, aucun intervalle n'est contenu dans Z , et la fonction est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Commentaire. Les six questions tournent autour d'une seule ligne de démonstration, celle qui affirme $[a, b] \subset I$. Tout le contenu du mot « intervalle » est là, et nulle part ailleurs : ni dans la dérivée, ni dans la continuité, ni dans l'égalité des accroissements finis, qui ne travaille jamais que sur un segment.

De cette observation découlent les trois usages pratiques du chapitre. D'abord, un théorème de variations ne se cite jamais sans son intervalle : « f est croissante » n'est pas une phrase complète, il faut dire où. Ensuite, sur une réunion d'intervalles, une conclusion s'obtient **morceau par morceau**, avec une constante ou une monotonie par morceau, et rien ne les relie. Enfin, quand l'ensemble de dérivabilité est plus petit que l'ensemble de définition, ce qui est le cas de toutes les fonctions circulaires réciproques aux bornes, la démonstration se conduit sur l'ouvert et les bords se traitent séparément, par calcul direct ou par continuité. La question 5 est le modèle de cette rédaction en deux temps.

Exercice 17 ★★★ Le théorème de la limite de la dérivée

Notions : Théorème de la limite de la dérivée et théorème de Darboux, Dérivées à gauche et à droite, point anguleux, tangente verticale, fonctions définies par morceaux

1. Énoncer le théorème de la limite de la dérivée avec ses hypothèses exactes, puis le **démontrer** à l'aide de l'égalité des accroissements finis. Dire en particulier à quoi sert l'hypothèse de continuité au point étudié.
2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \quad \varphi(0) = 0.$$

Ce prolongement est-il dérivable en 0 ? La fonction φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

3. Soit $\lambda > 0$ et h_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_\lambda(x) = \sin x \quad \text{si } x \leq 0, \quad h_\lambda(x) = \ln(1 + \lambda x) \quad \text{si } x > 0.$$

Étudier selon λ la dérivabilité de h_λ en 0, en déterminant ses dérivées latérales. Pour la valeur de λ qui rend h_λ dérivable en 0, la fonction obtenue est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

4. Soit g la fonction racine cubique, réciproque de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la limite de g' en 0. Le théorème s'applique-t-il ? Que peut-on affirmer malgré tout sur la courbe de g au point d'abscisse 0 ?
5. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(x) = x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \quad \psi(0) = 0.$$

Montrer que ψ est continue en 0, calculer ψ' sur $\mathbb{R}^*$, et montrer que ψ' n'a pas de limite en 0. Que peut-on néanmoins conclure ?

6. **La question de rigueur.** Le théorème est une condition **suffisante** de dérivabilité. Peut-on en déduire l'énoncé « si f' n'a pas de limite en a , alors f n'est pas dérivable en a » ? Justifier.

Corrigé

1. *L'énoncé.* Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I , et f une fonction définie sur I vérifiant les trois hypothèses suivantes :

1. f est **continue** sur I ;
2. f est **dérivable** sur $I \setminus \{a\}$;
3. f' admet en a une **limite finie** L .

Alors f est dérivable en a , avec $f'(a) = L$, et de plus f' est continue en a .

La démonstration. Soit $x \in I$ avec $x \neq a$. Notons J le segment dont les extrémités sont a et x , c'est-à-dire $[a, x]$ si $a < x$ et $[x, a]$ sinon. Comme I est un intervalle et que a et x lui appartiennent, $J \subset I$.

Sur J , la fonction f est continue, d'après l'hypothèse 1. Sur l'intérieur de J , la fonction f est dérivable : en effet cet intervalle ouvert ne contient pas a , qui est une extrémité de J , donc l'hypothèse 2 suffit. Les deux hypothèses de l'égalité des accroissements finis sont réunies, et elle fournit un réel c_x strictement compris entre a et x tel que

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(c_x), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Faisons maintenant tendre x vers a . Comme c_x est strictement compris entre a et x , on a

$$0 < |c_x - a| < |x - a|,$$

donc $c_x \rightarrow a$ par le théorème d'encadrement, et $c_x \neq a$ pour tout x . L'hypothèse 3 donne alors $f'(c_x) \rightarrow L$, donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow L \quad \text{quand } x \rightarrow a.$$

Le taux d'accroissement de f en a admet donc la limite finie L : par définition, f est dérivable en a et $f'(a) = L$.

Enfin, l'hypothèse 3 s'écrit maintenant $f'(x) \rightarrow f'(a)$ quand $x \rightarrow a$, c'est-à-dire que f' est continue en a . $\square$

À quoi sert l'hypothèse de continuité. Elle est ce qui autorise à écrire l'égalité des accroissements finis **jusqu'en** a , et donc à faire apparaître $f(a)$ dans le taux d'accroissement. Sans elle, tout tombe, et le contre-exemple est immédiat : la fonction χ valant 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x \geq 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée nulle, donc χ' a pour limite 0 en 0, et pourtant χ n'est pas dérivable en 0, faute d'y être continue. C'est le même piège que celui de la question 5 de l'exercice 13.

Remarque

Deux variantes à connaître, qui servent dans la suite de l'exercice.

Version unilatère. Si f est continue sur I , dérivable sur $I \cap]a, +\infty[$, et si $f'(x)$ tend vers L_a fini quand $x \rightarrow a^+$, alors f admet en a une dérivée à droite égale à L_a . La démonstration est celle ci-dessus, menée sur les seuls $x > a$. Énoncé symétrique à gauche.

Version à limite infinie. Si $f'(x)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) quand $x \rightarrow a$, la même démonstration donne que le taux d'accroissement tend vers $+\infty$: la fonction f n'est **pas** dérivable en a , et sa courbe admet en ce point une tangente **verticale**.

2. Sur $\mathbb{R}^*$. La fonction φ y est un quotient de fonctions dérivables autant de fois qu'on veut, dont le dénominateur ne s'annule pas : elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Continuité en 0. Écrivons, pour $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \times x.$$

La limite de référence du chapitre précédent donne $\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0$, donc $\varphi(x) \rightarrow \frac{1}{2} \times 0 = 0 = \varphi(0)$. La fonction φ est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$: l'hypothèse 1 est vérifiée, et l'hypothèse 2 l'est avec $a = 0$.

La limite de la dérivée. Pour $x \neq 0$, la formule de dérivation d'un quotient, avec $u(x) = 1 - \cos x$ et $v(x) = x$, donne

$$\varphi'(x) = \frac{x \sin x - (1 - \cos x)}{x^2}.$$

Séparons cette fraction en deux morceaux dont on connaît les limites :

$$\varphi'(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

Conclusion. Les trois hypothèses du théorème sont vérifiées avec $L = \frac{1}{2}$: la fonction φ est **dérivable en 0** avec

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2},$$

et φ' est continue en 0. Comme φ' est par ailleurs continue sur $\mathbb{R}^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}$: la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. $\square$

Vérification par le taux d'accroissement. Ici le calcul direct était possible, et il vaut la peine de le mener pour contrôler :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Les deux méthodes donnent la même valeur, et la seconde est même plus courte. **Il faut le dire : le théorème n'est pas toujours le chemin le plus rapide vers la dérivabilité.**

Ce qu'il apporte en plus, c'est la **continuité** de φ' en 0, c'est-à-dire le caractère $\mathcal{C}^1$, que le taux d'accroissement seul ne donne pas. Et il devient indispensable quand le taux d'accroissement est une forme indéterminée qu'on ne sait pas lever, ce qui est le cas courant pour les recollements.

3. Continuité en 0, quel que soit λ . On a $h_\lambda(0) = \sin 0 = 0$. À gauche, $\sin x \rightarrow 0$; à droite, $\ln(1 + \lambda x) \rightarrow \ln 1 = 0$. Les deux limites latérales valent $0 = h_\lambda(0)$, donc h_λ est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$, pour toute valeur de $\lambda > 0$.

Dérivée sur $\mathbb{R}^$.* Pour $x < 0$, $h'_\lambda(x) = \cos x$. Pour $x > 0$, la dérivation d'une composée donne

$$h'_\lambda(x) = \frac{\lambda}{1 + \lambda x},$$

expression bien définie puisque $1 + \lambda x > 1 > 0$ pour $x > 0$ et $\lambda > 0$.

Les deux limites latérales.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h'_\lambda(x) = \cos 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h'_\lambda(x) = \frac{\lambda}{1} = \lambda.$$

Conclusion, par la version unilatère du théorème. La fonction h_λ est continue en 0 et dérivable de chaque côté, avec des limites latérales finies : elle admet donc en 0 une dérivée à gauche et une dérivée à droite,

$$(h_\lambda)'_g(0) = 1 \quad \text{et} \quad (h_\lambda)'_d(0) = \lambda.$$

La fonction est dérivable en 0 si et seulement si ces deux nombres sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si

$$\lambda = 1.$$

Pour $\lambda \neq 1$, la courbe présente en O un **point anguleux**, avec deux demi-tangentes de pentes respectives 1 et λ .

Le cas $\lambda = 1$ est-il $\mathcal{C}^2$? Notons $h = h_1$. On vient de voir que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$h'(x) = \cos x \quad \text{si } x \leq 0, \quad h'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{si } x > 0,$$

et $h'(0) = 1$. Les deux limites latérales de h' en 0 valant 1, la fonction h' est continue en 0, donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Appliquons maintenant le même raisonnement à h' . Pour $x < 0$, $h''(x) = -\sin x$, de limite 0 en 0^- . Pour $x > 0$,

$$h''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \text{de limite } -1 \text{ en } 0^+.$$

La version unilatère du théorème, appliquée à h' , donne $(h')'_g(0) = 0$ et $(h')'_d(0) = -1$. Ces deux nombres diffèrent, donc h' **n'est pas dérivable en 0** : la fonction h n'est pas deux fois dérivable en 0, et a fortiori pas de classe $\mathcal{C}^2$.

Conclusion. Pour $\lambda = 1$, la fonction h_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pas davantage : elle est **exactement** de classe $\mathcal{C}^1$. $\square$

Lecture géométrique. La courbe de h_1 a en O une tangente parfaitement définie, la droite $y = x$, mais sa **courbure** y saute : à gauche $h'' = -\sin x \geq 0$ au voisinage de 0, la courbe est convexe ; à droite $h'' < 0$, elle est concave. Le point O est un point d'inflexion, obtenu non par annulation de h'' mais par un saut. C'est exactement le genre de défaut qu'un dessin ne montre pas et que le calcul des classes détecte.

Remarque

Où l'on retrouve ce travail. Déterminer la classe exacte d'un recollement est un geste standard. Mené non plus sur un exemple mais sur une **famille** de fonctions, et poussé à un ordre quelconque, il fait l'objet de l'exercice 20.

4. La fonction. La fonction $x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes : elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et sa réciproque g , la racine cubique, est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $g(0) = 0$.

Dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \neq 0$. Alors $g(x) \neq 0$, donc la dérivée de $t \mapsto t^3$ au point $g(x)$, qui vaut $3g(x)^2$, est non nulle : le théorème de dérivation d'une réciproque s'applique, et g est dérivable en x . En écrivant $g(x) = x^{1/3}$, on obtient

$$g'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

La limite en 0. Quand $x \rightarrow 0$, on a $\sqrt[3]{x^2} \rightarrow 0^+$, donc

$$g'(x) \rightarrow +\infty.$$

Le théorème s'applique-t-il ? Non, pas dans sa version de la question 1 : l'hypothèse 3 exige une limite **finie**, et elle n'est pas vérifiée. Le théorème, sous cette forme, ne dit rien.

Ce que l'on peut affirmer quand même. La version à limite infinie signalée plus haut s'applique, et elle dit deux choses. D'une part g n'est pas dérivable en 0. D'autre part le taux d'accroissement tend vers $+\infty$, donc **la courbe de g admet en O une tangente verticale**, d'équation $x = 0$. On peut le vérifier directement, ce qui est ici immédiat :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^{1/3}}{x} = x^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow +\infty.$$

Il n'y a donc aucune pathologie géométrique : la courbe est parfaitement lisse, elle possède une tangente en chacun de ses points, et cette tangente est simplement verticale en O , ce qu'aucun nombre $g'(0)$ ne peut coder. La lecture la plus parlante est celle de la symétrie : la courbe de $x \mapsto x^3$ a une tangente horizontale en O , et la symétrie d'axe $y = x$, qui échange une fonction et sa réciproque, échange horizontal et vertical.

Une variante d'une phrase. Pour $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$, la dérivée $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ tend vers $+\infty$ à droite et vers $-\infty$ à gauche : les deux demi-tangentes sont verticales et opposées, et la courbe présente un **point de rebroussement**.

5. Continuité en 0. Pour tout réel t , on a $|\operatorname{Arctan} t| < \frac{\pi}{2}$. Donc, pour $x \neq 0$,

$$|\psi(x)| = |x| \times \left| \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\pi}{2} |x|.$$

Le majorant tend vers 0, donc $\psi(x) \rightarrow 0 = \psi(0)$ par encadrement : ψ est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

La dérivée sur $\mathbb{R}^*$. Dérivons d'abord la composée $x \mapsto \operatorname{Arctan}(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right)' = \frac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = \frac{-1}{x^2 + 1},$$

la simplification s'obtenant en multipliant numérateur et dénominateur par $x^2 > 0$. La formule de dérivation d'un produit donne alors

$$\psi'(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

Les deux limites latérales. Quand $x \rightarrow 0^+$, on a $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $\text{Arctan } \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\pi}{2}$; et $\frac{x}{1+x^2} \rightarrow 0$.
Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi'(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Quand $x \rightarrow 0^-$, on a $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, donc $\text{Arctan } \frac{1}{x} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \psi'(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

ψ' n'a pas de limite en 0. Les deux limites latérales existent et sont distinctes, $\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$: la fonction ψ' n'admet donc pas de limite en 0. L'hypothèse 3 du théorème n'est pas vérifiée, et la version de la question 1 ne s'applique pas.

Ce que l'on conclut malgré tout. La version **unilatère** s'applique de chaque côté, puisque chaque limite latérale existe et est finie. Elle donne

$$\psi'_g(0) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \psi'_d(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ces deux nombres diffèrent, donc ψ **n'est pas dérivable en 0** : la courbe présente en O un point anguleux, avec deux demi-tangentes de pentes $\pm \frac{\pi}{2}$. $\square$

Vérification directe. Le taux d'accroissement se calcule ici sans peine :

$$\frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \text{Arctan } \frac{1}{x},$$

dont les limites en 0^+ et 0^- sont bien $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Les deux calculs concordent.

Le mot juste sur cet échec. Il faut être précis sur ce qui a manqué : ce n'est pas que ψ' soit sauvage, c'est que sa limite **bilatère** n'existe pas alors que ses limites latérales existent. Il y a des situations franchement pires, où même les limites latérales n'existent pas, et c'est l'objet de la question suivante.

6. *La réponse est non*, et il s'agit d'une erreur de logique, pas de calcul.

Le théorème est l'implication

$$[f' \text{ a une limite finie } L \text{ en } a] \implies [f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = L],$$

les hypothèses 1 et 2 étant supposées vérifiées. Sa **contraposée** est un énoncé valide :

$$[f \text{ n'est pas dérivable en } a] \implies [f' \text{ n'a pas de limite finie en } a].$$

L'énoncé proposé, « f' n'a pas de limite en a , donc f n'est pas dérivable en a », est la **rééciproque** du théorème. Rien ne l'établit, et elle est fautive.

Le contre-exemple. Il est construit et étudié en détail à l'**exercice 04** : la fonction valant $x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et 0 en 0 est dérivable en 0, de dérivée nulle, alors que sa dérivée n'admet aucune limite en 0, ni bilatère ni latérale. On s'y reportera plutôt que de refaire le calcul ici.

Ce qu'il faut retenir. Le théorème est un **moyen commode** de démontrer une dérivabilité quand la limite de f' existe. Son échec ne démontre rien du tout : quand f' n'a pas de limite, il faut revenir au taux d'accroissement, qui est la seule définition.

Ce qui est vrai en revanche. Si f est dérivable en a **et** si f' admet une limite en a , alors cette limite vaut nécessairement $f'(a)$: le théorème s'applique, il donne $f'(a) = L$, et l'unicité de la dérivée conclut. Autrement dit, une dérivée ne peut pas avoir en un point une limite différente de sa valeur.

Remarque

Une seconde lecture par le théorème de Darboux. Le théorème de Darboux, admis dans le cours, affirme qu'une fonction dérivée sur un intervalle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Une dérivée ne peut donc pas présenter un **saut**. Cela redonne la conclusion de la question 3 sans aucun calcul de taux d'accroissement : si les limites latérales de h'_λ en 0 valent 1 et λ avec $\lambda \neq 1$, alors, quelle que soit la valeur qu'on tenterait d'attribuer à $h'_\lambda(0)$, les valeurs strictement comprises entre 1 et λ ne seraient pas toutes atteintes au voisinage de 0. Aucune fonction dérivée ne se comporte ainsi, donc h_λ n'est pas dérivable en 0.

Commentaire. Le théorème de la limite de la dérivée est un outil de confort, et la structure de l'exercice est faite pour le montrer.

Sa démonstration tient en cinq lignes une fois l'égalité des accroissements finis acquise, et elle repose sur une seule idée : le point c_x que fournit le théorème est coincé entre a et x , donc il suit x dans sa course vers a . Tout est là.

Ses trois modes d'échec, eux, ne se ressemblent pas, et c'est ce qu'il faut savoir diagnostiquer. À la question 4, la limite existe mais elle est infinie : le théorème échoue, et sa variante infinie rend une information géométrique complète, une tangente verticale. À la question 5, la limite bilatère n'existe pas mais les limites latérales existent : le théorème échoue, et sa version unilatère rend deux demi-tangentes. À la question 6, plus rien n'existe : le théorème est muet, et il n'a pas le droit de conclure à la non-dérivabilité, ce qui est l'erreur la plus fréquente sur ce sujet.

Un dernier mot sur la rédaction. La question 2 montre que le théorème n'est pas toujours le chemin le plus court vers la dérivabilité, mais qu'il donne quelque chose de plus, la continuité de la dérivée, donc le caractère $\mathcal{C}^1$. La question 3 montre où il devient réellement décisif : sur un recollement, il transforme deux calculs de limites de dérivées, qui sont mécaniques, en une conclusion sur la classe de la fonction, ce que le taux d'accroissement n'aurait donné qu'au prix d'une forme indéterminée par côté et par ordre.

Exercice 18 ★★★ Étude complète : chaque étape nomme son outil

Notions : Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction, Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités, Applications des développements limités : limites, équivalents, tangente et position, asymptotes, Théorème de la limite de la dérivée et théorème de Darboux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 \operatorname{Arctan} x.$$

C'est une étude complète, avec une consigne supplémentaire qui en est le véritable objet : **chaque réponse doit commencer par nommer l'outil qu'elle emploie et vérifier ses hypothèses**. Une réponse juste dont l'outil n'est pas nommé sera considérée comme incomplète.

1. Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de f . Étudier la parité, et dire ce qu'elle permet d'économiser.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, la mettre sous forme d'une fraction, et déterminer son signe.
4. Dresser le tableau de variations complet, avec les valeurs **exactes** des extremums locaux. Ces extremums sont-ils globaux ?
5. Montrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ réalise une bijection sur un intervalle à préciser. Que dire de la dérivabilité de la bijection réciproque à l'extrémité gauche de cet intervalle ?
6. Calculer $f''(x)$, en déduire les intervalles de convexité et de concavité, et le point d'inflexion.
7. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, et déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
8. Étudier le comportement de la courbe en $+\infty$ puis en $-\infty$: y a-t-il une asymptote ? Préciser la position de la courbe par rapport à elle. Quel outil suffit ici, et quel outil serait inutile ?
9. Décrire l'allure de la courbe en quelques phrases, en y plaçant tous les éléments obtenus. Déterminer au passage le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement de la plus grande.
10. Discuter, selon le réel λ , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$.

Corrigé

1. Outil : le catalogue des fonctions usuelles et les opérations. La fonction Arctan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, ce résultat étant acquis au chapitre sur les limites et la continuité. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$, et elle y est continue et dérivable comme différence de la fonction identité et de $2 \operatorname{Arctan}$. Elle est même dérivable autant de fois qu'on veut, ce qui servira à la question 6.

Outil : la définition de la parité. La fonction Arctan est impaire. Donc, pour tout réel x ,

$$f(-x) = -x - 2 \operatorname{Arctan}(-x) = -x + 2 \operatorname{Arctan} x = -(x - 2 \operatorname{Arctan} x) = -f(x).$$

La fonction f est **impair**, et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Ce que cela économise. Toute l'étude sur $[0, +\infty[$ se transporte sur $] -\infty, 0]$ par cette symétrie : une limite en $+\infty$ donne celle en $-\infty$, un maximum local en -1 se déduit d'un minimum local en 1, une asymptote se déduit de l'autre. On mènera néanmoins les calculs des deux côtés quand ils sont immédiats, afin que le tableau de variations soit lisible d'un bout à l'autre, mais chaque déduction par symétrie sera signalée.

2. Outil : les limites de Arctan et le théorème des opérations sur les limites. On sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}.$$

Le terme $2 \operatorname{Arctan} x$ tend donc vers π , quantité **finie**, tandis que x tend vers $+\infty$. La différence tend donc vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Par imparité, $f(x) = -f(-x)$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Il n'y a ici aucune forme indéterminée, et c'est exactement pour cela que la question est facile : un terme non borné plus un terme borné.

3. Outil : la dérivée d'une somme et la dérivée de Arctan. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) - 2}{1+x^2} = \frac{x^2 - 1}{1+x^2}.$$

La mise au même dénominateur est l'étape utile : sans elle, le signe n'est pas lisible.

Le signe. Le dénominateur $1+x^2$ est strictement positif pour tout x , donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Ce trinôme de coefficient dominant positif est négatif strictement entre ses racines -1 et 1 , et positif à l'extérieur. Donc

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \quad f'(x) < 0 \text{ sur }]-1, 1[, \quad f'(-1) = f'(1) = 0.$$

4. Outil : le théorème reliant le signe de la dérivée aux variations, démontré à partir de l'égalité des accroissements finis à l'exercice 16. Il s'applique sur chacun des trois intervalles ci-dessus, et non sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Les valeurs exactes. On a $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et, par imparité, $\operatorname{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Donc

$$f(1) = 1 - 2 \times \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -0,5708, \quad f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,5708.$$

Les deux valeurs sont opposées, ce qui est la vérification de cohérence attendue pour une fonction impaire.

Le tableau.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\frac{\pi}{2}-1$ $1-\frac{\pi}{2}$ $+\infty$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$				

Nature des extremums. En $x = -1$, la dérivée change de signe en passant du positif au négatif : f admet un **maximum local**, de valeur $\frac{\pi}{2} - 1$. En $x = 1$, elle passe du négatif au positif : f admet un **minimum local**, de valeur $1 - \frac{\pi}{2}$.

Ils ne sont pas globaux, et c'est le tableau qui le dit. Comme f tend vers $+\infty$, il existe des réels x tels que $f(x) > \frac{\pi}{2} - 1$: le maximum local n'est pas un maximum global, et f n'a d'ailleurs pas de maximum. De même, la limite $-\infty$ interdit au minimum local d'être global. **Un extremum obtenu par annulation de la dérivée est local par construction ; le qualifier de global demande un argument supplémentaire, ici une comparaison avec les limites.**

5. Outil : le théorème de la bijection, acquis au chapitre précédent, plus la version fine de la stricte monotonie établie à la question 6 de l'exercice 16.

Sur $[1, +\infty[$, on a $f' \geq 0$, la dérivée ne s'annulant qu'en $x = 1$, donc en un seul point. D'après la version fine, f est **strictement croissante** sur $[1, +\infty[$. Elle y est de plus continue. Le théorème de la bijection s'applique et donne

$$f([1, +\infty[) = \left[f(1), \lim_{+\infty} f \right[= \left[1 - \frac{\pi}{2}, +\infty \right[.$$

La restriction de f à $[1, +\infty[$ réalise donc une bijection sur $[1 - \pi/2, +\infty[$. Notons φ sa bijection réciproque. $\square$

La dérivabilité de φ à l'extrémité gauche. Posons $\beta = 1 - \frac{\pi}{2}$, de sorte que $\varphi(\beta) = 1$.

Outil : le théorème de dérivation d'une réciproque. Pour $y > \beta$, on a $\varphi(y) > 1$, donc $f'(\varphi(y)) \neq 0$, et φ est dérivable en y avec

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}.$$

En $y = \beta$, en revanche, $f'(\varphi(\beta)) = f'(1) = 0$: le théorème ne s'applique pas, et il faut regarder de plus près.

Outil : le théorème de la limite de la dérivée, version à limite infinie. La fonction φ est continue sur $[\beta, +\infty[$ et dérivable sur $] \beta, +\infty[$. Quand $y \rightarrow \beta^+$, la continuité de φ donne $\varphi(y) \rightarrow 1$, donc $f'(\varphi(y)) \rightarrow f'(1) = 0$; et cette quantité est strictement positive pour $y > \beta$. Donc

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))} \rightarrow +\infty.$$

La fonction φ **n'est donc pas dérivable en β** , et sa courbe admet au point d'abscisse β une **tangente verticale**.

C'est la lecture attendue, et elle est purement géométrique : la courbe de f a une tangente horizontale au point de coordonnées $(1, \beta)$, et la symétrie d'axe $y = x$ qui échange une fonction et sa réciproque transforme cette tangente horizontale en tangente verticale.

6. Outil : la dérivation d'une composée, puis la caractérisation de la convexité par le signe de la dérivée seconde.

Reprenons de la forme non réduite $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}$, qui se dérive plus facilement que la fraction réduite :

$$f''(x) = -2 \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Le signe. Le dénominateur est strictement positif, donc $f''(x)$ a le signe de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	—	0	+

Conclusion. La fonction f est **concave** sur $] -\infty, 0]$ et **convexe** sur $[0, +\infty[$. La dérivée seconde s'annule en 0 **en changeant de signe**, donc le point de la courbe d'abscisse 0 est un **point d'inflexion**. Comme $f(0) = 0 - 2 \operatorname{Arctan}(0) = 0$, ce point est l'origine du repère, ce qui était prévisible : une fonction impaire dont la courbe admet un point d'inflexion en son centre de symétrie ne peut l'avoir qu'en O .

Il faut insister sur les deux mots « en changeant de signe ». Une dérivée seconde nulle en un point ne suffit pas à produire une inflexion, et l'annulation sans changement de signe est le contre-exemple classique.

7. Outil : le développement limité, application « tangente et position ».

L'équation de la tangente. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{0-1}{1} = -1$, donc la tangente T au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = f(0) + f'(0)x = -x.$$

La position. Le développement limité usuel de Arctan en 0 à l'ordre 3 s'écrit

$$\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

En le reportant dans l'expression de f , ce qui est licite car il s'agit d'une combinaison linéaire :

$$f(x) = x - 2 \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = -x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

La différence entre la courbe et sa tangente vaut donc

$$f(x) - (-x) = \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Le terme dominant est $\frac{2x^3}{3}$, dont le signe est celui de x : au voisinage de 0, la différence est **négative** pour $x < 0$ et **positive** pour $x > 0$.

La courbe est donc **au-dessous** de sa tangente à gauche de O et **au-dessus** à droite : elle **traverse** sa tangente en O . C'est la caractérisation d'un point d'inflexion par les développements limités, et elle confirme la conclusion de la question 6.

Remarque

Deux outils, deux questions différentes. Le signe de f'' donne la convexité **sur des intervalles**, donc une information globale par morceaux. Le développement limité donne la position par rapport à **une** tangente, donc une information locale en un point. Ils se recoupent ici parce que le point d'inflexion est unique et le changement de convexité net ; ils ne sont pas interchangeable en général, et il est prudent de faire les deux quand l'énoncé le permet, chacun servant de vérification à l'autre.

8. Outil : une simple limite. Et il faut dire pourquoi c'est le bon outil.

En $+\infty$. Considérons la droite Δ_+ d'équation $y = x - \pi$ et calculons

$$f(x) - (x - \pi) = x - 2 \text{Arctan } x - x + \pi = \pi - 2 \text{Arctan } x.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, cette quantité tend vers $\pi - 2 \times \frac{\pi}{2} = 0$. La droite Δ_+ est donc **asymptote oblique** à la courbe en $+\infty$.

La position. Pour tout réel x , on a $\text{Arctan } x < \frac{\pi}{2}$, donc $\pi - 2 \text{Arctan } x > 0$: la courbe est **strictement au-dessus** de Δ_+ , et cela sur $\mathbb{R}$ tout entier, pas seulement au voisinage de $+\infty$. En $-\infty$. Par imparité, la symétrie par rapport à O transforme Δ_+ en la droite Δ_- d'équation $y = x + \pi$, qui est donc asymptote en $-\infty$, la courbe étant strictement au-dessous. On peut le vérifier directement :

$$f(x) - (x + \pi) = -2 \text{Arctan } x - \pi \longrightarrow -2 \times \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \pi = 0,$$

et cette quantité est strictement négative puisque $\text{Arctan } x > -\frac{\pi}{2}$.

Quel outil suffit, et lequel serait inutile. Le réflexe, devant une branche infinie, est de chercher un développement limité en l'infini. **Il est ici inutile**, et savoir le dire fait partie de la réponse. La raison est que f est déjà écrite comme la somme d'une fonction affine, x , et d'un terme, $-2 \text{Arctan } x$, qui possède une **limite finie** en $+\infty$. L'asymptote se lit donc directement : sa pente est 1, son ordonnée à l'origine est la limite du second terme, soit $-\pi$.

Un développement en l'infini serait nécessaire dans deux situations, aucune des deux n'étant celle-ci : si la différence $f(x) - (ax + b)$ tendait vers 0 sans qu'on sache l'explicitier, ou si l'énoncé

demandait à **quelle vitesse** la courbe rejoint son asymptote. Cette dernière question n'est pas posée.

9. *L'allure.* La courbe est symétrique par rapport à l'origine. En venant de $-\infty$, elle longe par en dessous la droite $y = x + \pi$, en montant. Elle atteint en $x = -1$ un maximum local, au point de coordonnées $(-1, \pi/2 - 1)$, soit environ $(-1; 0,57)$, où la tangente est horizontale. Elle redescend ensuite, traverse l'origine avec la tangente $y = -x$ de pente -1 , l'origine étant son point d'inflexion et le seul endroit où sa convexité change. Elle atteint en $x = 1$ un minimum local au point $(1, 1 - \pi/2)$, soit environ $(1; -0,57)$, tangente horizontale à nouveau. Puis elle remonte indéfiniment en longeant par au-dessus la droite $y = x - \pi$. Elle est concave sur tout $] -\infty, 0]$ et convexe sur tout $[0, +\infty[$.

Le nombre de zéros. Sur $[0, 1]$, la fonction est décroissante de $f(0) = 0$ à $f(1) < 0$, donc $f(x) < 0$ pour tout $x \in]0, 1]$: pas de zéro autre que 0. Sur $[1, +\infty[$, la question 5 donne une bijection sur $[1 - \pi/2, +\infty[$, intervalle qui contient 0 puisque $1 - \pi/2 < 0$: il y a donc **exactement un zéro** α dans $]1, +\infty[$. Par imparité, les zéros de f sur $\mathbb{R}$ sont donc exactement

$$-\alpha, \quad 0, \quad \alpha.$$

Un encadrement de α . Avec $\text{Arctan}(2) \approx 1,107149$ et $\text{Arctan}(3) \approx 1,249046$:

$$f(2) \approx 2 - 2,214297 = -0,214 < 0, \quad f(3) \approx 3 - 2,498092 = 0,502 > 0,$$

donc $\alpha \in]2, 3]$. En resserrant, avec $\text{Arctan}(2,3) \approx 1,160669$ et $\text{Arctan}(2,4) \approx 1,176005$:

$$f(2,3) \approx -0,021 < 0, \quad f(2,4) \approx 0,048 > 0,$$

donc $\alpha \in]2,3; 2,4]$, soit $\alpha \approx 2,33$.

10. *Outil : le théorème de la bijection appliqué séparément sur chacun des trois intervalles de monotonie.* C'est la seule méthode correcte, et elle demande de la rigueur sur les points de raccord.

Posons

$$M = f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,5708 \quad \text{et} \quad m = f(1) = 1 - \frac{\pi}{2} = -M \approx -0,5708.$$

Sur chacun des trois intervalles, f est continue et strictement monotone, la version fine de la stricte monotonie s'appliquant comme à la question 5. Le théorème de la bijection donne donc les trois images :

$$f(]-\infty, -1]) =]-\infty, M],$$

$$f([-1, 1]) = [m, M],$$

$$f([1, +\infty[) = [m, +\infty[.$$

Sur chacun de ces intervalles, l'équation $f(x) = \lambda$ a **au plus une** solution, par stricte monotonie, et exactement une si et seulement si λ appartient à l'image correspondante.

Il reste à ne pas compter deux fois les points de raccord -1 et 1 , qui appartiennent chacun à deux des trois intervalles. Cela se produit précisément quand λ vaut M ou m .

La discussion.

- **Si** $\lambda < m$: seule la première image contient λ . Il y a **une** solution, dans $] -\infty, -1[$.
- **Si** $\lambda = m$: la première image contient m , ce qui donne une solution dans $] -\infty, -1[$; les deux autres donnent toutes deux la solution $x = 1$, qui n'est comptée qu'une fois. Il y a **deux** solutions.
- **Si** $m < \lambda < M$: les trois images contiennent λ , et les trois solutions vivent respectivement dans $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $] 1, +\infty[$, donc sont deux à deux distinctes. Il y a **trois** solutions.
- **Si** $\lambda = M$: les deux premières images donnent toutes deux la solution $x = -1$, comptée une fois ; la troisième contient M puisque $M > m$, et donne une solution dans $] 1, +\infty[$. Il y a **deux** solutions.

— **Si** $\lambda > M$: seule la troisième image contient λ . Il y a **une** solution, dans $]1, +\infty[$.

Récapitulatif. L'équation $f(x) = \lambda$ admet

une solution si $\lambda < 1 - \frac{\pi}{2}$ ou $\lambda > \frac{\pi}{2} - 1$,

deux solutions si $\lambda = 1 - \frac{\pi}{2}$ ou $\lambda = \frac{\pi}{2} - 1$,

trois solutions si $1 - \frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2} - 1$.

Vérification. Pour $\lambda = 0$, on a bien $m < 0 < M$, donc trois solutions, ce qui est exactement le résultat de la question 9. $\square$

Lecture des deux cas à deux solutions. Ils correspondent aux valeurs des extremums. Graphiquement, la droite horizontale $y = \lambda$ y est **tangente** à la courbe en un point, celui où la dérivée s'annule, et la coupe transversalement en un autre. C'est la situation limite entre une et trois intersections, et c'est pour cela qu'elle mérite une ligne à part dans la discussion.

Commentaire. L'exercice est une étude de fonction ordinaire, et sa consigne le transforme en autre chose : un inventaire des outils du chapitre et de ce que chacun sait faire.

On y voit sept outils distincts, et aucun n'est remplaçable par un autre. Le théorème sur le signe de la dérivée donne les variations, donc les extremums, et rien de plus : la question 4 doit ajouter une comparaison avec les limites pour savoir s'ils sont globaux. Le théorème de la bijection donne l'existence et l'unicité d'une solution sur un intervalle de monotonie, et c'est lui, et lui seul, qui permet la discussion de la question 10 ; sans lui, on n'aurait que des conjectures lues sur un dessin. Le théorème de dérivation d'une réciproque échoue là où f' s'annule, et c'est le théorème de la limite de la dérivée qui prend le relais pour livrer la tangente verticale. Le signe de f'' donne la convexité sur des intervalles ; le développement limité donne la position par rapport à une tangente en un point. Une simple limite suffit pour l'asymptote, et l'outil qu'on croyait obligatoire, le développement en l'infini, ne sert à rien ici.

Cette dernière observation est la plus utile de l'exercice. **Nommer l'outil oblige à se demander s'il est nécessaire**, et la réponse est parfois non. Une copie qui calcule un développement asymptotique à la question 8 obtiendra le bon résultat, aura perdu dix minutes, et n'aura pas montré qu'elle avait compris pourquoi Arctan rend cette question facile.

Exercice 19 ★★ Leibniz, et une relation de récurrence

Notions : Dérivées successives, classes de régularité, formule de Leibniz

1. Énoncer la formule de Leibniz, en précisant ses hypothèses.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x , l'expression de $f^{(n)}(x)$, où

$$f(x) = x^3 e^{-x}.$$

Vérifier le résultat aux rangs 1, 2 et 3 par un calcul direct.

3. Même travail pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 + 1) \sin x$.
4. On note y la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $y(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^2$.

- a. Montrer que y est deux fois dérivable sur $] -1, 1[$ et que

$$(1 - x^2) y''(x) - x y'(x) = 2 \quad \text{pour tout } x \in] -1, 1[.$$

- b. Dériver cette relation n fois par la formule de Leibniz, puis l'évaluer en 0 : en déduire, pour tout $n \geq 1$, une relation de récurrence entre $y^{(n+2)}(0)$ et $y^{(n)}(0)$.
 - c. Calculer $y(0)$, $y'(0)$ et $y''(0)$, puis déterminer $y^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. **Question de méthode.** Pourquoi obtenir les nombres $f^{(n)}(0)$ **sans calculer** la fonction $f^{(n)}$ est-il précieux ? Illustrer sur la fonction de la question 4.

Corrigé

1. *La formule de Leibniz.* Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, et u et v deux fonctions n fois dérivables sur I . Alors le produit uv est n fois dérivable sur I et

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Trois observations avant de l'employer.

Pour $n = 1$, elle redonne la formule de dérivation d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$. Elle est **symétrique** en u et v , comme on le voit en remplaçant k par $n - k$ dans la somme, ce qui permet de choisir librement lequel des deux facteurs on appelle u . Enfin, et c'est ce qui la rend utile, **si l'un des deux facteurs est un polynôme de degré d , ses dérivées d'ordre supérieur à d sont nulles et la somme se réduit à au plus $d + 1$ termes**, quel que soit n . C'est ce phénomène qu'exploitent les questions 2 et 3.

2. *Le choix des facteurs.* Posons $u(x) = x^3$ et $v(x) = e^{-x}$, toutes deux dérivables autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}$. On place le polynôme en u pour que ce soit lui qui tronque la somme.

Les dérivées de u .

$$u(x) = x^3, \quad u'(x) = 3x^2, \quad u''(x) = 6x, \quad u'''(x) = 6, \quad u^{(k)} = 0 \text{ pour } k \geq 4.$$

La somme comportera donc **quatre** termes au plus, et non trois : c'est la différence entre un facteur de degré 3 et un facteur de degré 2.

Les dérivées de v . Une récurrence immédiate donne $v^{(m)}(x) = (-1)^m e^{-x}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$: c'est vrai pour $m = 0$, et si $v^{(m)}(x) = (-1)^m e^{-x}$ alors $v^{(m+1)}(x) = (-1)^m \times (-e^{-x}) = (-1)^{m+1} e^{-x}$.

L'application de la formule. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\min(n,3)} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) (-1)^{n-k} e^{-x}.$$

Comme $(-1)^{n-k} = (-1)^n (-1)^k$, on peut sortir le facteur $(-1)^n e^{-x}$, les signes restants étant alors $+$, $-$, $+$, $-$ pour $k = 0, 1, 2, 3$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} \left[\binom{n}{0} x^3 - 3 \binom{n}{1} x^2 + 6 \binom{n}{2} x - 6 \binom{n}{3} \right].$$

Il reste à expliciter les coefficients binomiaux :

$$3 \binom{n}{1} = 3n, \quad 6 \binom{n}{2} = 6 \times \frac{n(n-1)}{2} = 3n(n-1), \quad 6 \binom{n}{3} = 6 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n(n-1)(n-2).$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x ,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} [x^3 - 3n x^2 + 3n(n-1)x - n(n-1)(n-2)].$$

Pourquoi la formule vaut aussi pour $n = 0, 1$ et 2 . Le calcul ci-dessus suppose $n \geq 3$, pour que les quatre termes existent. Mais pour $n < 3$ les coefficients surnuméraires s'annulent d'eux-mêmes : $3n(n-1) = 0$ pour $n \leq 1$, et $n(n-1)(n-2) = 0$ pour $n \leq 2$. L'expression est donc valable sans restriction.

Les vérifications. Au rang 1, la formule donne $-e^{-x}(x^3 - 3x^2) = e^{-x}(3x^2 - x^3)$, et le calcul direct

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3 \times (-e^{-x}) = e^{-x}(3x^2 - x^3)$$

concorde. Au rang 2, la formule donne $e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x)$, et le calcul direct

$$f''(x) = (6x - 3x^2)e^{-x} - (3x^2 - x^3)e^{-x} = e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x)$$

concorde également. Au rang 3, la formule donne $-e^{-x}(x^3 - 9x^2 + 18x - 6)$, et

$$f'''(x) = (3x^2 - 12x + 6)e^{-x} - (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x} = e^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6),$$

ce qui est la même chose. $\square$

On remarquera que la partie polynomiale garde toujours le degré 3 et le coefficient dominant 1 : dériver ne fait ici que déplacer les coefficients des degrés inférieurs.

3. Le choix des facteurs. Posons $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sin x$. On a

$$u'(x) = 2x, \quad u''(x) = 2, \quad u^{(k)}(x) = 0 \text{ pour } k \geq 3,$$

donc la somme aura au plus trois termes.

Les dérivées du sinus. Montrons par récurrence que $v^{(m)}(x) = \sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $m = 0$. Et si c'est vrai au rang m , alors

$$v^{(m+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(m+1)\pi}{2}\right),$$

en utilisant l'identité $\cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$. La propriété est donc vraie pour tout m .

L'application de la formule. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{(n)}(x) = (x^2 + 1) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1) \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right),$$

en ayant utilisé $\binom{n}{1} \times 2x = 2nx$ et $\binom{n}{2} \times 2 = n(n-1)$.

La simplification. Posons $\theta = x + \frac{n\pi}{2}$. Les deux derniers arguments sont $\theta - \frac{\pi}{2}$ et $\theta - \pi$, et l'on sait que

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta, \quad \sin(\theta - \pi) = -\sin \theta.$$

En reportant et en regroupant les termes en $\sin \theta$:

$$g^{(n)}(x) = (x^2 + 1 - n(n-1)) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2nx \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Vérification aux petits rangs. Pour $n = 1$, la formule donne

$$(x^2 + 1) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x,$$

qui est bien $g'(x)$. Pour $n = 2$, elle donne $(x^2 - 1) \sin(x + \pi) - 4x \cos(x + \pi) = (1 - x^2) \sin x + 4x \cos x$, et le calcul direct

$$g''(x) = 2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - (x^2 + 1) \sin x = (1 - x^2) \sin x + 4x \cos x$$

concorde. $\square$

4.a *La régularité.* La fonction Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée $x \mapsto (1 - x^2)^{-1/2}$, elle-même dérivable autant de fois qu'on veut sur $] -1, 1[$ puisque $1 - x^2 > 0$ y est vérifié. Une récurrence immédiate montre alors que Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$, et il en va de même de son carré y , comme produit. En particulier y est deux fois dérivable, et même autant de fois qu'il le faudra à la question 4.b.

La dérivée première. Pour $x \in] -1, 1[$, la dérivation d'un carré donne

$$y'(x) = 2 \operatorname{Arcsin} x \times \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Multiplions les deux membres par $\sqrt{1 - x^2}$, qui est strictement positif :

$$\sqrt{1 - x^2} y'(x) = 2 \operatorname{Arcsin} x.$$

C'est cette forme, sans dénominateur, qu'il faut dériver : c'est là tout le calcul.

La dérivée. Les deux membres sont dérivables sur $] -1, 1[$. À gauche, la formule du produit, avec

$$(\sqrt{1 - x^2})' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

donne

$$\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} y'(x) + \sqrt{1 - x^2} y''(x).$$

À droite, la dérivée est $\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$. En multipliant l'égalité obtenue par $\sqrt{1 - x^2}$, tous les radicaux disparaissent :

$$-x y'(x) + (1 - x^2) y''(x) = 2,$$

c'est-à-dire $(1 - x^2) y'' - x y' = 2$. $\square$

4.b *La dérivée n fois.* Soit $n \geq 1$. Dérivons n fois les deux membres de la relation.

Le premier produit se traite par Leibniz avec le polynôme $x \mapsto 1 - x^2$, dont les dérivées sont $-2x$, puis -2 , puis 0 à partir de l'ordre 3 ; le second facteur est y'' , dont la dérivée d'ordre m est $y^{(m+2)}$:

$$[(1 - x^2) y'']^{(n)} = (1 - x^2) y^{(n+2)} - 2nx y^{(n+1)} - n(n-1) y^{(n)},$$

les coefficients étant $\binom{n}{1} \times (-2x) = -2nx$ et $\binom{n}{2} \times (-2) = -n(n-1)$.

Le second produit se traite de même, avec le polynôme $x \mapsto x$, dont les dérivées sont 1 puis 0 :

$$[xy']^{(n)} = xy^{(n+1)} + ny^{(n)}.$$

Enfin, le membre de droite est la fonction constante 2, dont la dérivée d'ordre $n \geq 1$ est nulle. En reportant :

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx y^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0.$$

Regroupons : les termes en $y^{(n+1)}$ donnent $-(2n+1)xy^{(n+1)}$, et ceux en $y^{(n)}$ donnent $-(n(n-1)+n)y^{(n)} = -n^2y^{(n)}$. D'où, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1-x^2)y^{(n+2)}(x) - (2n+1)xy^{(n+1)}(x) - n^2y^{(n)}(x) = 0.$$

L'évaluation en 0. En posant $x = 0$, les deux termes en x disparaissent et $1-x^2$ vaut 1 :

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0) \quad \text{pour tout } n \geq 1. \quad \square$$

C'est tout l'intérêt de l'évaluation en 0 : elle supprime le terme intermédiaire $y^{(n+1)}$ et laisse une récurrence **de deux en deux**, qui sépare les rangs pairs des rangs impairs.

4.c *Les trois premières valeurs.* On a $\text{Arcsin}(0) = 0$, donc

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 2 \times 0 \times 1 = 0.$$

Pour $y''(0)$, on n'a pas besoin de dériver : il suffit d'évaluer la relation de la question 4.a en $x = 0$, ce qui donne $(1-0)y''(0) - 0 = 2$, donc

$$y''(0) = 2.$$

On notera que la récurrence de la question 4.b ne vaut que pour $n \geq 1$, parce que la dérivée d'ordre 0 du membre de droite est 2 et non 0 : c'est exactement cette constante 2 qui fournit la valeur d'amorçage.

Les rangs impairs. La récurrence appliquée à $n = 1$ donne $y^{(3)}(0) = 1^2 \times y'(0) = 0$. Puis, par récurrence sur p , si $y^{(2p+1)}(0) = 0$ alors $y^{(2p+3)}(0) = (2p+1)^2 \times y^{(2p+1)}(0) = 0$. Donc

$$y^{(n)}(0) = 0 \quad \text{pour tout } n \text{ impair.}$$

C'était prévisible : Arcsin est impaire, donc y est **paire**, et toutes les dérivées d'ordre impair d'une fonction paire s'annulent en 0. La récurrence le redémontre, et cette concordance est une bonne vérification.

Les rangs pairs. La récurrence, écrite avec $n = 2p$, donne $y^{(2p+2)}(0) = (2p)^2 y^{(2p)}(0)$. En partant de $y^{(2)}(0) = 2$:

$$y^{(4)}(0) = 2^2 \times 2 = 8, \quad y^{(6)}(0) = 4^2 \times 8 = 128, \quad y^{(8)}(0) = 6^2 \times 128 = 4608.$$

La formule générale. Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ que

$$y^{(2p)}(0) = 2^{2p-1} ((p-1)!)^2.$$

Initialisation. Pour $p = 1$: $2^1 \times (0!)^2 = 2 = y''(0)$.

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang p . La récurrence de la question 4.b donne

$$y^{(2p+2)}(0) = (2p)^2 y^{(2p)}(0) = 4p^2 \times 2^{2p-1} ((p-1)!)^2 = 2^{2p+1} (p \times (p-1)!)^2 = 2^{2(p+1)-1} (p!)^2,$$

ce qui est la formule au rang $p+1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y^{(n)}(0) = 0 \text{ si } n \text{ est impair ou nul,} \quad y^{(2p)}(0) = 2^{2p-1}((p-1)!)^2 \text{ pour } p \geq 1. \quad \square$$

On vérifie sur les valeurs déjà calculées : $2^3(1!)^2 = 8$, $2^5(2!)^2 = 128$, $2^7(3!)^2 = 4608$.

5. Pourquoi c'est précieux. Parce que ces nombres **sont** les coefficients des formules de Taylor. La formule de Taylor-Young en 0 s'écrit, pour une fonction n fois dérivable,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n),$$

et l'on voit que seule la **suite des nombres** $f^{(k)}(0)$ y intervient : la fonction $f^{(k)}$ tout entière n'est jamais utilisée. Obtenir ces nombres par une récurrence, c'est donc obtenir le développement limité à n'importe quel ordre, au prix d'une multiplication par étape.

L'illustration. La fonction y de la question 4 n'a pas de dérivée n -ième que l'on puisse écrire, contrairement à celles des questions 2 et 3 : aucune formule fermée analogue ne l'attend. Et pourtant la question 4.c donne son développement limité en 0 à l'ordre 7 sans aucun effort supplémentaire :

$$y(x) = \frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{4!}x^4 + \frac{128}{6!}x^6 + o(x^7) = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{8x^6}{45} + o(x^7),$$

les termes de rang impair étant nuls, et $\frac{128}{720} = \frac{8}{45}$.

Les deux situations sont complémentaires, et il faut savoir les reconnaître. Quand un facteur polynomial tronque la somme de Leibniz, comme aux questions 2 et 3, on obtient $f^{(n)}(x)$ pour tout x , donc bien plus que les coefficients de Taylor ; ceux-ci s'en déduisent d'ailleurs en une ligne, par exemple $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}n(n-1)(n-2)$ pour la fonction de la question 2. Quand aucune formule fermée n'existe, on cherche une **relation** entre y et ses dérivées, on la dérive n fois par Leibniz, et on l'évalue au point qui annule le plus de termes possible. On perd la fonction $y^{(n)}$, on garde les nombres, et les nombres suffisent.

Remarque

Deux précautions de rédaction. La récurrence obtenue en 4.b ne donne les valeurs qu'en 0 : rien dans cet exercice ne permet d'écrire $y^{(n)}(x)$ pour x quelconque, et il ne faut pas le laisser croire.

Et le développement écrit ci-dessus est un développement **limité** : c'est une égalité valable au voisinage de 0, avec un reste négligeable. Ce n'est pas une somme infinie, et l'écrire avec des points de suspension jusqu'à l'infini serait une faute de nature, pas seulement de notation.

Commentaire. L'exercice met en scène deux emplois très différents d'une même formule.

Aux questions 2 et 3, la formule de Leibniz sert à **calculer**. Ce qui la rend efficace est le facteur polynomial, qui annule tous les termes de la somme au-delà de son degré : la somme est finie, courte, et le résultat est une formule fermée valable pour tout x . Le seul soin à prendre est la gestion des signes et des coefficients binomiaux, et la vérification aux petits rangs est le contrôle qui attrape les erreurs de signe.

À la question 4, elle sert à **transformer une relation**. Le polynôme qui tronque la somme n'est plus un facteur choisi par commodité, c'est le $1 - x^2$ imposé par la fonction elle-même. La formule ne produit alors aucune expression de $y^{(n)}$, mais une relation entre trois dérivées consécutives ; et c'est l'évaluation en un point bien choisi, ici 0, qui la transforme en récurrence numérique exploitable.

La leçon commune est que la dérivée n -ième n'est presque jamais l'objet cherché. Ce que l'on veut, ce sont ses valeurs en un point, parce que ce sont elles qui alimentent les formules de

Taylor, donc les développements limités, donc les calculs de limites et de positions de courbes. Le détour par une relation différentielle est souvent le chemin le plus court vers ces valeurs, et parfois le seul.

Exercice 20 ★★★★★ De quelle classe est ce raccord ?

Notions : Dérivées successives, classes de régularité, formule de Leibniz, Dérivées à gauche et à droite, point anguleux, tangente verticale, fonctions définies par morceaux

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note f_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_p(x) = x^p \text{ si } x \geq 0, \quad f_p(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

1. Traiter à la main les cas $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$: dans chacun, déterminer la classe **exacte** de f_p sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que f_p soit de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Conjecturer le résultat général, puis **démontrer** que pour tout $p \geq 1$ la fonction f_p est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et n'est pas de classe $\mathcal{C}^p$. On calculera $f_p^{(k)}$ pour $k \leq p$ et on examinera le raccord en 0.
3. En déduire le résultat suivant : si P est un polynôme non nul et si g est définie par $g(x) = P(x)$ pour $x \geq 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$, alors g n'est **jamais** de classe $\mathcal{C}^\infty$. Préciser sa classe exacte.
4. **Une variante.** Soient a, b, c trois réels et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = e^{ax} \text{ si } x < 0, \quad h(x) = b + cx + x^2 \text{ si } x \geq 0.$$

À quelle condition sur a, b, c la fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$? Peut-elle être de classe $\mathcal{C}^3$?

Corrigé**Un lemme préalable, qui sert partout**

Il vaut la peine d'isoler d'emblée le calcul qui va se répéter.

Lemme. Pour tout $m \geq 1$, la fonction f_m est continue sur $\mathbb{R}$, et $f_m(0) = 0$. De plus :

1. si $m \geq 2$, la fonction f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_m = m f_{m-1}$;
2. la fonction f_1 n'est **pas** dérivable en 0 : ses dérivées à gauche et à droite en 0 valent 0 et 1.

Démonstration. *Continuité.* Pour $m \geq 1$, on a $f_m(0) = 0^m = 0$. À gauche de 0, f_m est nulle, donc de limite 0 ; à droite, $x^m \rightarrow 0$. Les deux limites latérales valent $0 = f_m(0)$, donc f_m est continue en 0 ; elle l'est évidemment sur $\mathbb{R}^*$.

Point 1. Soit $m \geq 2$. Sur $]0, +\infty[$, on a $f_m(x) = x^m$, donc $f'_m(x) = mx^{m-1} = m f_{m-1}(x)$ puisque $x > 0$. Sur $] -\infty, 0[$, la fonction f_m est nulle donc $f'_m(x) = 0 = m f_{m-1}(x)$, la fonction f_{m-1} y étant nulle aussi. Reste le point 0. Le taux d'accroissement vaut

$$\frac{f_m(x) - f_m(0)}{x - 0} = \frac{x^m}{x} = x^{m-1} \text{ si } x > 0, \quad = 0 \text{ si } x < 0.$$

Comme $m - 1 \geq 1$, la quantité x^{m-1} tend vers 0 quand $x \rightarrow 0^+$. Les deux limites latérales du taux valent donc 0 : f_m est dérivable en 0 avec $f'_m(0) = 0$, et cette valeur est bien $m f_{m-1}(0) = 0$. D'où $f'_m = m f_{m-1}$ sur $\mathbb{R}$.

Point 2. Pour $m = 1$, le même taux d'accroissement vaut $\frac{x}{x} = 1$ si $x > 0$ et 0 si $x < 0$. Les deux limites latérales valent 1 et 0 : la fonction f_1 admet en 0 une dérivée à droite égale à 1 et une dérivée à gauche égale à 0, et comme elles diffèrent, elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe présente en O un point anguleux. $\square$

C'est le point 2 qui va tout décider : **c'est le seul obstacle de tout l'exercice**, et il revient toujours au même endroit.

1. Les trois premiers cas

Cas $p = 1$. La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ d'après le lemme, donc de classe $\mathcal{C}^0$. Elle n'est pas dérivable en 0, donc pas de classe $\mathcal{C}^1$. Sa classe exacte est $\mathcal{C}^0$.

Cas $p = 2$. D'après le point 1 du lemme, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'_2 = 2f_1$. Explicitement,

$$f'_2(x) = 2x \text{ si } x \geq 0, \quad f'_2(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, donc f_2 est de classe $\mathcal{C}^1$. Mais $f'_2 = 2f_1$ n'est pas dérivable en 0, puisque f_1 ne l'est pas et que $2 \neq 0$: donc f_2 n'est pas deux fois dérivable en 0, et a fortiori pas de classe $\mathcal{C}^2$. Sa classe exacte est $\mathcal{C}^1$.

Cas $p = 3$. Le lemme donne $f'_3 = 3f_2$, puis $f''_3 = 3 \times 2f_1 = 6f_1$. Explicitement,

$$f'_3(x) = 3x^2, \quad f''_3(x) = 6x \text{ pour } x \geq 0, \quad f'_3(x) = f''_3(x) = 0 \text{ pour } x < 0.$$

La fonction f''_3 est continue sur $\mathbb{R}$, donc f_3 est de classe $\mathcal{C}^2$; et $f''_3 = 6f_1$ n'est pas dérivable en 0, donc f_3 n'est pas de classe $\mathcal{C}^3$. Sa classe exacte est $\mathcal{C}^2$.

On voit le mécanisme : **dériver fait descendre l'indice de 1**, et la chaîne s'arrête net quand on tombe sur f_1 .

2. Le cas général

La conjecture. Les trois cas donnent les classes $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$ pour $p = 1, 2, 3$. On conjecture donc que f_p est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ exactement.

Le calcul des dérivées successives. Montrons par récurrence sur k que, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq p-1$, la fonction f_p est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f_p^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} f_{p-k}.$$

Initialisation. Pour $k = 0$, le coefficient vaut $\frac{p!}{p!} = 1$ et la formule s'écrit $f_p = f_p$.

Hérédité. Soit k tel que $0 \leq k \leq p-2$, et supposons la formule vraie au rang k . Posons $m = p-k$; l'inégalité $k \leq p-2$ donne $m \geq 2$, donc le point 1 du lemme s'applique à f_m : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'_m = mf_{m-1}$. En dérivant l'égalité du rang k :

$$f_p^{(k+1)} = \frac{p!}{(p-k)!} \times (p-k) f_{p-k-1} = \frac{p!}{(p-k-1)!} f_{p-(k+1)},$$

ce qui est la formule au rang $k+1$.

Conclusion de la récurrence. Pour tout k avec $0 \leq k \leq p-1$,

$$f_p^{(k)}(x) = \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k} \text{ si } x \geq 0, \quad f_p^{(k)}(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

En particulier toutes ces dérivées s'annulent en 0.

f_p est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$. La récurrence montre que f_p est $p-1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$f_p^{(p-1)} = \frac{p!}{1!} f_1 = p! f_1.$$

Or f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ d'après le lemme : la dérivée d'ordre $p-1$ de f_p est donc continue, et f_p est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$.

f_p n'est pas de classe $\mathcal{C}^p$. Le point 2 du lemme dit que f_1 n'est pas dérivable en 0 ; comme $p! \neq 0$, la fonction $p! f_1$ ne l'est pas davantage. Donc $f_p^{(p-1)}$ n'est pas dérivable en 0 : la fonction f_p n'est pas p fois dérivable en 0, et a fortiori pas de classe $\mathcal{C}^p$. $\square$

L'examen du raccord, en une phrase. Tout se lit sur la dérivée d'ordre $p-1$, qui vaut $p!x$ à droite de 0 et 0 à gauche : ses dérivées latérales en 0 sont $p!$ et 0. **Le défaut de régularité est donc un saut de la dérivée d'ordre p , d'amplitude exactement $p!$** , et il ne disparaît jamais, aussi grand que soit p . Augmenter p ne fait que le repousser plus loin dans les ordres.

3. Aucun recollement polynomial n'est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit P un polynôme non nul, écrit sous la forme

$$P(x) = \sum_{j=q}^d a_j x^j \quad \text{avec } a_q \neq 0,$$

où q est la **valuation** de P , c'est-à-dire le plus petit exposant dont le coefficient est non nul, et d son degré. Soit g définie par $g(x) = P(x)$ pour $x \geq 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$.

Premier cas : $q = 0$. Alors $g(0) = P(0) = a_0 \neq 0$, tandis que $g(x) = 0$ pour tout $x < 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 \neq g(0)$. La fonction g n'est même pas continue en 0.

Second cas : $q \geq 1$. Alors, pour $x \geq 0$ comme pour $x < 0$, on vérifie directement que

$$g = \sum_{j=q}^d a_j f_j,$$

puisque chaque f_j vaut x^j à droite et 0 à gauche. C'est une somme **finie**, donc elle est au moins aussi régulière que le moins régulier de ses termes. Que ce soit **exactement** sa régularité ne va pas de soi — une somme peut être plus régulière que ses termes, comme le montre $f_1 + (-f_1)$, qui est nulle donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ — et c'est l'argument ci-dessous, qui isole le terme fautif, qui l'établit.

Chaque f_j intervenant vérifie $j \geq q \geq 1$, donc est de classe $\mathcal{C}^{j-1}$, donc au moins de classe $\mathcal{C}^{q-1}$. Par conséquent g est de classe $\mathcal{C}^{q-1}$ sur $\mathbb{R}$, et la question 2 permet d'écrire

$$g^{(q-1)} = \sum_{j=q}^d a_j \frac{j!}{(j-q+1)!} f_{j-q+1}.$$

Séparons le premier terme des autres. Pour $j = q$, l'indice $j - q + 1$ vaut 1 et le terme est $a_q q! f_1$. Pour $j > q$, l'indice $j - q + 1$ est supérieur ou égal à 2, et le point 1 du lemme dit que ces f_{j-q+1} sont dérivables en 0. Donc

$$g^{(q-1)} = a_q q! f_1 + \varphi, \quad \text{où } \varphi \text{ est dérivable en 0.}$$

Si $g^{(q-1)}$ était dérivable en 0, la différence $g^{(q-1)} - \varphi = a_q q! f_1$ le serait aussi, donc f_1 le serait, puisque $a_q q! \neq 0$. C'est faux. Donc $g^{(q-1)}$ n'est pas dérivable en 0 et **la classe exacte de g est $\mathcal{C}^{q-1}$** . $\square$

La conclusion demandée. Dans les deux cas, la régularité de g est finie : si $q = 0$ la fonction n'est même pas continue, et si $q \geq 1$ elle est exactement de classe $\mathcal{C}^{q-1}$. Elle n'est donc jamais $\mathcal{C}^\infty$. Pour l'être, il faudrait une valuation infinie, c'est-à-dire $P = 0$: **le seul recollement polynomial de classe $\mathcal{C}^\infty$ est la fonction nulle**. Et comme un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines, une telle fonction g est non nulle sur un voisinage à droite de 0, ce qui interdit d'obtenir par ce procédé une fonction lisse, nulle à gauche et non nulle à droite.

4. La variante exponentielle

Les conditions nécessaires. Supposons h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée et polynôme, et

$$h'(x) = ae^{ax}, \quad h''(x) = a^2 e^{ax} \quad \text{pour } x < 0, \quad h'(x) = c + 2x, \quad h''(x) = 2 \quad \text{pour } x > 0.$$

— **La continuité en 0** donne $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{ax} = 1$ et $h(0) = b$, donc

$$b = 1.$$

- **La continuité de h' en 0** donne $\lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = c$, ces deux nombres devant être égaux à $h'(0)$, donc

$$c = a.$$

- **La continuité de h'' en 0** donne $\lim_{x \rightarrow 0^-} h''(x) = a^2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} h''(x) = 2$, donc

$$a^2 = 2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad a = -\sqrt{2}.$$

Les conditions sont suffisantes. Réciproquement, supposons $b = 1$, $c = a$ et $a^2 = 2$. On applique alors trois fois le théorème de la limite de la dérivée, démontré à l'exercice 17.

D'abord h est continue en 0, puisque les deux limites latérales valent $1 = h(0)$, et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Ensuite $h'(x) \rightarrow a$ quand $x \rightarrow 0^-$ et $h'(x) \rightarrow c = a$ quand $x \rightarrow 0^+$: la limite de h' en 0 existe et vaut a . Le théorème donne donc h dérivable en 0 avec $h'(0) = a$, et h' continue en 0 : la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Enfin $h''(x) \rightarrow a^2 = 2$ quand $x \rightarrow 0^-$ et $h''(x) \rightarrow 2$ quand $x \rightarrow 0^+$: la limite de h'' en 0 existe et vaut 2. Le théorème, appliqué cette fois à h' , donne h' dérivable en 0 avec $h''(0) = 2$, et h'' continue en 0 : la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si

$$(a, b, c) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}) \quad \text{ou} \quad (a, b, c) = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}).$$

Il y a donc exactement deux solutions. $\square$

Peut-elle être de classe $\mathcal{C}^3$? **Non, jamais.** Supposons-le, alors les conditions ci-dessus sont vérifiées, et de plus h''' doit être continue en 0. Or, pour $x < 0$, $h'''(x) = a^3 e^{ax}$, de limite a^3 en 0^- ; et pour $x > 0$, la dérivée troisième d'un polynôme de degré 2 est nulle, donc $h'''(x) = 0$, de limite 0. Il faudrait donc $a^3 = 0$, soit $a = 0$, ce qui contredit $a^2 = 2$. Comme

$$a^3 = a \times a^2 = 2a = \pm 2\sqrt{2} \neq 0,$$

la fonction h'' admet en 0 deux dérivées latérales distinctes, $\pm 2\sqrt{2}$ et 0 : elle n'est pas dérivable en 0, et h n'est pas trois fois dérivable en 0. $\square$

Remarque

Un comptage qui explique le résultat. Exiger la classe $\mathcal{C}^k$ impose $k+1$ égalités entre les deux branches, une par ordre de 0 à k . On dispose ici de trois paramètres, a , b et c , et la classe $\mathcal{C}^2$ en consomme exactement trois : $b = 1$, puis $c = a$, puis $a^2 = 2$. La classe $\mathcal{C}^3$ demanderait une quatrième égalité sans paramètre libre pour la satisfaire, et il n'est pas surprenant qu'elle échoue.

Ce comptage n'est pourtant pas une démonstration : rien n'interdit *a priori* qu'une équation supplémentaire soit automatiquement vérifiée. Ici elle ne l'est pas, et c'est le calcul de a^3 qui le prouve. La leçon de rédaction est qu'on ne conclut jamais un problème de recollement par un comptage de paramètres : on écrit les équations.

Remarque

Ce que cet exercice ne dit pas. Il existe bel et bien des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulles sur toute une demi-droite et non nulles ailleurs. La question 3 affirme seulement qu'aucune ne s'obtient en recollant un **polynôme** à la fonction nulle : il faut une fonction qui s'aplatit plus vite que n'importe quelle puissance, ce que fait une exponentielle inversée. Ce type de construction est traité ailleurs sur le site, et on ne le reprend pas ici.

Commentaire. L'intérêt de cet exercice n'est pas le calcul, qui est court, mais le passage du cas particulier au cas général.

Traiter $p = 1, 2, 3$ séparément fournit trois réponses, et surtout **une structure** : $f'_p = pf_{p-1}$. Une fois cette relation isolée en lemme, la démonstration générale n'est plus qu'une récurrence de trois lignes, et le résultat devient lisible : le seul obstacle est f_1 , la dérivation le fait remonter d'un ordre à chaque fois, et il apparaît fatalement au rang p . Sans le lemme, la même démonstration menée en explicitant les x^{p-k} serait deux fois plus longue et bien moins claire.

La question 3 montre ce que ce genre de résultat général permet de faire : elle ne redémontre rien, elle décompose un recollement quelconque en somme finie de f_j et laisse le résultat travailler. Le nombre qui gouverne tout, la valuation du polynôme, n'apparaît nulle part dans l'énoncé initial ; c'est l'analyse qui le désigne.

Enfin la question 4 change d'outil sans changer de problème. Aucune formule générale n'y est disponible, mais le théorème de la limite de la dérivée transforme la détermination d'une classe en un simple calcul de limites latérales, ordre par ordre, ce qui est mécanique. La seule vraie difficulté de rédaction y est la double implication : les égalités entre limites sont nécessaires par continuité, et suffisantes par le théorème, et une copie qui n'écrit qu'un sens n'a démontré que la moitié.

Exercice 21 ★★ Ce que Taylor-Young garantit, et à quelle distance

Notions : Formule de Taylor-Young, Développement limité : définition, unicité, troncature, parité, Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange

1. Écrire la formule de Taylor-Young appliquée à la fonction $\exp$ en 0 à l'ordre 3, après avoir vérifié ses hypothèses. On note P_3 la partie régulière obtenue, et l'on rappellera ce que signifie exactement le symbole $o(x^3)$.
2. Calculer l'écart $e^x - P_3(x)$ pour $x = 1$, puis $x = 0,5$, puis $x = 0,1$, puis $x = 0,01$, et présenter les résultats dans un tableau de valeurs. Les valeurs de e^x sont prises à la calculatrice.
3. Observer : quand x est divisé par 10, par combien l'écart est-il divisé ? Relier cette observation au symbole $o(x^3)$.
4. La formule de Taylor-Young permet-elle de **majorer** l'écart pour $x = 1$? Répondre en revenant à la définition du symbole o , et dire précisément ce qui manque.
5. La question 4 affirme qu'aucune majoration ne se tire du symbole o . Voici de quoi le prouver, plutôt que de le croire. Construire explicitement deux fonctions g et h , définies sur $\mathbb{R}$, qui admettent en 0 le **même développement limité d'ordre 3** que $\exp$, et qui vérifient

$$g(1) - P_3(1) = 1 \quad \text{et} \quad h(1) - P_3(1) = -100.$$

Que confirme cette construction ? Aurait-on pu imposer n'importe quelles deux valeurs ?

6. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admet en 0 le développement limité

$$f(x) = 3 - 2x + 5x^2 + o(x^2).$$

Peut-on en déduire que $f''(0) = 10$? Justifier, puis exhiber une fonction qui admet un développement limité d'ordre 2 en 0 **sans** être deux fois dérivable en 0. Quelle hypothèse rendrait la lecture légitime ?

La lecture des deux premiers coefficients, elle, fait l'objet de l'exercice 25 : on ne la refait pas ici.

Corrigé

1. *La formule.* La formule de Taylor-Young s'énonce ainsi : si f est n fois dérivable en a , alors, au voisinage de a ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Les hypothèses, ici. La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier trois fois dérivable en 0 : la formule s'applique avec $a = 0$ et $n = 3$. Toutes ses dérivées valent $\exp$, donc $\exp^{(k)}(0) = 1$ pour tout k , et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \text{avec} \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Ce que signifie le $o(x^3)$. Rien de plus, et rien de moins, que ceci : il existe une fonction ε , définie au voisinage de 0 et de limite nulle en 0, telle que

$$e^x - P_3(x) = x^3 \varepsilon(x).$$

De façon équivalente, le quotient $\frac{e^x - P_3(x)}{x^3}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. C'est cette formulation en quotient qu'il faut garder en tête pour les questions 3 et 4.

2. Les valeurs du polynôme. Elles se calculent à la main :

$$\begin{aligned}P_3(1) &= 1 + 1 + 0,5 + \frac{1}{6} = 2,666667, \\P_3(0,5) &= 1 + 0,5 + 0,125 + 0,020833 = 1,645833, \\P_3(0,1) &= 1 + 0,1 + 0,005 + 0,000167 = 1,105167, \\P_3(0,01) &= 1 + 0,01 + 0,00005 + 0,000000167 = 1,010050167.\end{aligned}$$

Le tableau.

x	e^x	$P_3(x)$	écart $e^x - P_3(x)$	écart divisé par x^3
1	2,718282	2,666667	$5,16 \times 10^{-2}$	$5,16 \times 10^{-2}$
0,5	1,648721	1,645833	$2,888 \times 10^{-3}$	$2,31 \times 10^{-2}$
0,1	1,105171	1,105167	$4,251 \times 10^{-6}$	$4,25 \times 10^{-3}$
0,01	1,0100502	1,0100502	$4,17 \times 10^{-10}$	$4,18 \times 10^{-4}$

Une remarque sur la dernière ligne. À 10^{-6} près, les valeurs de $e^{0,01}$ et de $P_3(0,01)$ sont **identiques** : pour voir l'écart, il faut descendre jusqu'à la dixième décimale, avec

$$e^{0,01} \approx 1,0100501670842 \quad \text{et} \quad P_3(0,01) \approx 1,0100501666667.$$

C'est déjà un renseignement en soi : en $x = 0,01$, un polynôme de degré 3 donne neuf décimales exactes de e^x .

3. L'observation. Comparons les deux dernières lignes du tableau, celles où x passe de 0,1 à 0,01, donc est divisé par 10. L'écart passe de $4,251 \times 10^{-6}$ à $4,17 \times 10^{-10}$: le quotient de ces deux nombres vaut environ 10 200. **L'écart a été divisé par environ 10^4 , soit dix mille.**

Ce que cela signifie. Un écart qui se divise par 10^4 quand x se divise par 10 se comporte comme x^4 . Vérifions-le en divisant l'écart par x^4 au lieu de x^3 : on obtient $4,25 \times 10^{-2}$ pour $x = 0,1$ et $4,18 \times 10^{-2}$ pour $x = 0,01$, deux nombres presque égaux, tous deux proches de $\frac{1}{24} \approx 0,0417$.

L'écart vaut donc approximativement $\frac{x^4}{24}$.

Le lien avec le $o(x^3)$. La dernière colonne du tableau est exactement la fonction ε de la question 1, puisque $\varepsilon(x) = \frac{e^x - P_3(x)}{x^3}$. Ses valeurs successives sont

$$5,16 \times 10^{-2}, \quad 2,31 \times 10^{-2}, \quad 4,25 \times 10^{-3}, \quad 4,18 \times 10^{-4},$$

et l'on voit numériquement ce que le symbole affirme : **ce quotient tend vers 0**. C'est tout ce que le $o(x^3)$ affirme.

En particulier il n'affirme **pas** que $\varepsilon(x)$ se comporte comme $\frac{x}{24}$, ce que le tableau suggère pourtant. Cette information supplémentaire est vraie, mais elle vient d'ailleurs : c'est la formule de Taylor-Young à l'ordre 4, dont le coefficient de x^4 vaut $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$. Un développement à l'ordre 3 ignore le contenu de son propre reste, et c'est normal : il l'a rangé dans un o .

4. La réponse est non. Écrivons proprement, avec ses quantificateurs, ce que dit le $o(x^3)$:

$$\forall \eta > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \quad |x| \leq \delta \implies |e^x - P_3(x)| \leq \eta |x|^3.$$

Deux choses interdisent d'en tirer quoi que ce soit en $x = 1$.

Premièrement, la majoration n'est promise que sur $[-\delta, \delta]$, et le **théorème ne fournit aucune valeur de δ** . Rien ne garantit que $1 \leq \delta$, et de fait, dans l'énoncé général de Taylor-Young, le δ dépend de η et peut être aussi petit qu'on veut.

Deuxièmement, l'ordre des quantificateurs est décisif. La tolérance η est choisie **avant** le voisinage δ . L'énoncé décrit donc un comportement à la limite, quand x tend vers 0, et non une inégalité en un point donné. Il n'y a pas, dans Taylor-Young, de constante universelle qui majorerait le reste.

En un mot. Le symbole o porte une information locale, c'est-à-dire une information sur un passage à la limite. Pour un x fixé, aussi petit soit-il, il ne dit rien. On peut donc parfaitement calculer $P_3(1) = 2,666667$ et proposer ce nombre comme approximation de e ; ce qu'on ne peut pas faire, avec Taylor-Young seul, c'est affirmer que l'erreur est inférieure à 10^{-1} , ni à quoi que ce soit d'autre.

Ce qui le fera. La formule de Taylor-Lagrange, qui remplace le $o(x^3)$ par un terme **explicite** de la forme $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$, où c est un réel inconnu mais **situé entre 0 et x** , donc majorable.

Appliquée ici, elle donnerait $|e - P_3(1)| \leq \frac{e}{24} \approx 0,113$, majoration parfaitement compatible avec l'écart mesuré 0,0516. Les exercices 22 et 23 exploitent cet outil ; on n'en dit pas plus ici.

Remarque

Deux formules, deux métiers. Taylor-Young sert à **calculer** : des limites, des équivalents, des positions de courbes, tout ce qui est une question au voisinage d'un point. Taylor-Lagrange sert à **garantir** : un encadrement numérique, une majoration d'erreur, un nombre de décimales. Les confondre conduit à l'erreur la plus répandue du chapitre, qui consiste à conclure d'un o à une majoration.

5. Deux fonctions, un seul développement limité.

Posons, pour tout réel x ,

$$g(x) = P_3(x) + x^4 \quad \text{et} \quad h(x) = P_3(x) - 100x^4.$$

Les deux ont le développement limité d'ordre 3 de $\exp$ en 0. En effet $g(x) - P_3(x) = x^4$, et

$$\frac{x^4}{x^3} = x \longrightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0),$$

donc $x^4 = o(x^3)$. Ainsi $g(x) = P_3(x) + o(x^3)$, qui est exactement le développement limité d'ordre 3 de $\exp$ en 0 obtenu à la question 1. Le même calcul vaut pour h , avec $-100x^4 = o(x^3)$ puisque multiplier un o par une constante ne change rien.

Les écarts en 1 sont ceux qu'on a demandés. Il suffit d'évaluer :

$$g(1) - P_3(1) = 1^4 = 1 \quad \text{et} \quad h(1) - P_3(1) = -100 \times 1^4 = -100. \quad \square$$

Ce que cette construction confirme. Les deux fonctions sont **indiscernables** du point de vue du développement limité d'ordre 3 en 0 : elles ont la même partie régulière, et leurs restes sont tous deux des $o(x^3)$. Pourtant leurs écarts à P_3 au point 1 diffèrent d'un facteur 100, et de signe. Aucune information tirée du seul développement limité ne peut donc majorer l'écart en 1 : c'était la réponse de la question 4, elle est maintenant démontrée et non plus seulement plausible.

Et oui, n'importe quelles deux valeurs. Pour deux réels A et B quelconques, les fonctions $P_3 + Ax^4$ et $P_3 + Bx^4$ conviennent, puisque Ax^4 et Bx^4 sont des $o(x^3)$. L'écart en un point fixé n'est soumis à **aucune** contrainte, aussi grand soit-il.

Remarque

Rien n'oblige d'ailleurs à s'arrêter à x^4 : $P_3(x) + Ax^4 \sin(1/x)$ prolongée en 0 ferait aussi l'affaire, avec un écart qui oscille. On notera au passage qu'il faut bien la puissance 4 : le quotient de $x^3 \sin(1/x)$ par x^3 vaut $\sin(1/x)$, qui oscille sans limite, donc $x^3 \sin(1/x)$ n'est **pas** un $o(x^3)$. Ce qui compte n'est pas la forme du reste, c'est qu'il soit négligeable devant x^3 **quand x tend vers 0**, et cette condition ne dit rien de sa taille ailleurs.

6. Ce que l'on ne peut pas déduire. On ne peut pas conclure $f''(0) = 10$. Le raisonnement tentant consiste à identifier 5 au coefficient $\frac{f''(0)}{2!}$ de Taylor-Young. Mais Taylor-Young est une implication qui va dans l'autre sens : elle dit que si f est deux fois dérivable en 0, alors elle admet un développement d'ordre 2 dont le coefficient de x^2 vaut $\frac{f''(0)}{2}$. Posséder un développement limité d'ordre 2 n'entraîne pas la dérivabilité seconde, et l'équivalence qui vaut à l'ordre 1 tombe dès l'ordre 2.

Le contre-exemple. Il montre que la situation est même bien pire qu'un simple défaut d'équivalence. Définissons θ sur $\mathbb{R}$ par

$$\theta(x) = x^3 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \quad \theta(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}.$$

θ admet un développement limité d'ordre 2 en 0. Dans les deux cas, $|\theta(x)| \leq |x|^3$. Donc, pour $x \neq 0$,

$$\left| \frac{\theta(x)}{x^2} \right| \leq |x| \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire $\theta(x) = o(x^2)$. La fonction θ admet donc en 0 le développement limité d'ordre 2

$$\theta(x) = 0 + 0 \times x + 0 \times x^2 + o(x^2).$$

θ est dérivable en 0. On a $\theta(0) = 0$, et pour tout $x \neq 0$

$$\left| \frac{\theta(x) - \theta(0)}{x - 0} \right| \leq \frac{|x|^3}{|x|} = x^2 \rightarrow 0,$$

donc le taux d'accroissement tend vers 0 et $\theta'(0) = 0$.

Mais $\theta''(0)$ n'a aucun sens. Soit $x_0 \neq 0$. Tout intervalle ouvert centré en x_0 contient des rationnels et des irrationnels, donc θ y prend des valeurs proches de $x_0^3 \neq 0$ et la valeur 0 : la fonction θ n'est pas continue en x_0 , donc pas dérivable en x_0 . Ainsi θ' n'est définie qu'au seul point 0, et l'expression « $\theta''(0)$ », qui demanderait de dériver θ' en 0, ne désigne rien. $\square$

L'hypothèse qui rend la lecture légitime. Il suffit de savoir que f est deux fois dérivable en 0, par exemple de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. Taylor-Young donne alors un développement limité d'ordre 2 de partie régulière

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2,$$

et le **théorème d'unicité du développement limité** force l'identification des coefficients : $\frac{f''(0)}{2} = 5$, donc $f''(0) = 10$. C'est l'unicité qui fait le travail, et elle n'a rien à voir avec l'existence.

La formule à retenir. **L'ordre 1 est le dernier étage auquel un développement limité renseigne sur les dérivées.** L'ordre 0 donne la valeur et la continuité, l'ordre 1 donne la dérivabilité et le nombre $f'(0)$, et à partir de l'ordre 2 le développement ne renseigne plus que sur le comportement local de f , jamais sur l'existence de ses dérivées.

Commentaire. Cet exercice ne calcule presque rien, et c'est voulu : il mesure.

Les questions 2 et 3 mettent des nombres sous un symbole. Le $o(x^3)$ n'est pas une abréviation commode, c'est l'affirmation que le quotient de la dernière colonne tend vers 0, et le tableau montre ce quotient descendre de 5×10^{-2} à 4×10^{-4} . Voir ce quotient bouger, c'est comprendre le symbole.

La question 4 en tire la conséquence qui compte en pratique. Un développement limité produit un **nombre approché** sans jamais produire de **majoration d'erreur** : les deux choses sont de nature différente, et il faut un second théorème pour la seconde. C'est exactement la frontière entre Taylor-Young et Taylor-Lagrange, et la connaître évite d'écrire des phrases comme «

d'après le développement limité, l'erreur est de l'ordre de x^4 », qui n'est pas démontrée par ce qui précède.

La question 5 démontre la question 4 au lieu de l'asséner : deux fonctions au même développement limité, des écarts en 1 qui diffèrent d'un facteur cent. Un lecteur qui a construit ces deux fonctions n'écrira plus « d'après le développement limité, l'erreur est de l'ordre de x^4 ».

La question 6 est l'autre face du même malentendu. Un développement limité est une information **sur la fonction**, pas sur ses dérivées : seuls les deux premiers coefficients se lisent comme des valeurs de dérivées, et cela parce que les deux premiers ordres sont, eux, des équivalences. Au-delà, lire $f''(0) = 2a_2$ demande une hypothèse qu'il faut avoir, ou obtenir, mais jamais supposer en silence.

Exercice 22 ★★ Encadrer une valeur numérique par Taylor-Lagrange

Notions : Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange

Pour chacune des quatre valeurs numériques ci-dessous, le travail demandé est le même, et il comporte quatre étapes qu'il faut toutes rédiger :

- choisir une fonction, un point de départ et un ordre, puis écrire la formule de Taylor-Lagrange en vérifiant ses hypothèses ;
- **majorer honnêtement le reste**, en majorant $|f^{(n+1)}|$ sur le bon intervalle, et **en disant sur lequel** ;
- en déduire un encadrement de la valeur cherchée, et dire combien de décimales il garantit ;
- comparer à la valeur donnée par la calculatrice.

1. $e^{0,1}$, à l'ordre 3 en partant de 0.
2. $\sin(0,5)$, à l'ordre 4 en partant de 0.
3. $\sqrt[3]{28}$, à l'ordre 2 en partant de 27.
4. $\text{Arctan}(0,3)$, à l'ordre 3 en partant de 0.
5. Reprendre **le même nombre** qu'à la question 4 en utilisant cette fois le seul développement limité usuel de Arctan en 0. Que constate-t-on sur la valeur approchée obtenue, et sur l'erreur ? Énoncer en une phrase la différence de nature entre les deux formules de Taylor.

Corrigé

La formule et l'inégalité

Rappelons l'énoncé sous la forme où on l'emploie. Soient $a < b$ deux réels, $n \in \mathbb{N}$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

On note P_n la somme et R le dernier terme, appelé **reste de Lagrange**. Toute la valeur de la formule est là : le reste est **explicite**, à un point inconnu près, et ce point est enfermé dans $]a, b[$. C'est donc exactement la situation de l'exercice 12, question 4 : on ne calcule pas c , on majore $f^{(n+1)}(c)$.

Méthode

Le protocole, en quatre lignes.

1. Choisir f , a , b et n . Le point a est celui où les dérivées se calculent exactement ; b est la valeur cherchée ; n se choisit pour que la précision suffise.
2. Calculer $f^{(k)}(a)$ pour $k \leq n$, puis $P_n(b)$ **en fractions ou en décimaux exacts**, sans arrondir avant la fin.
3. Calculer $f^{(n+1)}$ et le majorer **sur** $]a, b[$. C'est la seule étape qui demande de réfléchir, et la seule où l'on peut se tromper de façon indétectable.
4. Écrire l'encadrement. Si le signe de $f^{(n+1)}$ est constant sur $]a, b[$, on gagne un côté gratuitement.

1. Le nombre $e^{0,1}$

La mise en place. Prenons $f = \exp$, $a = 0$, $b = 0,1$, $n = 3$. La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc les hypothèses sont vérifiées sans réserve. Toutes ses dérivées valent $\exp$, donc $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout k .

La partie polynomiale.

$$P_3(0,1) = 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6} = 1 + 0,1 + 0,005 + 0,000166667 = 1,105166667.$$

Le reste. Il existe $c \in]0; 0,1[$ tel que

$$R = \frac{e^c}{4!} (0,1)^4 = \frac{e^c}{24} \times 10^{-4}.$$

La majoration, sur $]0; 0,1[$. La fonction $\exp$ est croissante, donc sur cet intervalle

$$1 = e^0 < e^c < e^{0,1}.$$

Le majorant $e^{0,1}$ est précisément le nombre cherché : on ne peut pas s'en servir. On le remplace par une borne sûre et grossière : comme $0,1 < 1$, on a $e^c < e < 3$. D'où

$$\frac{10^{-4}}{24} < R < \frac{3 \times 10^{-4}}{24}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 4,17 \times 10^{-6} < R < 1,25 \times 10^{-5}.$$

L'encadrement. En ajoutant ces bornes à $P_3(0,1)$:

$$1,1051708 < e^{0,1} < 1,1051792.$$

La largeur est $8,3 \times 10^{-6}$, et l'encadrement garantit les cinq premières décimales : $e^{0,1} = 1,10517$ à 10^{-5} près.

La comparaison. La calculatrice donne $e^{0,1} \approx 1,1051709$, valeur bien située dans l'encadrement, et très proche de la borne inférieure. C'est logique : le reste réel correspond à un c voisin de 0, donc à e^c voisin de 1, alors que nous avons majoré e^c par 3.

Remarque

Affiner la borne supérieure sans calculatrice. On peut majorer $e^{0,1}$ par 1,2, et donc e^c aussi. En effet $1,2^{10} = 6,19 > 3 > e$, comme le montre le calcul $1,2^2 = 1,44$, $1,2^4 = 2,0736$, $1,2^5 = 2,48832$, puis $1,2^{10} = 2,48832^2 \approx 6,1917$. Donc $1,2 > e^{1/10}$. Le reste vérifie alors $R < \frac{1,2}{24} \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-6}$, et l'encadrement devient

$$1,1051708 < e^{0,1} < 1,1051717,$$

de largeur 9×10^{-7} . Attention à la lecture : une largeur inférieure à 10^{-6} ne garantit pas six décimales. Ici la sixième décimale vaut 0 à la borne inférieure et 1 à la borne supérieure, donc elle n'est **pas** tranchée : on gagne en précision sur l'erreur, pas une décimale de plus. Il reste **cinq** décimales garanties, avec une erreur maintenant connue à 10^{-6} près au lieu de 10^{-5} . Améliorer la majoration de $|f^{(n+1)}|$ améliore directement le résultat : c'est là que se trouve toute la marge de manœuvre.

2. Le nombre $\sin(0,5)$

La mise en place. Prenons $f = \sin$, $a = 0$, $b = 0,5$, $n = 4$. La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: hypothèses vérifiées.

Les dérivées en 0. Elles se lisent sur le cycle des dérivées du sinus :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

La partie polynomiale d'ordre 4 est donc $P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$, et

$$P_4(0,5) = 0,5 - \frac{0,125}{6} = 0,5 - 0,0208333 = 0,4791667.$$

Le reste. On a $f^{(5)} = \cos$, donc il existe $c \in]0; 0,5[$ tel que

$$R = \frac{\cos c}{5!} (0,5)^5 = \frac{\cos c}{120} \times 0,03125 = \cos c \times 2,604 \times 10^{-4}.$$

La majoration, sur $]0; 0,5[$. On a $0,5 < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos c > 0$ sur cet intervalle ; et $\cos c \leq 1$. D'où

$$0 < R < 2,604 \times 10^{-4}.$$

Il faut noter ici que la majoration $|\cos| \leq 1$ est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier : le choix de l'intervalle n'a servi qu'à obtenir la **positivité** du reste, laquelle divise par deux la largeur de l'encadrement. *L'encadrement.*

$$0,4791667 < \sin(0,5) < 0,4794271.$$

La largeur est $2,6 \times 10^{-4}$, et l'encadrement garantit trois décimales : $\sin(0,5) = 0,479$ à 10^{-3} près.

La comparaison. La calculatrice donne $\sin(0,5) \approx 0,4794255$. La valeur est dans l'encadrement, et proche cette fois de la borne **supérieure** : le cosinus reste voisin de 1 sur un intervalle aussi court, donc la majoration $\cos c \leq 1$ est presque exacte, tandis que la minoration $\cos c > 0$ est très grossière.

3. Le nombre $\sqrt[3]{28}$

La mise en place. C'est ici que le choix du point de départ compte. On prend $f(x) = x^{1/3}$, $a = 27$ et $b = 28$, parce que 27 est un cube parfait et que f et ses dérivées y prennent des valeurs rationnelles. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, qui contient $[27, 28]$. On prend $n = 2$.

Les dérivées en 27. On a $27^{1/3} = 3$, donc $27^{2/3} = 9$ et $27^{5/3} = 3^5 = 243$. Ainsi

$$f(27) = 3, \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \quad \text{donc} \quad f'(27) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} \quad \text{donc} \quad f''(27) = -\frac{2}{9} \times \frac{1}{243} = -\frac{2}{2187}.$$

La partie polynomiale. Avec $b - a = 1$,

$$P_2(28) = 3 + \frac{1}{27} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{2187}\right) = 3 + \frac{1}{27} - \frac{1}{2187}.$$

En décimaux, $\frac{1}{27} = 0,037037037$ et $\frac{1}{2187} = 0,000457247$, d'où

$$P_2(28) = 3,036579790.$$

Le reste. On a $f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$, donc il existe $c \in]27, 28[$ tel que

$$R = \frac{f'''(c)}{3!} \times 1^3 = \frac{1}{6} \times \frac{10}{27} c^{-8/3} = \frac{5}{81} c^{-8/3}.$$

La majoration, sur $]27, 28[$. **C'est ici que l'intervalle est décisif**, et il faut le souligner : la fonction $x \mapsto x^{-8/3}$ n'est pas bornée au voisinage de 0, donc une majoration valable « sur $]0, 28[$ » n'existerait pas. Sur $]27, 28[$, en revanche, $c > 27$ donne

$$c^{-8/3} < 27^{-8/3} = 3^{-8} = \frac{1}{6561},$$

et comme f''' est positive, il vient

$$0 < R < \frac{5}{81 \times 6561} = \frac{5}{531441} \approx 9,41 \times 10^{-6}.$$

L'encadrement.

$$3,0365798 < \sqrt[3]{28} < 3,0365892.$$

La largeur est inférieure à 10^{-5} . Les deux bornes s'arrondissent à 3,0366 : l'encadrement garantit quatre décimales.

La comparaison. La calculatrice donne $\sqrt[3]{28} \approx 3,0365889$, valeur située dans l'encadrement et très près de la borne supérieure. On peut d'ailleurs vérifier le résultat en sens inverse, ce qui ne coûte rien : $3,036589^3 \approx 28,000000$.

4. Le nombre $\text{Arctan}(0,3)$

La mise en place. Prenons $f = \text{Arctan}$, $a = 0$, $b = 0,3$, $n = 3$. La fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Les dérivées. On calcule successivement

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

la dernière s'obtenant en dérivant $-2x(1+x^2)^{-2}$ et en réduisant au même dénominateur. Donc

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -2,$$

et la partie polynomiale d'ordre 3 est

$$P_3(x) = x + 0 - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3}, \quad \text{donc} \quad P_3(0,3) = 0,3 - 0,009 = 0,291.$$

Le reste. En dérivant une fois de plus,

$$f^{(4)}(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4},$$

et il existe $c \in]0; 0,3[$ tel que

$$R = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (0,3)^4 = \frac{f^{(4)}(c)}{24} \times 0,0081.$$

La majoration, sur $]0; 0,3[$. Trois observations suffisent : $0 < 24c \leq 7,2$ puisque $c \leq 0,3$; $0 < 1 - c^2 \leq 1$; et $(1 + c^2)^4 \geq 1$. Donc

$$0 < f^{(4)}(c) \leq 7,2, \quad \text{d'où} \quad 0 < R \leq \frac{7,2}{24} \times 0,0081 = 0,00243.$$

L'intervalle compte encore : c'est la borne $c \leq 0,3$ qui fournit le facteur 7,2.

L'encadrement.

$$0,291 < \text{Arctan}(0,3) \leq 0,29343.$$

La largeur est $2,4 \times 10^{-3}$: l'encadrement ne garantit que deux décimales, 0,29.

La comparaison. La calculatrice donne $\text{Arctan}(0,3) \approx 0,2914568$, valeur conforme à l'encadrement mais nettement plus proche de la borne inférieure.

Pourquoi cet encadrement est le plus mauvais des quatre. La majoration de $|f^{(4)}|$ y est un peu grossière : on calcule $f^{(4)}(0,3) \approx 4,64$, alors que nous avons utilisé 7,2. Mais même en remplaçant 7,2 par 4,7, on n'obtiendrait que $R \leq 0,0016$, donc toujours deux décimales seulement : affiner la borne ne suffit pas.

Ce qui plafonne la précision ici, c'est le facteur $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, qui vaut $\frac{(0,3)^4}{24} \approx 3,4 \times 10^{-4}$,

alors qu'il vaut $\frac{(0,1)^4}{24} \approx 4,2 \times 10^{-6}$ pour $e^{0,1}$ au même ordre. **Le vrai remède est donc**

d'augmenter l'ordre, ce qui divise ce facteur par $\frac{n+2}{b-a}$ à chaque étage, soit ici par plus de 16 en passant à l'ordre 4. Le prix à payer est un nouveau calcul de dérivée et une nouvelle majoration.

Récapitulatif des quatre encadrements

valeur	ordre	largeur de l'encadrement	décimales garanties
$e^{0,1}$	3	$8,3 \times 10^{-6}$	5
$\sin(0,5)$	4	$2,6 \times 10^{-4}$	3
$\sqrt[3]{28}$	2	$9,4 \times 10^{-6}$	4
$\text{Arctan}(0,3)$	3	$2,4 \times 10^{-3}$	2

Ce qui gouverne la qualité n'est donc pas l'ordre, comme on le croit d'abord : c'est le produit du majorant de $|f^{(n+1)}|$ par $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. Le cas de $\sqrt[3]{28}$ est frappant : à l'ordre 2 seulement, il est presque aussi précis que celui de $e^{0,1}$ à l'ordre 3, parce que $c^{-8/3}$ est minuscule sur $]27, 28[$.

5. Le même nombre par le seul développement limité

Le développement limité usuel de Arctan en 0 à l'ordre 3 s'écrit

$$\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

En « remplaçant » x par 0,3 et en négligeant le reste, on obtient

$$\text{Arctan}(0,3) \approx 0,3 - 0,009 = 0,291.$$

Le constat. **C'est exactement la même valeur approchée** qu'à la question 4, ce qui n'est pas une surprise : la partie régulière du développement limité et la partie polynomiale de Taylor-Lagrange sont le même polynôme, à savoir $\sum_{k \leq n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Ce qui manque. Le symbole $o(x^3)$ ne donne **aucune majoration** de l'erreur en $x = 0,3$. C'est la question 4 de l'exercice 21, à laquelle on renvoie : le o affirme qu'un quotient tend vers 0, il ne fournit ni voisinage explicite, ni constante. Avec le seul développement limité, on obtient le nombre 0,291 et l'on est incapable de dire s'il est bon à 10^{-2} ou à 10^{-5} près.

La différence de nature, en une phrase. **La formule de Taylor-Young décrit un comportement quand x tend vers le point de développement, tandis que la formule de Taylor-Lagrange est une égalité en un point fixé, dont le reste est explicite et donc majorable.** Le prix de cette seconde formule est une hypothèse de dérivabilité à un ordre de plus, et le travail de majorer une dérivée sur un intervalle.

Commentaire. Quatre calculs identiques dans leur structure, et pourtant chacun apprend quelque chose de différent.

Le premier, $e^{0,1}$, met en scène le piège du majorant circulaire : la borne naturelle de e^c est $e^{0,1}$, c'est-à-dire le nombre qu'on cherche. Il faut alors accepter une borne plus grossière mais indépendante, ou en construire une à la main comme le fait la remarque. Un encadrement dont la borne dépend de l'inconnue n'est pas un encadrement.

Le deuxième, $\sin(0,5)$, est le cas où le majorant ne demande aucune réflexion, puisque $|\cos| \leq 1$ partout. Tout le gain vient alors du **signe** du reste, donc de la localisation de c , et non de sa taille.

Le troisième, $\sqrt[3]{28}$, est celui où l'intervalle décide de tout : la dérivée troisième explose près de 0 et est minuscule près de 27. Il illustre aussi le choix du point de départ, qui est la vraie décision de l'exercice : partir de 27 rend toutes les dérivées rationnelles et le reste négligeable, partir de 0 serait impossible.

Le quatrième, $\text{Arctan}(0,3)$, est le moins bon, et c'est pour cela qu'il figure ici. Une majoration honnête est parfois décevante, et il faut la donner telle quelle : deux décimales garanties valent infiniment mieux que sept décimales affichées sans garantie. C'est toute la différence que la question 5 met en mots.

Exercice 23 ★★★ Combien de termes pour cette précision ?

Notions : Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange

Les formules de Taylor servent d'ordinaire à écrire un développement. On les emploie ici dans l'autre sens : la précision est fixée à l'avance, et c'est le **nombre de termes** qui devient l'inconnue. C'est la question que se pose n'importe quel logiciel de calcul avant d'évaluer une fonction, et elle se traite entièrement avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrée à la section 19 du cours.

Propriété

Inégalité de Taylor-Lagrange. Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I , soit $a \in I$, et soit M_{n+1} un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I . Alors, pour tout $x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On notera P_n le polynôme de Taylor d'ordre n en $a = 0$, et l'on appellera **termes** ses monômes de coefficient non nul : ce sont eux qu'une machine additionne réellement.

Partie A. Calculer e à 10^{-6} près

On travaille avec $f = \exp$ sur $[0, 1]$, et l'on utilise le seul encadrement numérique acquis du cours sur l'exponentielle : $2 < e < 3$.

1. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour $f = \exp$, en $a = 0$, à l'ordre n , sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire une majoration de

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right|$$

qui ne dépende que de n . On dira pourquoi on ne prend pas $M_{n+1} = e$.

2. Résoudre l'inéquation obtenue pour une précision de 10^{-6} , et conclure : combien de termes faut-il additionner ?

3. *Vérification numérique.* On donne

$$\sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!} = 2,718281525 \dots \quad \text{et} \quad e = 2,718281828 \dots$$

Calculer l'écart réel et le comparer à la majoration. Le rang trouvé à la question 2 était-il le plus petit possible ?

Partie B. Le sinus, et le prix de la largeur de l'intervalle

4. Majorer $\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right|$ pour $x \in [-1, 1]$. On prendra soin de choisir l'ordre le plus avantageux : le

polynôme $x - \frac{x^3}{6}$ est le polynôme de Taylor du sinus à **deux** ordres différents, et les deux majorations qui en découlent ne se valent pas.

5. Reprendre la même majoration sur $[-\pi, \pi]$. Que vaut-elle ? Est-elle utilisable ?

6. Combien de termes du développement du sinus en 0 faut-il pour obtenir $\sin x$ à 10^{-6} près, uniformément sur $[-1, 1]$? Puis uniformément sur $[-\pi, \pi]$? On donne les valeurs suivantes, à lire dans la table.

m	$\frac{1}{m!}$	$\frac{\pi^m}{m!}$
9	$2,76 \times 10^{-6}$	$8,21 \times 10^{-2}$
10	$2,76 \times 10^{-7}$	$2,58 \times 10^{-2}$
11	$2,51 \times 10^{-8}$	$7,37 \times 10^{-3}$
16	$4,78 \times 10^{-14}$	$4,30 \times 10^{-6}$
17	$2,81 \times 10^{-15}$	$7,95 \times 10^{-7}$

Conclure en une phrase sur ce dont dépend le coût du calcul.

Partie C. La majoration est-elle optimale ?

7. On reprend la question 4 au point $x = 1$. L'écart réel vaut

$$\left| \sin 1 - 1 + \frac{1}{6} \right| = 0,008137651 \dots$$

Le comparer à la majoration. Celle-ci est-elle **atteinte** ? Expliquer précisément à quel endroit du raisonnement on a perdu quelque chose, en écrivant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 en $x = 1$ et en déterminant le point c qu'elle fournit.

8. Exhiber une fonction, un ordre et un point pour lesquels l'inégalité de Taylor-Lagrange est une **égalité**. Quelle condition générale faut-il pour cela ? Que garantit alors l'inégalité, et que ne garantit-elle pas ?

Corrigé

Partie A

1. *Les hypothèses.* La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, 1]$ pour tout entier n . Ses dérivées successives sont toutes égales à elle-même : $\exp^{(k)} = \exp$ pour tout k , et en particulier $\exp^{(k)}(0) = 1$.

Le majorant. Sur $[0, 1]$, la croissance de $\exp$ donne $\exp^{(n+1)}(t) = e^t \leq e^1 = e < 3$. On peut donc prendre

$$M_{n+1} = 3.$$

Pourquoi pas $M_{n+1} = e$. Le majorant sert à produire une valeur numérique de e ; l'écrire en fonction de e ne serait pas faux, mais ne donnerait aucun nombre exploitable tant qu'on ne dispose pas déjà d'une valeur de e . On remplace donc e par le majorant rationnel 3, le seul renseignement numérique dont on ait besoin. C'est une habitude à prendre : **une majoration utile est une majoration calculable**.

La conclusion. Le polynôme de Taylor d'ordre n en 0 vaut $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, et l'inégalité de Taylor-Lagrange en $x = 1$ s'écrit

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}. \quad \square$$

2. *L'inéquation.* Il suffit d'assurer $\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-6}$, c'est-à-dire

$$(n+1)! \geq 3 \times 10^6.$$

Sa résolution. La suite des factorielles est strictement croissante, il suffit donc de trouver le premier rang qui convient. On a

$$9! = 362\,880 < 3 \times 10^6 \quad \text{et} \quad 10! = 3\,628\,800 \geq 3 \times 10^6.$$

Le premier entier convenable est $n + 1 = 10$, soit $n = 9$.

La conclusion. La somme $\sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!}$ approche e à $\frac{3}{10!} = 8,27 \times 10^{-7} \leq 10^{-6}$ près. Elle comporte les monômes d'exposants $0, 1, \dots, 9$, tous de coefficient non nul : il faut donc 10 **termes**. $\square$

Attention au décalage d'un cran. L'ordre est $n = 9$, le nombre de termes est 10, et la factorielle qui apparaît dans la majoration est $10!$. Ces trois nombres ne sont pas le même, et une réponse qui ne dit pas laquelle des trois quantités elle donne est illisible.

3. L'écart réel. La soustraction donne

$$e - \sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!} = 2,718281828 \dots - 2,718281525 \dots = 3,03 \times 10^{-7}.$$

Cet écart est bien inférieur à 10^{-6} : la question **2** ne s'est pas trompée. Il est aussi environ 2,7 fois plus petit que la majoration $8,27 \times 10^{-7}$, ce qui est cohérent : on a remplacé e^c par 3. Le point c que fournit réellement la formule se calcule ici à rebours : de $e - S_9 = \frac{e^c}{10!}$ on tire $e^c = 10! \times 3,03 \times 10^{-7} \approx 1,10$, donc $c \approx 0,094$. Le facteur perdu vaut donc $\frac{3}{1,10} \approx 2,7$, ce qui explique exactement l'écart constaté.

Le rang était-il minimal ? Pour notre méthode, oui : au rang $n = 8$, la majoration vaut $\frac{3}{9!} = 8,27 \times 10^{-6}$, qui ne permet pas de conclure. Et ce n'est pas seulement la majoration qui échoue, c'est bien la somme : l'écart réel de $\sum_{k=0}^8 \frac{1}{k!}$ à e vaut $3,06 \times 10^{-6}$, supérieur à 10^{-6} . Neuf termes sont réellement insuffisants, dix suffisent réellement.

Remarque

Il faut distinguer deux questions que l'on confond souvent. « Quel rang ma majoration me permet-elle de garantir ? » a pour réponse $n = 9$. « Quel est le plus petit rang qui atteint réellement la précision ? » a ici la même réponse, mais c'est une coïncidence favorable : une majoration trop généreuse peut faire réclamer un terme de plus que nécessaire. Ce que l'on garantit, c'est toujours la première question.

Partie B

4. L'ordre le plus avantageux. Les dérivées du sinus en 0 valent $\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = \cos 0 = 1$, $\sin''(0) = -\sin 0 = 0$, $\sin'''(0) = -\cos 0 = -1$ et $\sin^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$. Le polynôme $x - \frac{x^3}{6}$ est donc à la fois P_3 et P_4 , le coefficient de x^4 étant nul. On dispose ainsi de deux majorations pour le même écart :

$$\begin{aligned} \text{à l'ordre 3 : } & \left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq M_4 \frac{|x|^4}{4!}, \\ \text{à l'ordre 4 : } & \left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq M_5 \frac{|x|^5}{5!}. \end{aligned}$$

Le majorant. Les dérivées successives du sinus sont $\pm \sin$ et $\pm \cos$, toutes majorées par 1 en valeur absolue sur $\mathbb{R}$. On peut donc prendre $M_4 = M_5 = 1$.

Le choix. Sur $[-1, 1]$ on a $|x| \leq 1$, donc $|x|^5 \leq |x|^4$, et de plus $5! > 4!$: la seconde majoration est meilleure des deux côtés. On retient

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^5}{120} \leq \frac{1}{120} = 8,33 \times 10^{-3}. \quad \square$$

Ce que l'ordre 3 aurait donné. La borne $\frac{1}{24} = 4,17 \times 10^{-2}$, cinq fois plus grande, pour exactement

le même polynôme. **Un coefficient nul dans un développement est un ordre gagné gratuitement**, et c'est le premier réflexe à avoir sur une fonction paire ou impaire.

5. La même majoration, sur un intervalle plus large. La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^5$ sur $[-\pi, \pi]$ et le majorant $M_5 = 1$ y reste valable, puisqu'il valait sur $\mathbb{R}$ tout entier. Seul le facteur $|x|^5$ change :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{\pi^5}{120} = 2,55. \quad \square$$

Elle est inutilisable. Une majoration de 2,55 pour un écart entre deux quantités dont l'une est bornée par 1 n'apprend rien : on savait déjà, sans aucun calcul, que $|\sin x| \leq 1$ et que $\left| x - \frac{x^3}{6} \right| \leq$

$\pi + \frac{\pi^3}{6} \approx 8,3$ sur cet intervalle. L'énoncé n'est pas faux, il est vide.

Le mécanisme. Le facteur $|x|^5$ est passé de 1 à $\pi^5 \approx 306$. Le rapport $\pi^5 \approx 306$ est exactement le prix payé pour un intervalle π fois plus large, et il croît comme la puissance $n+1$: plus l'ordre est élevé, plus la largeur de l'intervalle est punie sévèrement. C'est le point central de cet exercice.

6. Le cadre commun. Pour tout entier n et tout réel x , l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $M_{n+1} = 1$ donne

$$|\sin x - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Il s'agit donc de trouver le plus petit n tel que la borne obtenue en majorant $|x|$ par la demi-largeur de l'intervalle soit inférieure à 10^{-6} .

Sur $[-1, 1]$. La borne vaut $\frac{1}{(n+1)!}$. La table donne $\frac{1}{9!} = 2,76 \times 10^{-6} > 10^{-6}$ et $\frac{1}{10!} = 2,76 \times 10^{-7} \leq 10^{-6}$. Le premier rang convenable est donc $n+1 = 10$, soit $n = 9$, et

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880},$$

qui compte **5 termes**.

Le gain de parité, à ne pas oublier. Le sinus étant impair, tous ses coefficients d'exposant pair sont nuls, donc $P_{10} = P_9$. On a le droit d'appliquer l'inégalité à l'ordre 10 à ce même polynôme, ce qui améliore la borne à $\frac{1}{11!} = 2,51 \times 10^{-8}$. Cela ne fait pas gagner de terme ici, car le

polynôme précédent, $P_8 = P_7$ à 4 termes, ne dépasse pas la borne $\frac{1}{9!} = 2,76 \times 10^{-6}$, encore trop grande. **Quatre termes ne suffisent pas, cinq suffisent.**

Sur $[-\pi, \pi]$. La borne vaut $\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$. La table donne $\frac{\pi^{16}}{16!} = 4,30 \times 10^{-6} > 10^{-6}$ et $\frac{\pi^{17}}{17!} = 7,95 \times 10^{-7} \leq 10^{-6}$. Le premier rang convenable est $n+1 = 17$, soit $n = 16$. Par parité, $P_{16} = P_{15}$, et ce polynôme contient les monômes d'exposants

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,$$

soit **8 termes**. $\square$

La conclusion demandée. Pour la même fonction et la même précision, il faut 5 termes sur un intervalle de demi-largeur 1 et 8 termes sur un intervalle de demi-largeur π : **le coût d'un calcul par développement de Taylor ne dépend pas seulement de la précision voulue, il dépend de la largeur de l'intervalle sur lequel on veut cette précision.**

Remarque

C'est exactement ce que fait une bibliothèque de calcul numérique : elle ne développe jamais le sinus sur $[-\pi, \pi]$. Elle commence par ramener l'argument à un petit intervalle autour de 0 grâce à la périodicité et aux symétries, puis elle développe là où trois ou quatre termes suffisent. Le calcul ci-dessus donne la raison chiffrée de ce choix.

Partie C

7. La comparaison. La majoration de la question 4 donne, en $x = 1$, la borne $\frac{1}{120} = 0,008333 \dots$, tandis que l'écart réel vaut $0,008137 \dots$. Le rapport est

$$\frac{0,008137651 \dots}{1/120} = 0,9765 \dots$$

La majoration est donc vraie, elle n'est pas atteinte, et elle est très serrée : on perd un peu plus de 2 pour cent.

Où la perte s'est produite. La formule de Taylor-Lagrange, dans sa version **égalité** (section 19 du cours, et exercice 24), affirme l'existence d'un réel c strictement compris entre 0 et 1 tel que

$$\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{\sin^{(5)}(c)}{5!} \times 1^5 = \frac{\cos c}{120}.$$

La seule étape de la question 4 qui soit une inégalité et non une égalité est le remplacement de $\cos c$ par son majorant 1. Le point c se calcule donc :

$$\cos c = 120 \times 0,008137651 \dots = 0,976518 \dots, \quad \text{d'où} \quad c = 0,21713 \dots$$

et l'on constate que $\cos c = 0,9765 \neq 1$.

Pourquoi elle n'est pas atteinte. Le majorant $M_5 = 1$ est la valeur maximale de $|\cos|$, et cette valeur est bien atteinte, mais **en 0 seulement** (modulo π). Le facteur $|x|^5$ est lui aussi maximal, mais **en** $x = 1$. Pour que la majoration soit une égalité, il faudrait que les deux maximums soient atteints en même temps, c'est-à-dire que le point intermédiaire c associé à $x = 1$ soit précisément 0. Il vaut 0,217, donc ce n'est pas le cas.

Ce que la majoration est quand même. La meilleure possible **dans sa forme**. On ne peut pas remplacer $M_5 = 1$ par un nombre plus petit, puisque $|\sin^{(5)}| = |\cos|$ prend la valeur 1 sur $[-1, 1]$. Toute amélioration exigerait de renoncer à la forme « constante $\times$ puissance de x », donc de sortir de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

8. Un cas d'égalité. Prenons $f(x) = x^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, avec $a = 0$. Cette fonction est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, et

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n, \quad f^{(n+1)} \equiv (n+1)!$$

Le polynôme de Taylor d'ordre n est donc nul, le meilleur majorant est $M_{n+1} = (n+1)!$, et l'inégalité s'écrit

$$|x^{n+1} - 0| \leq (n+1)! \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = |x|^{n+1},$$

c'est-à-dire $|x|^{n+1} \leq |x|^{n+1}$: une **égalité**, pour tout réel x . $\square$

La condition générale. La démonstration de la question 7 en donne la lecture : l'unique inégalité du raisonnement est $|f^{(n+1)}(c)| \leq M_{n+1}$. Elle devient une égalité exactement quand $|f^{(n+1)}|$ atteint son majorant **au point intermédiaire** c . Le cas le plus simple où c'est automatique est celui d'une dérivée $(n+1)$ -ième **constante**, c'est-à-dire d'une fonction polynomiale de degré $n+1$: le majorant est alors atteint partout, donc en c aussi, quel que soit c .

Ce que l'inégalité garantit. Un **encadrement sûr** de l'erreur, valable pour tout x de l'intervalle à la fois, et calculable avant de faire le moindre calcul. C'est ce qui permet de dimensionner un calcul, comme aux questions **2** et **6**.

Ce qu'elle ne garantit pas. Ni la valeur exacte de l'erreur, ni le signe de celle-ci. Elle ne fournit qu'un majorant, et ce majorant peut être arbitrairement mauvais : la question **5** en donne l'exemple extrême. Une conclusion du type « l'erreur vaut $\frac{M_{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ » est donc fausse, et une conclusion du type « l'erreur est de l'ordre de » est une affirmation que l'inégalité ne permet pas.

Commentaire. Les trois parties répondent à trois questions distinctes qu'on a tendance à mélanger.

La partie **A** est la question du praticien : je veux tel nombre à telle précision, combien de termes je programme. Elle se traite mécaniquement, à condition de remplacer toute quantité inconnue par un majorant **calculable**, ce qui a coûté ici un facteur 2 sur la borne finale et n'a rien coûté sur le nombre de termes.

La partie **B** est la question que personne ne pose et qui décide de tout : le nombre de termes ne dépend pas de la précision seule. Passer de $[-1, 1]$ à $[-\pi, \pi]$, ce qui semble anodin, fait passer de 5 à 8 termes. Le facteur $|x|^{n+1}$ explique tout : sur un intervalle de demi-largeur $r > 1$, la borne est multipliée par r^{n+1} , et la factorielle doit rattraper cette puissance avant que la précision ne soit atteinte.

La partie **C** est la question du théoricien, et elle protège d'une faute de rédaction fréquente. L'inégalité de Taylor-Lagrange majore, elle ne mesure pas. Le seul moment du raisonnement où l'information se perd est le passage de $f^{(n+1)}(c)$, dont on ignore tout sauf qu'il existe, à son majorant M_{n+1} : c'est là, et nulle part ailleurs, qu'il faut aller chercher la marge quand la borne obtenue déçoit.

Exercice 24 ★★★★★ Taylor-Lagrange démontré à partir de Rolle

Notions : Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange, Extremum local intérieur et théorème de Rolle

Le cours démontre la formule de Taylor-Lagrange à la section 19. On reprend ici cette démonstration pas à pas, parce qu'elle est le modèle d'une technique qu'on retrouvera partout : **fabriquer une fonction auxiliaire qui s'annule aux deux bouts, pour pouvoir lui appliquer le théorème de Rolle**. L'énoncé à établir est le suivant.

Théorème

Formule de Taylor-Lagrange. Soient $a < b$ deux réels et n un entier naturel. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Aucune intégrale n'apparaît dans cette démonstration : les primitives relèvent du chapitre « Calcul intégral élémentaire », et la formule de Taylor avec reste intégral y est traitée. Ici, tout vient de Rolle.

1. Installer l'idée sur le cas $n = 1$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$, et l'on veut produire $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

a. On pose, pour $t \in [a, b]$,

$$\varphi(t) = f(b) - f(t) - (b-t)f'(t) - K \frac{(b-t)^2}{2},$$

où K est un réel à choisir. Calculer $\varphi(b)$, puis déterminer l'unique valeur de K pour laquelle $\varphi(a) = 0$.

b. Vérifier les hypothèses du théorème de Rolle pour φ , calculer $\varphi'(t)$, et conclure.

c. Que devient cette construction si l'on refait le même travail avec $n = 0$, c'est-à-dire avec $\varphi(t) = f(b) - f(t) - K(b-t)$? Quel théorème du cours retrouve-t-on?

2. Le cas général. On garde b fixé et l'on pose, pour $t \in [a, b]$,

$$\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - K \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a. Calculer $\varphi(b)$. On précisera quels termes de la somme survivent en $t = b$.

b. Déterminer l'unique réel K tel que $\varphi(a) = 0$, et dire pourquoi il existe et est unique.

c. Vérifier **une par une** les trois hypothèses du théorème de Rolle pour φ sur $[a, b]$.

d. Calculer $\varphi'(t)$ pour $t \in]a, b[$. C'est l'étape décisive : la somme dérivée **se télescope**, et il faut le faire apparaître, pas l'affirmer.

e. Conclure.

3. Lecture des hypothèses. Où intervient exactement l'hypothèse « f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ », et où intervient exactement « f est $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ »? Pourquoi ces deux hypothèses ne portent-elles pas sur le même ensemble?

4. *L'inégalité.* En déduire en une ligne l'inégalité de Taylor-Lagrange : si de plus $|f^{(n+1)}| \leq M_{n+1}$ sur $]a, b[$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

5. *Le point c n'est pas un objet fixe.* Le théorème affirme l'existence de c , il n'en donne ni la valeur ni l'unicité, et ce c dépend de n et de b .

a. Sur l'exemple $f(x) = x^3$, $a = 0$, calculer explicitement le point c fourni par la formule pour $n = 0$, puis pour $n = 1$. Comparer.

b. Voici deux conclusions tirées par des copies. Dire pour chacune quelle propriété inexistante de c elle utilise, et la réfuter sur l'exemple de la question 5.a.

(i) « Écrivons la formule à l'ordre 0 puis à l'ordre 1 et retranchons ces deux égalités membre à membre. »

(ii) « Pour tout $x > 0$, $f(x) = f(0) + \frac{x^2}{2} f''(c)$. Dérivons cette égalité par rapport à x . »

Corrigé

1.a. *La valeur en b .* En remplaçant t par b , les deux termes contenant $b - t$ s'annulent :

$$\varphi(b) = f(b) - f(b) - 0 \times f'(b) - K \times 0 = 0.$$

Ce zéro est gratuit : il ne dépend d'aucun choix de K , et c'est **la raison même** pour laquelle la fonction auxiliaire est écrite en $b - t$ et non autrement.

Le choix de K . On calcule

$$\varphi(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - K \frac{(b-a)^2}{2},$$

et $\varphi(a) = 0$ équivaut à

$$K \frac{(b-a)^2}{2} = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a).$$

Comme $a < b$, le facteur $\frac{(b-a)^2}{2}$ est **strictement positif**, donc non nul : cette équation du premier degré en K admet une solution et une seule,

$$K = \frac{2}{(b-a)^2} \left(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) \right). \quad \square$$

1.b. *Les hypothèses de Rolle.* Le théorème de Rolle, démontré à la section 11, demande trois choses.

- φ est continue sur $[a, b]$. Elle est construite à partir de f et de f' , de la fonction affine $t \mapsto b - t$ et de constantes. Or f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, donc f et f' y sont continues, et les opérations sur les fonctions continues concluent.
- φ est dérivable sur $]a, b[$. Le seul terme qui pose question est $(b-t)f'(t)$: sa dérivabilité exige celle de f' , c'est-à-dire l'existence de f'' sur $]a, b[$, qui est l'hypothèse faite.
- $\varphi(a) = \varphi(b)$. Les deux valent 0, par construction en a.

Le calcul de φ' . Pour $t \in]a, b[$, la dérivée du produit $(b-t)f'(t)$ vaut $-f'(t) + (b-t)f''(t)$, et celle de $\frac{(b-t)^2}{2}$ vaut $-(b-t)$. Donc

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \left(-f'(t) + (b-t)f''(t) \right) + K(b-t) = (b-t)(K - f''(t)).$$

Les deux termes en $f'(t)$ se sont détruits : c'est le télescopage, sur son plus petit exemple.

La conclusion. Le théorème de Rolle fournit $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$(b - c)(K - f''(c)) = 0.$$

Or $c < b$, donc $b - c \neq 0$, et un produit nul dont un facteur est non nul force l'autre à être nul : $K = f''(c)$. En reportant dans l'expression de K obtenue en **a**, on obtient

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2}f''(c). \quad \square$$

1.c. Le cas $n = 0$. Avec $\varphi(t) = f(b) - f(t) - K(b - t)$, on a encore $\varphi(b) = 0$, et

$$\varphi(a) = 0 \iff K(b - a) = f(b) - f(a) \iff K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

puisque $b - a \neq 0$. Cette fonction φ est continue sur $[a, b]$ dès que f l'est, dérivable sur $]a, b[$ dès que f l'est, et $\varphi'(t) = -f'(t) + K$. Rolle donne $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = K$, c'est-à-dire

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

C'est exactement l'égalité des accroissements finis, démontrée à la section 12. $\square$

Remarque

Ce cas $n = 0$ mérite d'être écrit avant le cas général, car il montre que Taylor-Lagrange n'est pas un théorème nouveau : c'est l'égalité des accroissements finis, poussée à un ordre quelconque par la même fonction auxiliaire, à laquelle on a seulement ajouté des termes. Et il rappelle au passage que la fonction auxiliaire de la section 12 n'a rien d'un tour de magie : elle est le membre de la famille φ qui correspond à $n = 0$.

2.a. La valeur en b . Dans la somme, le terme d'indice k contient le facteur $(b - t)^k$. En $t = b$:

- pour $k \geq 1$, ce facteur vaut $0^k = 0$, et le terme disparaît ;
- pour $k = 0$, le facteur est $(b - t)^0$, qui vaut 1 y compris en $t = b$ (convention $u^0 = 1$), et le terme vaut $\frac{1}{0!}f(b) = f(b)$.

Le dernier terme contient $(b - t)^{n+1}$ avec $n + 1 \geq 1$, donc s'annule aussi. Il reste

$$\varphi(b) = f(b) - f(b) = 0. \quad \square$$

Le point de vigilance. C'est le seul endroit de la démonstration où le terme $k = 0$ se comporte différemment des autres. Une rédaction qui écrit « tous les termes s'annulent en $t = b$ » est fautive : l'un ne s'annule pas, et c'est précisément celui qui compense $f(b)$.

2.b. L'équation en K . On a

$$\varphi(a) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - K \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!},$$

et $\varphi(a) = 0$ équivaut à

$$K \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b - a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Existence et unicité. Puisque $a < b$, on a $b - a > 0$, donc $(b - a)^{n+1} \neq 0$ et le coefficient $\frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}$ est non nul. L'équation est du premier degré en K à coefficient non nul : elle admet une unique solution,

$$K = \frac{(n + 1)!}{(b - a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right). \quad \square$$

Ce que K est, à ce stade. Un nombre parfaitement déterminé, entièrement calculable à partir de f , de a , de b et de n . Toute la démonstration consiste maintenant à prouver que ce nombre est **une valeur de $f^{(n+1)}$** . On ne sait encore rien de tel.

2.c. Les trois hypothèses de Rolle, une par une.

- *Continuité de φ sur $[a, b]$.* La fonction φ est une combinaison, à coefficients fonctions polynomiales de t , des fonctions $f, f', \dots, f^{(n)}$. L'hypothèse « f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ » signifie exactement que ces $n + 1$ fonctions existent et sont **continues sur le segment fermé** $[a, b]$, extrémités comprises. Les opérations sur les fonctions continues donnent alors la continuité de φ sur $[a, b]$.
- *Dérivabilité de φ sur $]a, b[$.* Le terme d'indice $k = n$ de la somme contient $f^{(n)}(t)$; le dériver exige l'existence de $f^{(n+1)}$ sur $]a, b[$, ce qui est l'hypothèse « f est $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ ». Les autres termes ne demandent pas davantage.
- $\varphi(a) = \varphi(b)$. La question **2.a** donne $\varphi(b) = 0$ et la question **2.b** a choisi K pour que $\varphi(a) = 0$. Les deux valeurs sont donc égales, et cette égalité n'est pas un hasard : elle est la définition de K . $\square$

2.d. La dérivée, et son télescopage. Fixons $t \in]a, b[$ et dérivons terme à terme.

Pour $k = 0$, le terme est $f(t)$ et sa dérivée est $f'(t)$.

Pour $1 \leq k \leq n$, le terme est un produit, et la formule de dérivation d'un produit donne

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right] = -\frac{k(b-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t),$$

et comme $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$, cela s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right] = -\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t).$$

La bonne notation, celle qui rend le télescopage visible. Posons, pour $0 \leq k \leq n$,

$$A_k(t) = \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t).$$

Le second morceau de la dérivée ci-dessus est A_k , et le premier est $-A_{k-1}$. La dérivée du terme d'indice k vaut donc $A_k - A_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$, tandis que celle du terme d'indice 0 vaut $f'(t) = A_0(t)$.

En sommant, les termes s'annulent deux à deux et il ne reste que le dernier :

$$\sum_{k=0}^n \frac{d}{dt} \left[\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right] = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) = A_0 + (A_n - A_0) = A_n(t).$$

Le troisième terme. Enfin

$$\frac{d}{dt} \left[-K \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right] = K \frac{(n+1)(b-t)^n}{(n+1)!} = K \frac{(b-t)^n}{n!}.$$

Le résultat. En rassemblant, et en se souvenant que φ porte un signe moins devant la somme,

$$\varphi'(t) = -A_n(t) + K \frac{(b-t)^n}{n!} = \frac{(b-t)^n}{n!} (K - f^{(n+1)}(t)). \quad \square$$

Remarque

Tout l'exercice tient dans cette ligne. La fonction φ a été fabriquée pour que sa dérivée, au lieu d'être une somme de $n + 1$ termes ingérables, se réduise à **un seul facteur intéressant**, $K - f^{(n+1)}(t)$, multiplié par une quantité dont on sait qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$. C'est la raison pour laquelle on écrit $f^{(k)}(t)$ et non $f^{(k)}(a)$ dans la somme : si les dérivées étaient évaluées en a , il n'y aurait rien à télescoper, et φ' ne dirait rien de $f^{(n+1)}$.

2.e. La conclusion. Les hypothèses de Rolle étant vérifiées (question **2.c**), il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, soit

$$\frac{(b-c)^n}{n!} \left(K - f^{(n+1)}(c) \right) = 0.$$

Comme $c < b$, on a $b - c > 0$, donc $(b - c)^n \neq 0$ et le premier facteur est non nul. Il vient $K = f^{(n+1)}(c)$, et en reportant dans l'expression de K trouvée en **2.b** :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \quad \square$$

3. La classe $\mathcal{C}^n$ sur le segment fermé sert à un seul endroit, et à un endroit indispensable : la **continuité de φ sur $[a, b]$** , extrémités comprises. C'est là que l'on a besoin que $f, f', \dots, f^{(n)}$ existent et soient continues **en a et en b** , sans quoi $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ n'auraient même pas de sens et Rolle ne s'appliquerait pas.

La **dérivabilité à l'ordre $n+1$ sur l'ouvert** sert elle aussi à un seul endroit : la **dérivabilité de φ sur $]a, b[$** , question **2.c**, deuxième point, et le calcul de φ' de la question **2.d**.

Pourquoi les deux ensembles diffèrent. Parce que le théorème de Rolle est lui-même dissymétrique, comme la section 11 l'a souligné : il demande la continuité sur le **fermé** et la dérivabilité sur l'**ouvert** seulement. La fonction auxiliaire hérite exactement de cette dissymétrie, et l'énoncé de Taylor-Lagrange la transmet à f . Exiger f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ tout entier serait plus simple à écrire, mais ce serait une hypothèse strictement plus forte que nécessaire, et elle exclurait des fonctions parfaitement traitables. Prenons $f(x) = x^n \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$: sa dérivée d'ordre n vaut $Cx^{1/2}$ pour $x > 0$ avec $C > 0$, se prolonge par la valeur 0 en $x = 0$ et y est continue, donc f est bien de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, 1]$; sa dérivée d'ordre $n+1$ vaut $\frac{C}{2}x^{-1/2}$ sur $]0, 1[$, où elle existe parfaitement, mais elle n'a pas de valeur en 0. Cette fonction relève donc du théorème sous sa forme énoncée, et pas sous la forme renforcée.

4. L'inégalité. La formule démontrée à la question **2.e** donne

$$f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

et il ne reste qu'à prendre la valeur absolue puis à majorer $|f^{(n+1)}(c)|$ par M_{n+1} , ce qui est licite puisque $c \in]a, b[$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(c)| \leq M_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad \square$$

Ce que le passage à l'inégalité fait gagner. Il fait **disparaître c** . C'est tout l'intérêt de l'inégalité : elle est utilisable numériquement, alors que l'égalité contient un point inconnu. C'est aussi ce qui explique que l'exercice 23 n'emploie jamais que l'inégalité.

5.a. Le calcul sur $f(x) = x^3$, avec $a = 0$ et $b > 0$. Cette fonction est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6.$$

À l'ordre $n = 0$. La formule s'écrit $f(b) = f(0) + bf'(c)$, soit $b^3 = 3bc^2$. Comme $b \neq 0$, cela donne $c^2 = \frac{b^2}{3}$, et comme $c \in]0, b[$ est positif,

$$c = \frac{b}{\sqrt{3}} \approx 0,577 b.$$

À l'ordre $n = 1$. La formule s'écrit $f(b) = f(0) + bf'(0) + \frac{b^2}{2}f''(c)$, soit $b^3 = 0 + 0 + \frac{b^2}{2} \times 6c = 3b^2c$, d'où

$$c = \frac{b}{3} \approx 0,333b.$$

La comparaison. Les deux valeurs sont différentes : $\frac{b}{\sqrt{3}} \neq \frac{b}{3}$. Le point c **dépend donc de n** . Et l'une comme l'autre est proportionnelle à b : il **dépend aussi de b** . La notation correcte serait $c_{n,b}$, et si l'on écrit simplement c , c'est un abus qu'il faut avoir en tête. $\square$

Un troisième ordre, pour finir le tableau. À l'ordre $n = 2$, la formule donne $b^3 = \frac{b^3}{6}f'''(c) = b^3$: elle est vérifiée pour **tout** $c \in]0, b[$. Le point n'est donc pas unique non plus. Le théorème dit « il existe », et rien de plus.

5.b. (i) La propriété inexistante. Retrancher les deux égalités membre à membre suppose que le c de l'ordre 0 et le c de l'ordre 1 sont **le même nombre**, alors que le théorème produit deux points obtenus par deux applications indépendantes de Rolle, à deux fonctions auxiliaires différentes.

La réfutation. Sur $f(x) = x^3$ avec $a = 0$ et $b = 1$, la question **5.a** donne $c = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$

à l'ordre 0 et $c = \frac{1}{3} \approx 0,333$ à l'ordre 1. La soustraction proposée mélangerait $f'(0,577)$ et $f''(0,333)$ en les traitant comme des dérivées prises au même point, et n'a aucun sens.

La rédaction correcte. Nommer les points différemment dès la première ligne : « il existe $c_0 \in]a, b[$ tel que... et il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que... ». Une fois ces deux noms posés, l'envie de soustraire disparaît d'elle-même.

(ii) La propriété inexistante. Dériver l'égalité par rapport à x suppose que c ne dépend pas de x , autrement dit que c est une **constante**. Or l'égalité invoquée est, pour chaque x , l'application du théorème sur le segment $[0, x]$, et le point qu'elle fournit dépend de ce segment. L'écriture honnête est

$$f(x) = f(0) + \frac{x^2}{2}f''(c(x)),$$

et la fonction $x \mapsto c(x)$ n'est ni connue, ni continue a priori, ni même définie de manière unique, comme le montre le cas $n = 2$ ci-dessus.

La réfutation. Sur $f(x) = x^3$ avec $a = 0$, la question **5.a** donne $c(x) = \frac{x}{3}$ à l'ordre 1. L'égalité s'écrit donc $x^3 = \frac{x^2}{2} \times 6 \times \frac{x}{3} = x^3$, ce qui est correct. Mais dériver en traitant c comme une constante donnerait

$$3x^2 = x f''(c) = 6xc,$$

c'est-à-dire $c = \frac{x}{2}$, en contradiction avec $c = \frac{x}{3}$. Le calcul « constant » se réfute donc lui-même sur un exemple d'une ligne.

La leçon générale. Un théorème d'existence ne fournit pas une fonction. Il fournit, pour chaque jeu de données, un objet, et rien n'autorise à supposer que cet objet varie régulièrement quand les données varient. C'est la même prudence que celle exigée par le théorème des valeurs intermédiaires, qui fournit une solution sans fournir de fonction solution. $\square$

Commentaire. La démonstration de Taylor-Lagrange se retient par sa charpente, pas par sa formule auxiliaire.

La charpente est celle de toute application de Rolle : on veut de l'information sur une dérivée d'ordre élevé, on ne dispose que d'un théorème qui produit un point où une dérivée **première** s'annule, on fabrique donc une fonction dont la dérivée première contient l'information cherchée. La question **2.d** est le cœur de l'affaire, et le fait que les dérivées de f y soient évaluées en t , la variable, et non en a , la constante, est ce qui rend le télescopage possible. C'est le détail qu'une copie sur deux modifie « pour simplifier », et qui fait s'effondrer toute la démonstration.

La question **5** porte sur autre chose, et sur quelque chose d'aussi important : la manière de manipuler un objet dont on ne sait qu'une chose, à savoir qu'il existe. Les deux fautes proposées sont fréquentes parce qu'elles sont invisibles à la relecture : rien ne dépasse, tous les symboles sont à leur place, et le résultat obtenu est souvent presque juste. La seule protection est de nommer les objets d'existence avec un indice qui rappelle de quoi ils dépendent, dès la ligne où on les introduit.

9. Une copie écrit : « g est paire, donc son développement limité d'ordre 4 s'écrit $g(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^4)$, ce qui **prouve** que $g'(0) = 0$. » Le résultat est-il correct ? Le raisonnement est-il complet ?

Corrigé

Partie A

1. $f(0) = 2$. Un développement limité d'ordre 3 est en particulier un développement limité d'ordre 0, obtenu par troncature (section 20) :

$$f(x) = 2 + o(1),$$

ce qui signifie exactement que $f(x) \rightarrow 2$ quand $x \rightarrow 0$. Comme f est définie en 0 et admet un développement limité d'ordre 0 en ce point, elle y est continue et sa limite est sa valeur : $f(0) = 2$.

Le raccourci à connaître. Le terme constant d'un développement limité en 0 **est** la valeur de la fonction en 0. C'est la lecture la plus simple, et elle sert de premier contrôle sur tout calcul de développement limité.

2. $f'(0) = -3$. Le développement limité d'ordre 1, obtenu par troncature, s'écrit $f(x) = 2 - 3x + o(x)$. Or l'existence d'un développement limité d'ordre 1 en 0 est **équivalente** à la dérivabilité en 0 (c'est la troisième des trois écritures de la section 2, et la section 20 le redit), et l'on a alors

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x).$$

L'unicité du développement limité impose l'identification des coefficients : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -3$.

Ce qui rend la lecture licite. C'est l'**unicité**, et rien d'autre. Sans elle, deux écritures différentes pourraient valoir pour la même fonction et le coefficient de x ne serait pas un nombre bien défini.

3. *On ne peut pas l'affirmer.* On sait que $f'(0) = -3 < 0$, ce qui donne déjà une information : le développement limité d'ordre 1 s'écrit $f(x) - 2 = -3x + o(x)$, donc pour x assez petit et non nul, $f(x) - f(0)$ est du signe de $-3x$. Ainsi $f(x) > f(0)$ pour $x < 0$ petit et $f(x) < f(0)$ pour $x > 0$ petit. La fonction n'est donc certainement **pas croissante** au voisinage de 0.

Mais l'affirmation symétrique est également interdite. On ne peut pas non plus affirmer que f est **décroissante** sur un voisinage de 0. Décroître sur un intervalle est une propriété qui porte sur **tous** les couples de points de cet intervalle, et le développement limité ne renseigne que sur la comparaison de $f(x)$ à $f(0)$, c'est-à-dire sur les couples dont l'un des points est 0.

Ce qui manquerait. La caractérisation des variations par le signe de la dérivée (section 15) exige de connaître le signe de f' **sur tout un intervalle**, pas en un seul point. Or l'énoncé ne dit même pas que f est dérivable ailleurs qu'en 0. Il existe des fonctions vérifiant $f'(0) < 0$ et monotones sur aucun voisinage de 0.

Remarque

C'est le contresens le plus fréquent du chapitre, et il tient à une confusion de vocabulaire : « $f'(0) < 0$ » est une information **ponctuelle**, « f est décroissante au voisinage de 0 » est une information **sur un intervalle**. Le théorème qui relie les deux passe par l'égalité des accroissements finis, et il réclame le signe de f' sur l'intervalle entier.

4. *Le développement limité d'ordre 1.* La propriété de troncature donne

$$f(x) = 2 - 3x + o(x).$$

On tronque le polynôme au degré 1 et l'on **remonte** le reste de $o(x^3)$ à $o(x)$: les termes $4x^3$ et $o(x^3)$ sont tous deux des $o(x)$, et leur somme aussi. $\square$

5. On ne peut pas. Un développement limité d'ordre 4 demanderait de connaître le coefficient de x^4 , et l'information donnée ne le contient pas. Le reste $o(x^3)$ est une quantité négligeable devant x^3 , mais elle peut parfaitement être de l'ordre de $x^{3,5}$, ou de x^4 , ou de x^7 : rien ne permet de trancher.

Le sens de la règle. Un développement limité se **tronque** vers un ordre inférieur, il ne se **prolonge** jamais vers un ordre supérieur. C'est une flèche à sens unique, et il n'y a pas d'exception.

6. Non, on ne peut pas. Deux situations doivent être distinguées, et c'est là toute la question.

Si l'on sait par ailleurs que f est deux fois dérivable en 0, alors la formule de Taylor-Young (section 19) donne

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

et l'unicité du développement limité d'ordre 2, comparée à la troncature de celui de l'énoncé, impose $\frac{f''(0)}{2} = 0$, donc $f''(0) = 0$.

Mais l'énoncé ne le dit pas, et l'existence d'un développement limité d'ordre 3 ne suffit pas à garantir que $f''(0)$ existe. **La réciproque de Taylor-Young est fausse dès l'ordre 2** : avoir un développement limité d'ordre n n'entraîne la dérivabilité n fois que pour $n \leq 1$.

Un témoin. Posons

$$g(x) = 2 - 3x + 4x^3 + x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{pour } x \neq 0, \quad g(0) = 2.$$

Le dernier terme est majoré en valeur absolue par x^4 , donc c'est un $o(x^3)$: la fonction g admet bien le développement limité de l'énoncé. Pourtant, en dérivant ce dernier terme pour $x \neq 0$, on trouve

$$4x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

et en le divisant par x pour former le taux d'accroissement de g' en 0, le morceau $-2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ne possède aucune limite quand $x \rightarrow 0$. Donc $g''(0)$ n'existe pas, et l'affirmation « $f''(0) = 0$ » n'a même pas de sens pour cette fonction. $\square$

La réponse à donner en copie. « Non : un développement limité d'ordre 3 n'entraîne pas l'existence de $f''(0)$. **Si** f est deux fois dérivable en 0, alors oui, $f''(0) = 0$, par Taylor-Young et unicité. » Les deux phrases comptent.

Un renvoi. La même question a déjà été posée à l'exercice 21, sur un développement d'ordre 2, et la réponse y était la même : elle ne dépend pas de l'ordre. Ce qu'on ajoute ici est le **témoin explicite** ci-dessus, qui transforme un « on ne peut pas l'affirmer » en un « c'est faux pour cette fonction précise ». Les deux niveaux de réponse ne valent pas la même chose en copie.

Partie B

a. OUI. C'est l'écriture de l'énoncé, où le terme de coefficient nul a simplement été omis. Un développement limité est une **égalité de fonctions** : ajouter ou retirer un terme nul ne la change pas. Le polynôme est le même, le reste est le même. C'est d'ailleurs l'écriture qu'on emploie en pratique.

b. NON, alors que l'égalité écrite est **vraie**. C'est le piège de troncature, et il faut distinguer les deux choses.

L'égalité est vraie. Puisque $o(x^3)$ est aussi un $o(x^2)$, l'égalité de l'énoncé entraîne bien $f(x) = 2 - 3x + 4x^3 + o(x^2)$.

Ce n'est pourtant pas un développement limité. La définition (section 20) exige que le polynôme soit de degré **au plus égal à l'ordre annoncé**. Ici le reste est $o(x^2)$, donc l'ordre annoncé est 2, et le polynôme $2 - 3x + 4x^3$ est de degré 3 : il dépasse. Ce n'est ni un développement limité d'ordre 2 (polynôme trop gros), ni un développement limité d'ordre 3 (reste trop faible).

Pourquoi c'est nuisible. Le terme $4x^3$ est ici **absorbé par le reste** : il n'apporte plus aucune information, et il donne au lecteur l'illusion qu'on connaît le comportement à l'ordre 3. Un développement limité d'ordre 2 correct s'écrit $f(x) = 2 - 3x + o(x^2)$, et il faut oser jeter le terme en trop.

c. OUI, à la présentation près. Le polynôme $4x^3 - 3x + 2$ est **le même polynôme** que $2 - 3x + 4x^3$: chaque coefficient reste attaché à sa puissance, seul l'ordre d'écriture des monômes change, et l'addition est commutative. L'égalité est donc un développement limité d'ordre 3 de f , valide.

Pourquoi il faut néanmoins écrire dans l'ordre croissant. Parce que c'est l'ordre dans lequel les termes comptent au voisinage de 0 : le premier écrit est le dominant, le dernier est le plus petit, et le reste vient naturellement à la fin. Une écriture en puissances décroissantes force le lecteur à relire pour identifier le terme dominant, et c'est ainsi qu'on finit par commettre l'erreur de l'écriture **d**.

d. NON, et cette fois l'égalité est **fausse**. Les coefficients -3 et 4 y sont raccrochés aux mauvaises puissances : l'écriture propose -3 comme coefficient de x^3 et 4 comme coefficient de x , là où l'énoncé donne l'inverse. Par unicité du développement limité d'ordre 3, deux écritures de cette forme qui diffèrent par un coefficient ne peuvent pas valoir toutes les deux : celle de l'énoncé étant vraie, celle-ci est fausse.

Le contrôle qui l'aurait détectée en deux secondes. Le coefficient de x doit valoir $f'(0)$. L'écriture **d** annonce $f'(0) = 4$, alors que la question **2** a établi $f'(0) = -3$. Sur toute écriture suspecte, on vérifie d'abord le terme constant et le coefficient de x : ils ont un sens, donc ils se contrôlent.

e. NON. L'égalité proposée affirme que le reste est un $o(x^4)$, ce que l'énoncé ne dit pas et ne permet pas de déduire, comme la question **5** l'a établi. On ne peut donc pas l'écrire : ce serait affirmer plus qu'on ne sait.

À ne pas confondre avec le cas a. Dans **a**, on retire un terme nul du polynôme et le reste ne bouge pas : l'égalité est inchangée. Dans **e**, on ajoute un terme nul **et** on renforce le reste : c'est le renforcement du reste qui est illicite, pas le terme nul. La différence entre les deux tient au seul symbole o .

Récapitulatif. Sont des développements limités d'ordre 3 de f : **a** et **c**. Ne le sont pas : **b** (vraie mais pas un développement limité), **d** (fausse), **e** (non justifiable). $\square$

Partie C

7.a. $\cos$ est paire, puisque $\cos(-x) = \cos x$ pour tout réel x . Le tableau des développements usuels donne

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Les puissances présentes sont 0, 2 et 4 : toutes paires. Les coefficients de x , x^3 et x^5 sont nuls.

La règle est vérifiée.

7.b. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est paire, car $(-x)^2 = x^2$: la fonction ne dépend de x que par x^2 . En substituant $u = -x^2$ dans le développement de $\frac{1}{1-u}$, licite puisque $-x^2 \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^5).$$

Puissances présentes : 0, 2, 4. **La règle est vérifiée.**

Le cas le plus lisible des trois. Une fonction qui ne s'écrit qu'avec x^2 ne peut évidemment produire que des puissances paires. C'est la version transparente du théorème, et elle aide à s'en souvenir.

7.c. $x \mapsto e^{x^2}$ est paire, pour la même raison. En substituant $u = x^2$ dans le développement de

e^u :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5).$$

Puissances présentes : 0, 2, 4. **La règle est vérifiée.** $\square$

8. La prévision. La fonction sh étant impaire, son développement limité ne doit comporter que des puissances impaires, donc aucun terme constant et aucun terme en x^2 ni en x^4 .

La vérification. Le tableau donne

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

dont les puissances présentes sont 1, 3, 5. **C'est bien vérifié**, et l'on note en particulier que le terme constant est nul, ce qui était obligatoire : une fonction impaire définie en 0 y vaut nécessairement 0. $\square$

9. Le résultat est correct. Si g est paire et dérivable en 0, alors $g'(0) = 0$. C'est vrai.

Le raisonnement est incomplet, et sur deux points.

- Il faut savoir que **g est dérivable en 0** avant de parler de $g'(0)$. La copie ne l'a pas dit. Il se trouve que l'existence d'un développement limité d'ordre 4 entraîne celle d'un développement limité d'ordre 1 par troncature, donc la dérivabilité en 0 : l'argument existe, mais il doit être écrit.
- Il faut invoquer l'**unicité** pour identifier le coefficient de x à $g'(0)$. Sans elle, le fait que le développement écrit ne comporte pas de terme en x ne dit rien de $g'(0)$.

La rédaction attendue. « g admet un développement limité d'ordre 4 en 0, donc, par troncature, un développement limité d'ordre 1, donc g est dérivable en 0 et le coefficient de x vaut $g'(0)$ par unicité. La parité de g annulant ce coefficient, $g'(0) = 0$. » $\square$

Ce que cette question illustre. Une conclusion juste ne rachète pas une démonstration incomplète, et c'est particulièrement vrai autour des développements limités, où presque toutes les lectures reposent sur le théorème d'unicité. Le citer n'est pas une politesse : c'est le seul argument qui autorise à parler « du » coefficient de x^k .

Commentaire. Cet exercice ne demande aucun calcul, et il est pourtant celui qui départage le plus nettement les copies en début de chapitre, parce que trois confusions y sont piégées.

La première est celle de la **flèche de troncature**. On descend d'un ordre, on ne remonte jamais : les questions **4**, **5**, **b** et **e** en sont quatre variations, et elles se ramènent toutes à la place du symbole o .

La deuxième est celle du **ponctuel et du local**. Les questions **2**, **3** et **6** portent sur trois informations que le développement limité donne ou ne donne pas en 0 seulement : la dérivée première, oui ; la monotonie sur un voisinage, non ; la dérivée seconde, non sans hypothèse supplémentaire. Un développement limité est une information locale sur les valeurs de f , pas une information sur les valeurs de ses dérivées ailleurs qu'au point considéré.

La troisième est celle du **rôle de l'unicité**. Toute phrase du type « le coefficient de x^2 vaut donc... » utilise l'unicité, même quand elle ne la nomme pas. La partie **B** ne se traite pas autrement : c'est parce que le développement limité d'ordre 3 est unique que l'écriture **d** peut être déclarée fausse sans le moindre calcul.

Exercice 26 ★★ Le tableau des usuels, et comment ne pas l'apprendre par cœur

Notions : Développements limités usuels en 0, Formule de Taylor-Young

Le tableau des développements limités usuels de la section 21 compte une dizaine de lignes, et l'on entend souvent qu'il faut l'apprendre par cœur. C'est à moitié vrai : deux lignes suffisent, et le reste se **reconstitue** en trois lignes de calcul. Cet exercice fait la part des deux, et se termine sur le seul théorème du chapitre qui permette de fabriquer un développement limité nouveau à partir d'un ancien.

Partie A. Ce qu'il faut savoir

1. Compléter le tableau ci-dessous, tous les développements étant pris **en** 0. Les quatre premières lignes sont données, les quatre dernières sont à écrire.

Fonction	Développement limité en 0
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$
$\sin x$	à compléter
$\operatorname{sh} x$	à compléter
$\ln(1+x)$	à compléter
$(1+x)^\alpha$	à compléter

Partie B. Ce qu'il ne faut surtout pas apprendre

On ne dispose plus que de **deux** développements, celui de e^x et celui de $\frac{1}{1-x}$. Tout le reste est oublié.

2. Retrouver, à l'ordre n et en moins de cinq lignes chacun, sans dériver et sans dresser aucun tableau de dérivées successives :

a. le développement de $\frac{1}{1+x}$;

b. celui de $\operatorname{ch} x$;

c. celui de $\operatorname{sh} x$;

d. celui de $\cos x$. Ce dernier demande un argument d'une autre nature que les trois précédents : on cherchera ce qui distingue $\cos$ de ch du point de vue de la dérivée seconde, et l'on dira honnêtement pourquoi la simple substitution ne suffit pas ici.

On indiquera à chaque fois lequel des trois procédés on emploie : **substitution** d'une expression dans un développement connu, **parité**, ou **combinaison** de deux développements.

Partie C. Un seul calcul par Taylor-Young

3. Déterminer le développement limité de th à l'ordre 5 en 0. Deux voies sont possibles : dresser le tableau des dérivées successives $\operatorname{th}^{(k)}(0)$ pour $k \leq 5$, ou exploiter la relation $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$. Choisir la plus courte, la mener, et dire en une phrase pourquoi elle est la plus courte. On justifiera d'abord l'**existence** du développement.

Partie D. Le seul théorème qui fabrique du neuf

4. Le cours établit à la section 21 le résultat suivant, énoncé sans aucun symbole d'intégrale.

Théorème

Primitivation d'un développement limité. Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I contenant 0. Si f' admet en 0 un développement limité d'ordre n ,

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n),$$

alors f admet en 0 un développement limité d'ordre $n+1$, obtenu en primitivant terme à terme et en prenant $f(0)$ comme terme constant :

$$f(x) = f(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

a. L'appliquer à $f = \text{Arctan}$ pour obtenir son développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0. On partira de la dérivée, acquise à la section 8.

b. *L'avertissement.* La réciproque est **fausse** : si f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, sa dérivée n'admet pas nécessairement de développement limité d'ordre n , et **on ne dérive jamais un développement limité**. Le démontrer sur la fonction

$$h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{pour } x \neq 0, \quad h(0) = 0.$$

On montrera que h admet un développement limité d'ordre 1 en 0, et que h' n'admet même pas de développement limité d'ordre 0.

Corrigé**Partie A**

1. Les quatre lignes manquantes.

Fonction	Développement limité en 0
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$
$\text{sh } x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Trois contrôles à faire systématiquement sur une ligne qu'on vient d'écrire.

- **Le terme constant est la valeur en 0.** On lit $\sin 0 = 0$, $\text{sh } 0 = 0$, $\ln 1 = 0$ et $1^\alpha = 1$: les quatre sont corrects.
- **Le coefficient de x est la dérivée en 0.** On lit $\cos 0 = 1$, $\text{ch } 0 = 1$, $\frac{1}{1+0} = 1$ et α : les quatre sont corrects.
- **Les parités interdisent la moitié des termes.** Le sinus et le sinus hyperbolique sont impairs, donc leurs développements ne contiennent que des puissances impaires, ce qui est bien le cas. Le logarithme et la puissance ne sont ni pairs ni impairs, et leurs développements contiennent toutes les puissances.

Sur les deux signes qu'on inverse le plus souvent. Dans $\ln(1+x)$, le premier signe négatif est

celui de x^2 , donc le coefficient de x^n porte le signe $(-1)^{n-1}$, et non $(-1)^n$. Dans $(1+x)^\alpha$, le numérateur descend de α jusqu'à $\alpha - n + 1$, soit n **facteurs** pour le terme en x^n , et non $n + 1$.

Partie B

2.a. Le développement de $\frac{1}{1+x}$, par **substitution**.

On écrit $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$. Comme $-x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, la règle de substitution de la section 22 autorise à remplacer u par $-x$ dans le développement de $\frac{1}{1-u}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + o(x^n) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n). \quad \square$$

2.b. Le développement de $\operatorname{ch} x$, par **combinaison**.

Par définition, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Le développement de e^{-x} s'obtient par substitution de $-x$ dans celui de e^x :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^n).$$

En faisant la demi-somme, le terme d'indice k vaut $\frac{x^k}{k!} \times \frac{1 + (-1)^k}{2}$, c'est-à-dire $\frac{x^k}{k!}$ si k est pair et 0 si k est impair. Les puissances impaires disparaissent, il reste

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}). \quad \square$$

2.c. Le développement de $\operatorname{sh} x$, même procédé. Avec $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, le facteur devient $\frac{1 - (-1)^k}{2}$, qui vaut 0 pour k pair et 1 pour k impair : ce sont cette fois les puissances **paires** qui disparaissent, et

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}). \quad \square$$

Le contrôle de parité, appliqué à ce qu'on vient d'écrire. La demi-somme ch est paire, la demi-différence sh est impaire, et le calcul a produit exactement les puissances autorisées. C'est le meilleur signe qu'on ne s'est pas trompé.

2.d. Le développement de $\cos$, et pourquoi la substitution ne suffit pas.

L'obstacle, énoncé franchement. Il n'existe aucune substitution **réelle** qui transforme e^x en $\cos x$. La relation qui les lie est $\cos x = \operatorname{ch}(ix)$, et elle passe par les nombres complexes, qui relèvent d'un autre chapitre. Sur les quatre développements demandés, celui-ci est donc le seul qui ne s'obtienne pas par manipulation algébrique des deux lignes conservées.

Le raccourci qui marche. On compare $\cos$ et ch par leurs équations différentielles et leurs valeurs initiales, qui suffisent à déterminer toutes les dérivées en 0 :

$$\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch}, \quad \cos'' = -\cos, \quad \operatorname{ch}(0) = \cos(0) = 1, \quad \operatorname{ch}'(0) = \cos'(0) = 0.$$

Notons $c_k = \cos^{(k)}(0)$ et $h_k = \operatorname{ch}^{(k)}(0)$. En dérivant k fois les deux relations, on obtient $h_{k+2} = h_k$ et $c_{k+2} = -c_k$ pour tout k . Avec $c_0 = h_0 = 1$ et $c_1 = h_1 = 0$, une récurrence immédiate donne, pour tout p ,

$$h_{2p} = 1, \quad c_{2p} = (-1)^p, \quad h_{2p+1} = c_{2p+1} = 0.$$

La conclusion. Les deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc Taylor-Young s'applique et donne des développements limités à tout ordre, dont les coefficients sont $\frac{c_k}{k!}$ et $\frac{h_k}{k!}$. Ils ne diffèrent donc que par le signe $(-1)^p$ sur les termes d'exposant $2p$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}). \quad \square$$

Ce qu'il faut en retenir. La ligne du cosinus se déduit de celle du cosinus hyperbolique par la seule règle « un signe alterné sur les termes pairs », et la raison en est la différence d'un signe entre $\cos'' = -\cos$ et $\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch}$. La même règle relie $\sin$ et sh , avec $(-1)^p$ sur les termes d'exposant $2p + 1$. Deux lignes mémorisées, une règle de signe, et le tableau tient.

Méthode

Ce qui se retient vraiment. Deux développements (e^x et $\frac{1}{1-x}$), trois procédés (substituer, combiner, invoquer la parité) et une règle de signe entre fonctions circulaires et hyperboliques. Tout le reste du tableau en découle en trois lignes, et une ligne reconstituée en trois lignes vaut mieux qu'une ligne mémorisée de travers.

Partie C

3. L'existence du développement. La fonction $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule jamais, puisque $\operatorname{ch} \geq 1$. La formule de Taylor-Young s'applique donc à tout ordre, et en particulier th admet un développement limité d'ordre 5 en 0. C'est cette existence, et elle seule, qui autorise la méthode par identification qui suit.

La voie choisie, et pourquoi. On passe par la relation $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$, conséquence de $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$. Elle est plus courte que le tableau des dérivées, parce qu'elle transforme le calcul de cinq dérivées successives, dont les expressions gonflent à chaque étape, en une **identification de trois coefficients** sur des polynômes de degré au plus 5.

La forme du développement. La fonction th est impaire, comme quotient d'une fonction impaire par une fonction paire. Son développement limité d'ordre 5 ne comporte donc que des puissances impaires, et il n'y a que trois inconnues :

$$\operatorname{th} x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

L'identification. On développe les deux membres de $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$ à l'ordre 4, puisque dériver un développement d'ordre 5 fait descendre d'un ordre. À gauche,

$$\operatorname{th}'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4)$$

(cette écriture est licite ici, non par dérivation du développement, mais parce que th' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que Taylor-Young appliqué à th' donne des coefficients qui sont ceux annoncés). À droite, le carré se calcule en ne gardant que les termes de degré au plus 4 :

$$\operatorname{th}^2 x = (ax + bx^3 + o(x^3))^2 = a^2 x^2 + 2abx^4 + o(x^4),$$

d'où $1 - \operatorname{th}^2 x = 1 - a^2 x^2 - 2abx^4 + o(x^4)$.

Les trois équations. L'unicité du développement limité d'ordre 4 permet d'identifier les coefficients terme à terme :

$$x^0 : \quad a = 1,$$

$$x^2 : \quad 3b = -a^2 = -1, \quad \text{donc } b = -\frac{1}{3},$$

$$x^4 : \quad 5c = -2ab = -2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad \text{donc } c = \frac{2}{15}.$$

La conclusion.

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5). \quad \square$$

Le contrôle numérique. Pour $x = 0,05$, la calculatrice donne $\operatorname{th}(0,05) = 0,049958375\dots$ et le polynôme vaut $0,049958375\dots$: les deux coïncident jusqu'au dixième chiffre, ce qui est cohérent avec un reste en x^7 , de l'ordre de 10^{-10} ici.

Ce que l'autre voie aurait coûté. Les dérivées successives se calculent à partir de $u' = 1 - u^2$, avec $u = \operatorname{th}$:

$$u'' = -2uu', \quad u''' = -2(u'^2 + uu''), \quad u^{(4)} = -2(3u'u'' + uu'''), \quad u^{(5)} = -2(3u''^2 + 4u'u''' + uu^{(4)}).$$

En 0, où $u = 0$ et $u' = 1$, on trouve successivement $u''(0) = 0$, $u'''(0) = -2$, $u^{(4)}(0) = 0$ et $u^{(5)}(0) = 16$, puis les coefficients $\frac{-2}{3!} = -\frac{1}{3}$ et $\frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$: le même résultat, au prix de quatre dérivations de produits emboîtés. La voie par identification est plus sûre parce qu'elle manipule des nombres et non des expressions.

Partie D

4.a. Le développement d'Arctan.

Les hypothèses du théorème. La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, intervalle ouvert contenant 0, et la section 8 a établi

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Le développement de la dérivée. En substituant $u = -x^2$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0, dans le développement de $\frac{1}{1-u}$ à l'ordre n :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

La primitivation. Le théorème s'applique avec l'ordre $2n$ et donne un développement d'ordre $2n+1$. Le terme constant est $\operatorname{Arctan}(0) = 0$, et le terme $(-1)^p x^{2p}$ devient $(-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$:

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}). \quad \square$$

Le contrôle de parité. La fonction Arctan est impaire et le développement obtenu ne contient que des puissances impaires. Par ailleurs le coefficient de x vaut $1 = \operatorname{Arctan}'(0)$.

4.b. La réciproque est fausse.

h admet un développement limité d'ordre 1 en 0. Pour $x \neq 0$, le sinus est borné par 1 en valeur absolue, donc $|h(x)| \leq x^2$. Or $x^2 = o(x)$ quand $x \rightarrow 0$. Avec $h(0) = 0$, on a donc

$$h(x) = 0 + 0 \cdot x + o(x),$$

qui est bien un développement limité d'ordre 1 en 0. En particulier h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

Calcul de h' pour $x \neq 0$. La dérivée du produit, puis celle de la composée $x \mapsto \sin(x^{-3})$ dont la dérivée intérieure est $-3x^{-4}$, donnent

$$h'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{3}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

h' n'admet pas de développement limité d'ordre 0 en 0. Un développement limité d'ordre 0 s'écrit $h'(x) = a_0 + o(1)$, ce qui exige que $h'(x)$ ait une **limite finie** en 0, donc en particulier que h' soit **bornée** au voisinage de 0. Or elle ne l'est pas : posons

$$x_k = \left(\frac{1}{2k\pi}\right)^{1/3} \quad \text{pour } k \geq 1,$$

de sorte que $\frac{1}{x_k^3} = 2k\pi$, donc $\sin(x_k^{-3}) = 0$ et $\cos(x_k^{-3}) = 1$. La suite (x_k) tend vers 0 par valeurs strictement positives, et

$$h'(x_k) = -\frac{3}{x_k^2} = -3(2k\pi)^{2/3} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\infty.$$

La fonction h' n'est donc pas bornée au voisinage de 0, et elle n'admet aucun développement limité, pas même d'ordre 0. $\square$

Ce que le contre-exemple réfute exactement. La tentation était d'écrire : « $h(x) = 0 + 0 \cdot x + o(x)$, donc en dérivant, $h'(x) = 0 + o(1)$. » Le membre de gauche existe, le membre de droite est faux, et l'erreur est dans la flèche « donc en dérivant ». **La primitivation d'un développement limité est un théorème ; la dérivation d'un développement limité n'en est pas un.**

Pourquoi l'asymétrie. Primitiver est une opération **régularisante** : elle lisse, et une information moyennée reste une information. Dériver est une opération **amplifiante** : elle peut faire exploser une oscillation que le reste $o(x^n)$ dissimulait parfaitement. C'est exactement ce qui se produit ci-dessus, où le facteur x^2 suffisait à rendre l'oscillation négligeable, tandis que la dérivation lui fait produire un facteur x^{-2} .

Remarque

Il existe bien un énoncé qui autorise à dériver, mais il ne se lit pas sur le développement limité : si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors Taylor-Young appliqué à f' donne directement le développement de f' à l'ordre n , et il se trouve qu'il coïncide avec celui qu'on obtiendrait en dérivant le développement de f . C'est l'hypothèse de régularité qui fait tout le travail, pas la dérivation formelle. C'est aussi ce qui a permis d'écrire $\text{th}'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4)$ à la question **3** : non parce qu'on dérivait un développement, mais parce que th est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Commentaire. L'exercice répond à une question de méthode de travail, et sa réponse est chiffrée : sur les huit lignes du tableau, deux se retiennent et six se reconstituent.

Les procédés de la partie **B** sont ceux qu'on emploiera ensuite tout le temps, et ils sont trois : la substitution, licite quand l'expression substituée tend vers 0 ; la combinaison linéaire de deux développements ; l'argument de parité, qui annule la moitié des termes gratuitement. Le cas du cosinus montre en passant qu'une méthode peut avoir une frontière : sans les nombres complexes, il n'y a pas de substitution qui mène de l'exponentielle au cosinus, et il faut passer par les dérivées. Le dire est plus utile que de faire semblant que tout se déduit de tout.

La partie **D** contient la seule véritable machine à fabriquer des développements limités nouveaux, et son asymétrie est à retenir avec l'exemple qui la justifie. Un développement limité est une information sur f et sur rien d'autre : ni sur ses dérivées, ni sur son comportement en dehors du point considéré. La faute correspondante est corrigée en situation à l'exercice 34, sur une copie où la conclusion se trouve juste et la méthode fautive, ce qui est le cas le plus difficile à détecter.

Exercice 27 ★★ Le coût de la troncature

Notions : Opérations sur les développements limités : somme, produit, quotient, composition, changement de variable

Un calcul de développement limité échoue rarement sur la table des usuels. Il échoue sur l'**ordre auquel on développe chaque morceau** : trop bas, il manque des termes ; trop haut, on calcule pour rien et on se trompe. Cet exercice ne fait que cela, et le fait sur un cas où l'erreur est visible au chiffre près.

Partie A. Un produit, mal puis bien

On veut le développement limité d'ordre 3 en 0 de

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+2x}}.$$

1. *Avant tout calcul.* À quel ordre faut-il développer e^{-x} ? À quel ordre faut-il développer $(1+2x)^{-1/2}$? Justifier, en regardant la valeur de chaque facteur en 0.
2. *L'erreur, pour la voir.* Développer chacun des deux facteurs à l'ordre 2 seulement, multiplier les deux polynômes **entièrement**, et écrire le coefficient de x^3 ainsi obtenu. On le gardera de côté.
3. Reprendre le calcul correctement et donner le développement limité d'ordre 3 de F . Comparer au coefficient de la question 2 : quelle est la différence, et d'où viennent précisément les termes qui manquaient ?

Partie B. Quand la division coûte des ordres

4. On considère

$$G(x) = \frac{\cos(2x) - \cos^2 x}{x^2}.$$

À quel ordre faut-il développer le numérateur pour obtenir le développement limité d'ordre 2 de G en 0 ? Énoncer la règle générale pour une division par x^p , puis mener le calcul.

5. Deux quotients dont le dénominateur ne vaut pas 1 en 0. Les traiter en factorisant le dénominateur par sa valeur en 0, puis en composant avec le développement de $\frac{1}{1-u}$. On indiquera à chaque fois l'ordre auquel chaque morceau est développé, et pourquoi.

- a. $\frac{1}{2 + \sin x}$ à l'ordre 3
- b. $\frac{2x}{3 + e^x}$ à l'ordre 3

Partie C. Diagnostic seul

6. Pour chacune des cinq expressions suivantes, dire **à quel ordre développer chaque morceau**, et rien de plus : aucun calcul ne doit être mené à terme. Une des cinq n'admet pas de développement limité en 0 ; il faudra le repérer et le dire.

- a. $\sqrt[3]{1+x} \ln(1+2x)$, à l'ordre 3
- b. $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^5}$, à l'ordre 2
- c. $\ln(1 + \sin^2 x)$, à l'ordre 6
- d. $\frac{\operatorname{ch} x - \sqrt{1+x^2}}{x^4}$, à l'ordre 2
- e. $\sqrt{1 + \operatorname{Arctan} x}$, à l'ordre 3

Corrigé

Partie A

1. *La règle pour un produit.* Si f et g admettent des développements limités en 0 et si l'on veut celui de fg à l'ordre n , l'ordre nécessaire pour chaque facteur dépend de la **valuation** de l'autre, c'est-à-dire du degré de son premier terme non nul. Précisément, si g a une valuation v , alors f n'a besoin d'être développé qu'à l'ordre $n - v$: les termes de f de degré supérieur, multipliés par un terme de g de degré au moins v , produisent du $o(x^n)$.

Application. Ici les deux facteurs valent 1 en 0 :

$$e^{-0} = 1, \quad (1 + 0)^{-1/2} = 1.$$

Leurs valuations sont donc **nulles** toutes les deux, et il n'y a aucune économie à faire : chacun doit être développé à l'ordre 3. $\square$

Le réflexe à prendre. On regarde la valeur en 0 **avant** de développer. Un facteur qui vaut 1 en 0 ne fait rien gagner ; un facteur qui vaut 0 en 0 fait gagner autant d'ordres que sa valuation, et c'est le cas fréquent avec $\sin x$, $\ln(1 + x)$ ou $e^x - 1$.

2. *Les deux facteurs à l'ordre 2.*

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad (1 + 2x)^{-1/2} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Le second s'obtient en substituant $2x$ dans $(1 + u)^\alpha$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$: le coefficient de u est $-\frac{1}{2}$, donc celui de x est $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$; le coefficient de u^2 est $\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2} = \frac{3}{8}$, donc celui de x^2 est $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}$.

Le produit des deux polynômes, mené entièrement. Le coefficient de x^3 du produit $(1 - x + \frac{x^2}{2})(1 - x + \frac{3}{2}x^2)$ ne peut venir que de deux appariements, x^2 fois x et x fois x^2 :

$$\frac{1}{2} \times (-1) + (-1) \times \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2.$$

On retient donc, provisoirement, le coefficient -2 .

3. *Les deux facteurs à l'ordre 3.* Pour e^{-x} , il suffit de substituer $-x$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Pour l'autre, le coefficient de u^3 dans $(1 + u)^{-1/2}$ vaut

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{6} = \frac{-\frac{15}{8}}{6} = -\frac{5}{16},$$

et la substitution $u = 2x$ le multiplie par $2^3 = 8$, d'où le coefficient $-\frac{5}{2}$:

$$(1 + 2x)^{-1/2} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + o(x^3).$$

Le produit, ordre par ordre. On ne calcule que les coefficients de degré au plus 3.

$$x^0 : 1 \times 1 = 1,$$

$$x^1 : (-1) + (-1) = -2,$$

$$x^2 : \frac{1}{2} + (-1)(-1) + \frac{3}{2} = 3,$$

$$x^3 : \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} \times (-1) + (-1) \times \frac{3}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{6} - \frac{9}{2} = -\frac{14}{3}.$$

La conclusion.

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+2x}} = 1 - 2x + 3x^2 - \frac{14}{3}x^3 + o(x^3). \quad \square$$

La comparaison avec la question 2. Le calcul tronqué donnait -2 , le calcul correct donne $-\frac{14}{3}$. L'écart vaut

$$-\frac{14}{3} - (-2) = -\frac{14}{3} + 2 = -\frac{8}{3}.$$

D'où venaient les termes manquants. Exactement des deux produits qui font intervenir un terme de degré 3, absents des polynômes tronqués à l'ordre 2 :

$$1 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) \times 1 = -\frac{5}{2} - \frac{1}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}.$$

On retrouve l'écart au signe et à la fraction près. Il n'y a donc pas de mystère : **tronquer trop tôt ne dégrade pas le résultat, il le rend faux**, et de manière parfaitement identifiable.

Remarque

Deux fautes symétriques sont à distinguer.

Le calcul de la question **2** est faux **parce qu'il oublie des termes**, ceux de degré 3 des deux facteurs. Il aurait été correct jusqu'à l'ordre 2 inclus, et il l'est : les coefficients 1, -2 et 3 sont les bons.

Un second calcul, faux d'une autre manière, consisterait à développer chaque facteur à l'ordre 5 et à multiplier tout : les coefficients de degré au plus 3 seraient corrects, mais ceux de degré 4 et 5 seraient faux, car incomplets, et les écrire serait une erreur. **Un produit de deux développements d'ordre n ne donne un résultat valable que jusqu'à l'ordre n .**

Le contrôle numérique. Pour $x = 0,02$, la calculatrice donne $F(0,02) = 0,9611638\dots$ et le polynôme vaut $0,9611626\dots$: l'écart est de $1,2 \times 10^{-6}$, cohérent avec un reste d'ordre x^4 . Avec le coefficient fautif -2 à la place de $-\frac{14}{3}$, on aurait obtenu $0,9611840$, soit un écart de $2,0 \times 10^{-5}$, seize fois plus grand : le contrôle numérique détecte la faute.

Partie B

4. La règle de la division par x^p . Pour obtenir le développement limité d'ordre n de $\frac{N(x)}{x^p}$, il faut le développement de N à l'ordre $n+p$. La raison est directe : diviser par x^p divise chaque terme par x^p , donc **abaisse tous les degrés de p** , y compris celui du reste, puisque $\frac{o(x^{n+p})}{x^p} = o(x^n)$. Une division par x^p coûte donc p ordres, qu'il faut avoir payés d'avance au numérateur.

Application. Ici $p = 2$ et $n = 2$: le numérateur doit être développé à l'ordre 4.

Le développement de $\cos(2x)$. En substituant $2x$ dans celui de $\cos$, à l'ordre 4 :

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Le développement de $\cos^2 x$. Plutôt que d'élever un développement au carré, on utilise la formule de duplication $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$, ce qui réutilise le calcul précédent :

$$\cos^2 x = \frac{1 + 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4}{2} + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

La différence. Les termes constants se détruisent, ce qui était nécessaire pour que le quotient ait une limite :

$$\cos(2x) - \cos^2 x = (-2 + 1)x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)x^4 + o(x^4) = -x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

La division.

$$G(x) = \frac{-x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^2} = -1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2). \quad \square$$

Lecture du résultat. On lit d'un coup la limite en 0, qui vaut -1, et le fait que G se prolonge par continuité en 0 avec un minimum local, puisque le terme suivant est positif : au voisinage de 0, $G(x) > G(0) = -1$. C'est ce que l'exercice 29 exploitera, où seule la limite sera demandée.

Ce qu'un numérateur développé à l'ordre 2 aurait donné. On aurait obtenu $\cos(2x) - \cos^2 x = -x^2 + o(x^2)$, puis $G(x) = -1 + o(1)$, c'est-à-dire un développement d'ordre 0 seulement, sans le terme en x^2 . Ce n'est pas faux, c'est insuffisant : deux ordres ont été perdus, exactement ceux qu'a coûtés la division.

5.a. Factorisation du dénominateur. Comme $2 + \sin 0 = 2 \neq 0$, on factorise par 2 :

$$2 + \sin x = 2 \left(1 + \frac{\sin x}{2} \right).$$

L'ordre de chaque morceau. On veut l'ordre 3 pour le résultat, et l'on va composer avec $\frac{1}{1+u}$ où $u = \frac{\sin x}{2}$. Comme u est de valuation 1, les puissances u^k avec $k \geq 4$ sont des $o(x^3)$: il faut donc $\frac{1}{1+u}$ à l'ordre 3 en u , et $\sin x$ à l'ordre 3 en x .

Le calcul. On a $u = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$, d'où $u^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^3)$ et $u^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$, le terme croisé de u^2 étant de degré 4. Avec $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+u} &= 1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} \right) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8} \right) x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3). \end{aligned}$$

La conclusion, en n'oubliant pas le facteur $\frac{1}{2}$ mis de côté :

$$\frac{1}{2 + \sin x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3). \quad \square$$

Le contrôle. Le terme constant vaut $\frac{1}{2 + \sin 0} = \frac{1}{2}$, ce qui est correct. Et pour $x = 0,05$, la calculatrice donne 0,48780983 contre 0,48780990 pour le polynôme : l'accord est à 6×10^{-8} .

5.b. Factorisation. Comme $3 + e^0 = 4 \neq 0$:

$$3 + e^x = 4 + x + \frac{x^2}{2} + \dots = 4 \left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \dots \right).$$

L'ordre de chaque morceau, et l'économie à faire. Le facteur $2x$ est de valuation 1. D'après la règle de la question 1, il suffit donc de développer $\frac{1}{3+e^x}$ à l'ordre $3 - 1 = 2$. C'est un ordre gagné, et il ne faut pas le laisser passer : développer à l'ordre 3 serait du travail perdu, dont le dernier terme serait de toute façon jeté.

Le calcul. Posons $v = \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, de valuation 1. Alors $v^2 = \frac{x^2}{16} + o(x^2)$, et $v^3 = o(x^2)$, donc l'ordre 2 en v suffit :

$$\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{16} + o(x^2) = 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o(x^2).$$

En divisant par 4 :

$$\frac{1}{3 + e^x} = \frac{1}{4} - \frac{x}{16} - \frac{x^2}{64} + o(x^2).$$

La multiplication par $2x$, qui remonte chaque degré de 1 et transforme $o(x^2)$ en $o(x^3)$:

$$\frac{2x}{3 + e^x} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{32} + o(x^3). \quad \square$$

Le contrôle. Le terme constant est nul, comme il se doit puisque le numérateur s'annule en 0. Le coefficient de x vaut $\frac{1}{2}$, et l'on vérifie directement que la dérivée de $\frac{2x}{3+e^x}$ en 0 vaut $\frac{2 \times 4 - 0}{16} = \frac{1}{2}$. Numériquement, pour $x = 0,05$: 0,02468361 contre 0,02468359.

Partie C

6.a. *Un produit dont un facteur est de valuation 1.* Le facteur $\ln(1+2x)$ vaut 0 en 0 et son premier terme est $2x$: sa valuation est 1. Le facteur $\sqrt[3]{1+x}$ vaut 1 en 0 : valuation 0. Donc, pour l'ordre 3 :

$$\ln(1+2x) \text{ à l'ordre } \mathbf{3}, \quad \sqrt[3]{1+x} \text{ à l'ordre } \mathbf{2}.$$

Le terme en x^3 de $\sqrt[3]{1+x}$, multiplié par le terme $2x$, produirait un x^4 : il ne sert à rien.

6.b. *Le piège : il n'y a pas de développement limité.* Le numérateur $\operatorname{sh} x - x$ est de valuation 3, puisque $\operatorname{sh} x - x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. En divisant par x^5 , on obtient

$$\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^5} = \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120} + o(1),$$

expression qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0$. Or une fonction qui admet un développement limité d'ordre 0 en 0 a une limite finie en 0. **Cette expression n'admet donc aucun développement limité en 0, à aucun ordre**, et la question « à quel ordre développer » n'a pas de réponse.

Comment le voir immédiatement. On compare la valuation du numérateur, ici 3, à la puissance du dénominateur, ici 5. Si la valuation est **strictement inférieure**, le quotient explose. Ce test se fait de tête, avant tout calcul, et c'est la première chose à faire devant un quotient par x^p .

Ce que l'on peut écrire à la place. Un **développement asymptotique**, comme ci-dessus, qui commence par une puissance négative. Ce n'est pas un développement limité, et il ne faut pas l'appeler ainsi.

6.c. *Une composition avec un intérieur de valuation 2.* On pose $u = \sin^2 x$, de valuation 2 puisque $\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$.

Comme u^4 est de valuation 8, donc un $o(x^6)$, il suffit de développer $\ln(1+u)$ à l'ordre **3** en u . Et pour connaître u à l'ordre 6, il faut $\sin x$ à l'ordre **5**, son carré fournissant alors les termes jusqu'à x^6 (le sinus étant impair, l'ordre 6 ne donnerait rien de plus que l'ordre 5).

6.d. *Une différence qui se compense, puis une division.* La division par x^4 coûte 4 ordres, donc le numérateur doit être développé à l'ordre $2 + 4 = \mathbf{6}$, et il faut développer $\operatorname{ch} x$ **et** $\sqrt{1+x^2}$ à l'ordre 6.

Pourquoi cette expression, elle, a bien un développement limité. Les deux fonctions valent 1 en 0 et ont le même terme en x^2 , à savoir $\frac{x^2}{2}$: la différence est donc de valuation au moins 4, ce qui est exactement ce qu'il faut pour que la division par x^4 soit sans dommage. La compensation est ici une **bonne** nouvelle, contrairement au cas **b**.

Le piège à ne pas commettre. Développer les deux fonctions à l'ordre 4 seulement donnerait le terme constant du quotient et rien d'autre, alors qu'on demande l'ordre 2.

6.e. *Une composition avec un intérieur de valuation 1.* On pose $w = \operatorname{Arctan} x$, de valuation 1. Comme w^4 est un $o(x^3)$, il faut $(1+w)^{1/2}$ à l'ordre **3** en w , et $\operatorname{Arctan} x$ à l'ordre **3** en x .

La règle générale de la composition, telle qu'elle se lit sur les cinq exemples. Pour composer f avec u de valuation $v \geq 1$ et obtenir l'ordre n , il faut développer f à l'ordre $\lfloor n/v \rfloor$ et u à l'ordre n . Avec $v = 1$ on ne gagne rien ; avec $v = 2$ on divise l'ordre extérieur par deux, ce qui est le cas **c** ; avec $v \geq n + 1$, tout est déjà négligeable. $\square$

Commentaire. Cet exercice ne demande presque aucune connaissance et fait échouer plus de copies que les calculs les plus longs, parce qu'il porte sur une décision prise **avant** d'écrire quoi que ce soit.

Trois règles, et il n'y en a pas d'autres.

Pour un **produit**, l'ordre exigé de chaque facteur est l'ordre voulu diminué de la valuation de l'autre. C'est ce qui a fait gagner un ordre à la question **5.b** et rien du tout à la question **1**, la différence étant que $2x$ s'annule en 0 et que e^{-x} non.

Pour une **division par** x^p , il faut p ordres de plus au numérateur, et il faut d'abord vérifier que la valuation du numérateur atteint p , sans quoi il n'y a pas de développement limité du tout : c'est le sens de la question **6.b**.

Pour une **composition**, l'ordre exigé de la fonction extérieure est l'ordre voulu divisé par la valuation de la fonction intérieure, et l'ordre exigé de la fonction intérieure reste l'ordre voulu. La question **3** donne la seule chose qui manque d'ordinaire à ces règles : la preuve chiffrée que les enfreindre produit un résultat faux, et non simplement approximatif. Le coefficient -2 obtenu par le calcul tronqué n'est pas une version dégradée de $-\frac{14}{3}$: il est faux, et l'écart de $-\frac{8}{3}$ se retrouve terme par terme dans les deux produits oubliés.

Exercice 28 ★★★ Composer, et changer de variable

Notions : Opérations sur les développements limités : somme, produit, quotient, composition, changement de variable

Les développements limités du tableau des usuels sont tous écrits **en 0**. Deux opérations permettent de sortir de ce cadre : la **composition**, qui remplace x par une expression qui tend vers 0, et le **changement de variable** $x = a + h$, qui ramène un point quelconque en 0. Elles reposent sur la même idée et se rédigent de la même façon, à condition de dire à chaque fois quelle quantité tend vers 0.

Les développements limités en l'infini se traitent par un troisième changement de variable, et ils font l'objet de l'exercice 30.

Partie A. La règle de composition

1. Soit f admettant un développement limité d'ordre n en 0, et soit u une fonction définie au voisinage de 0. On veut le développement limité de $f \circ u$ en 0.

a. Pourquoi la condition $u(0) = 0$ est-elle nécessaire pour substituer $u(x)$ dans le développement de f ? On expliquera ce qui, dans l'écriture $o(u^n)$, cesse d'avoir un sens sinon.

b. Que faire lorsque $u(0) = b \neq 0$? Décrire la marche à suivre.

Partie B. Trois développements par composition

2. Déterminer les développements limités suivants, tous en 0. On écrira à chaque fois quelle est la quantité substituée et pourquoi elle tend vers 0.

a. $e^{\operatorname{Arctan} x}$ à l'ordre 3

b. $\sqrt{\operatorname{ch} x}$ à l'ordre 4

c. $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$ à l'ordre 5. Comparer le résultat au développement de $\sin$: que remarque-t-on, et à partir de quel ordre les deux fonctions se distinguent-elles?

Partie C. Trois développements en un point $a \neq 0$

3. Pour chacune des trois fonctions, écrire **explicitement** le changement de variable $x = a + h$, avec $h \rightarrow 0$, puis donner le développement limité demandé, en la variable h .

a. $\cos$ en $a = \frac{\pi}{6}$, à l'ordre 2

b. $\ln$ en $a = 3$, à l'ordre 3

c. $\sqrt{}$ en $a = 16$, à l'ordre 2

Dans les trois cas, effectuer le contrôle suivant : **le terme constant doit valoir $f(a)$, et le coefficient de h doit valoir $f'(a)$.**

4. *Le piège.* Une copie écrit, pour la question 3.b :

$$\ln x = \ln 3 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{81} + o(x^3).$$

Dire ce qui est faux, tester numériquement les deux écritures en $x = 3,1$, et énoncer ce qu'un développement limité en a est exactement : en quelle variable est son polynôme, et par rapport à quoi est écrit son reste?

Corrigé

Partie A

1.a. *Ce que dit le développement de f .* Écrire $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n + o(t^n)$ signifie que le reste est négligeable devant t^n **quand t tend vers 0**. Cette égalité n'a de contenu que dans un voisinage de 0 : c'est un énoncé local en 0, et rien d'autre.

Ce qui se passe quand on substitue. Remplacer t par $u(x)$ et faire tendre x vers 0 n'a de sens que si $u(x)$ tend vers 0, c'est-à-dire, u étant supposée continue en 0, si $u(0) = 0$. Sans cela, $u(x)$ se promène au voisinage de $b = u(0) \neq 0$, région dans laquelle le développement de f en 0 ne dit **rien** : le symbole $o(u(x)^n)$ n'y est pas défini, puisqu'il est indexé sur une limite qui n'a pas lieu.

Un exemple qui montre l'absurdité. Prenons $f(t) = \frac{1}{1-t}$, dont le développement en 0 est $1 + t + t^2 + o(t^2)$, et $u(x) = 2 + x$. La substitution naïve donnerait

$$\frac{1}{1-(2+x)} = 1 + (2+x) + (2+x)^2 + o((2+x)^2),$$

soit un membre de gauche égal à $\frac{1}{-1-x}$, qui vaut -1 en $x = 0$, contre un membre de droite qui vaut $1 + 2 + 4 = 7$ en $x = 0$. L'égalité est fausse dès le terme constant. $\square$

1.b. *La marche à suivre quand $u(0) = b \neq 0$.* Il faut faire apparaître une quantité qui tend vers 0, et il y a deux façons de s'y prendre.

- **Utiliser le développement de f en b** et non en 0. On écrit $f(u(x)) = f(b + v(x))$ avec $v(x) = u(x) - b$, qui tend bien vers 0, et l'on substitue $v(x)$ dans le développement de f **au point b** . Cela suppose de disposer de ce développement, ce qui est l'objet de la partie C.
- **Factoriser par b** , quand la forme de f le permet. C'est ce qu'on a fait à l'exercice 27, question 5 : $\frac{1}{2 + \sin x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{2}}$, où l'expression $\frac{\sin x}{2}$ tend vers 0. Le procédé marche pour les puissances et les inverses, et pour le logarithme via $\ln(b + w) = \ln b + \ln(1 + \frac{w}{b})$.

Dans les deux cas, la règle unique. **On n'écrit jamais un développement limité en 0 sans avoir dit quelle quantité tend vers 0.** Cette phrase doit figurer dans la copie.

Partie B

2.a. *La quantité substituée.* On pose $u = \text{Arctan } x$. Cette fonction est continue en 0 avec $\text{Arctan } 0 = 0$, donc $u \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$: la substitution dans le développement de e^u est licite. *Les ordres.* La valuation de u vaut 1, donc il faut e^u à l'ordre 3 en u et $\text{Arctan } x$ à l'ordre 3 en x :

$$u = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad u^2 = x^2 + o(x^3), \quad u^3 = x^3 + o(x^3),$$

le terme croisé du carré, $2 \times x \times (-\frac{x^3}{3})$, étant de degré 4.

Le calcul.

$$\begin{aligned} e^{\text{Arctan } x} &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \end{aligned}$$

puisque $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$. $\square$

Le contrôle. Le terme constant vaut $e^0 = 1$. Le coefficient de x doit valoir la dérivée en 0, soit $\frac{e^{\operatorname{Arctan} 0}}{1+0^2} = 1$: c'est bien 1. Numériquement, pour $x = 0,02$, la valeur exacte est 1,02019862 et le polynôme donne 1,02019867.

2.b. *La quantité substituée.* On pose $u = \operatorname{ch} x - 1$, qui tend vers 0 puisque $\operatorname{ch} 0 = 1$, et l'on écrit $\sqrt{\operatorname{ch} x} = \sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2}$.

Les ordres. La valuation de u est 2, car $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. Comme u^3 est de valuation 6, donc un $o(x^4)$, il suffit de développer $(1+u)^{1/2}$ à l'ordre 2 en u , et u à l'ordre 4 en x . C'est l'économie annoncée par la règle de composition : l'ordre extérieur est divisé par la valuation intérieure.

Le calcul. Avec $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$ et $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\operatorname{ch} x} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) - \frac{1}{8} \times \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{4} + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} \right) x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4),\end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{48} - \frac{1}{32} = \frac{2-3}{96} = -\frac{1}{96}$. $\square$

Le contrôle de parité. La fonction ch est paire, donc $\sqrt{\operatorname{ch}}$ aussi, et le développement obtenu ne contient que des puissances paires. Numériquement, pour $x = 0,05$: 1,00062493 des deux côtés.

2.c. *La quantité substituée.* On pose $u = \operatorname{sh} x$, qui tend vers 0 puisque $\operatorname{sh} 0 = 0$, de valuation 1. Il faut donc Arctan à l'ordre 5 et sh à l'ordre 5 :

$$u = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Les puissances de u . On calcule u^3 en factorisant x^3 , ce qui évite un développement du cube :

$$u^3 = x^3 \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^3 = x^3 \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5),$$

et $u^5 = x^5 + o(x^5)$.

Le calcul. Avec $\operatorname{Arctan} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$:

$$\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) - \frac{1}{3} \left(x^3 + \frac{x^5}{2} \right) + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

Coefficient de x^3 : $\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$. Coefficient de x^5 :

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1-20+24}{120} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}.$$

D'où

$$\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + o(x^5). \quad \square$$

La comparaison avec le sinus. Le tableau donne

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Les deux développements **coïncident jusqu'à l'ordre 4 inclus** : les deux fonctions ont même valeur, même dérivée, mêmes dérivées jusqu'à l'ordre 4 en 0. Elles se distinguent **à l'ordre 5**, avec $\frac{1}{24}$ contre $\frac{1}{120}$, soit un rapport 5.

Ce que cette coïncidence enseigne. Deux fonctions différentes peuvent avoir le même développement limité jusqu'à un ordre élevé. Un développement limité ne caractérise donc pas une fonction : il ne dit qu'une chose, le comportement au voisinage du point, et jusqu'à l'ordre où l'on s'arrête. Pour distinguer $\text{Arctan} \circ \text{sh}$ de $\sin$ au voisinage de 0, il faut aller à l'ordre 5 ; aucun calcul d'ordre inférieur ne pouvait y parvenir.

Partie C

3.a. *Le changement de variable.* On pose $x = \frac{\pi}{6} + h$, donc $h = x - \frac{\pi}{6}$, et $h \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$. *L'expression à développer.* La formule d'addition donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + h\right) = \cos\frac{\pi}{6} \cos h - \sin\frac{\pi}{6} \sin h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos h - \frac{1}{2} \sin h.$$

Les deux fonctions $\cos$ et $\sin$ sont maintenant évaluées en h , qui tend vers 0 : les développements usuels s'appliquent.

Le calcul, à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6} + h\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) - \frac{1}{2}(h) + o(h^2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Le contrôle. Le terme constant vaut $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$: correct. Le coefficient de h vaut $-\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \cos'\left(\frac{\pi}{6}\right)$: correct. $\square$

3.b. *Le changement de variable.* On pose $x = 3 + h$, donc $h = x - 3$, et $h \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 3$. *La factorisation, pour faire apparaître une quantité qui tend vers 0.*

$$\ln(3 + h) = \ln\left(3\left(1 + \frac{h}{3}\right)\right) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right),$$

la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ étant licite puisque $3 > 0$ et, pour h assez petit, $1 + \frac{h}{3} > 0$.

Le calcul, à l'ordre 3. On substitue $u = \frac{h}{3}$, qui tend vers 0, dans $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$:

$$\ln(3 + h) = \ln 3 + \frac{h}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{h^2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{h^3}{27} + o(h^3) = \ln 3 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{18} + \frac{h^3}{81} + o(h^3).$$

Le contrôle. Le terme constant vaut $\ln 3$: correct. Le coefficient de h vaut $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, et la dérivée du logarithme en 3 vaut bien $\frac{1}{3}$: correct. $\square$

3.c. *Le changement de variable.* On pose $x = 16 + h$, donc $h = x - 16$, et $h \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 16$. *La factorisation.*

$$\sqrt{16 + h} = \sqrt{16\left(1 + \frac{h}{16}\right)} = 4\sqrt{1 + \frac{h}{16}},$$

licite car $16 > 0$ et $1 + \frac{h}{16} > 0$ pour h assez petit.

Le calcul, à l'ordre 2. Avec $u = \frac{h}{16}$ et $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$:

$$\sqrt{16+h} = 4 \left(1 + \frac{h}{32} - \frac{1}{8} \times \frac{h^2}{256} \right) + o(h^2) = 4 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{512} + o(h^2).$$

Le contrôle. Le terme constant vaut $4 = \sqrt{16}$: correct. Le coefficient de h vaut $\frac{1}{8}$, et la dérivée de la racine en 16 vaut $\frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$: correct. $\square$

Méthode

Le contrôle en deux lignes, à faire systématiquement. Sur tout développement limité en un point a , on vérifie que le terme constant vaut $f(a)$ et que le coefficient de h vaut $f'(a)$. Ces deux nombres se calculent indépendamment du développement, donc ils le contrôlent réellement. Ils attrapent la quasi-totalité des erreurs de substitution, et ils coûtent trente secondes.

4. Ce qui est faux. Le polynôme écrit est en puissances de x , alors que le développement établi à la question **3.b** est en puissances de $h = x - 3$. La copie a **remplacé h par x** , ce qui n'est pas une réécriture mais un changement de fonction.

Le test numérique en $x = 3,1$. Ici $h = 0,1$, et l'on compare trois nombres.

Quantité	Valeur
$\ln(3,1)$, valeur exacte	1,13140211
Développement en h , avec $h = 0,1$	1,13140241
Écriture de la copie, avec $x = 3,1$	1,96584686

Le développement correct donne le bon résultat à 3×10^{-7} près, ce qui est cohérent avec un reste en $h^4 = 10^{-4}$ affecté d'un coefficient petit. L'écriture de la copie se trompe de 0,83, soit une erreur de 73 pour cent : elle n'est pas imprécise, elle est fautive.

Pourquoi elle est fautive, en une phrase. Parce que $x = 3,1$ n'est pas petit. La variable qui tend vers 0 est h , et c'est à elle seule que le symbole o se rapporte. Remplacer h par x fait dire au reste qu'il est négligeable devant x^3 quand x tend vers 0, ce qui est un énoncé sur le voisinage de 0 et non sur le voisinage de 3.

La définition, telle qu'il faut la retenir. Un développement limité d'ordre n de f **au point a** est une égalité de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{quand } x \rightarrow a,$$

donc : son polynôme est en puissances de $(x-a)$, et son reste est négligeable devant $(x-a)^n$ quand x tend vers a . Les deux vont ensemble, et changer l'un sans l'autre produit un énoncé sans rapport avec la fonction.

Une variante de la même faute, également à éviter. Développer les $(x-3)^k$ pour « simplifier » et obtenir un polynôme en x :

$$\ln x \approx \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \frac{(x-3)^3}{81}.$$

Cette fois le polynôme obtenu est correct, puisqu'on n'a fait que développer une expression exacte. Mais le reste, lui, reste un $o((x-3)^3)$ et non un $o(x^3)$, et l'expression obtenue n'est **plus un développement limité en 0** : c'est le même développement en 3, écrit sous une forme où sa nature est devenue invisible. On perd le contrôle du terme constant et du coefficient dominant, donc on perd le contrôle tout court. $\square$

Commentaire. Les deux opérations de cet exercice sont la même, et le voir fait gagner du temps.

Composer, c'est substituer une quantité qui tend vers 0 dans un développement écrit en 0. Changer de variable en a , c'est substituer $h = x - a$, qui tend vers 0 par définition. Dans les deux cas, la seule question à se poser avant d'écrire quoi que ce soit est : **quelle est la quantité qui tend vers 0, et l'ai-je nommée ?** Les fautes de la question **1.a** et de la question **4** sont exactement les deux façons de ne pas se la poser.

Le reste est de la comptabilité d'ordres, gouvernée par la valuation, et la question **2.b** en montre le bénéfice : parce que $\ln x - 1$ est de valuation 2, l'ordre 4 demandé n'exige que l'ordre 2 sur la racine, donc trois termes au lieu de cinq.

La question **2.c** ajoute un avertissement qui vaut pour tout le chapitre. Le développement de $\text{Arctan} \circ \text{sh}$ est celui de $\sin$ jusqu'à l'ordre 4, et les deux fonctions sont pourtant distinctes. Un développement limité est un instrument de **mesure locale à précision finie** : il ne prouve jamais une égalité de fonctions. Il existe même des fonctions non identiquement nulles dont tous les développements limités en 0, à tous les ordres, sont nuls, et qu'aucun calcul de développement ne pourra donc distinguer de la fonction nulle.

Exercice 29 ★★ Huit limites, avec le diagnostic d'ordre avant le calcul

Notions : Applications des développements limités : limites, équivalents, tangente et position, asymptotes

Une limite par développement limité se calcule en deux temps, et l'ordre des deux temps décide de tout. On commence par **diagnostiquer** l'ordre auquel développer, en regardant la structure de l'expression ; puis on calcule. Une copie qui inverse les deux passe son temps à recommencer, parce qu'un ordre trop court redonne une forme indéterminée et qu'un ordre trop long fabrique des termes inutiles où l'on se trompe.

Partie A. Huit limites

Voici les huit expressions. La variable tend vers 0, sauf pour la huitième, où elle tend vers $\frac{\pi}{2}$.

a. $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$

e. $\frac{\cos(2x) - \cos^2 x}{x^2}$

b. $\frac{\ln(1+x) \ln(1-x)}{x^2}$

f. $\frac{(1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2}$

c. $\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} - 2x}{x^3}$

g. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$

d. $\frac{\operatorname{Arctan}(2x) - 2 \operatorname{Arctan} x}{x^3}$

h. $\frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$

1. *Diagnostic seul.* Pour chacune des huit expressions, dire **à quel ordre développer**, et pourquoi, **sans calculer la limite**. On donnera pour chaque cas la valuation attendue du numérateur et le nombre d'ordres coûtés par le dénominateur.

2. Calculer les huit limites, et vérifier à chaque fois que le diagnostic de la question 1 était le bon : si un terme calculé n'a servi à rien, l'ordre était trop grand ; si l'on a dû recommencer, il était trop petit.

3. *Un ordre trop court.* On considère

$$\frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{x^4} \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

Développer d'abord le numérateur à l'ordre 2 et dire précisément ce que l'on obtient. Puis reprendre à l'ordre correct.

Partie B. Un paramètre à déterminer

4. Déterminer le réel a pour lequel l'expression

$$\frac{e^x - 1 - ax}{x^2}$$

admet une limite **finie** quand x tend vers 0, et donner alors cette limite.

5. Que se passe-t-il si a est mal choisi ? On décrira le comportement de l'expression à droite et à gauche de 0, et l'on dira pourquoi il serait faux d'écrire « la limite est indéterminée ».

Corrigé**Partie A**

1. *Le principe du diagnostic.* On lit deux nombres sur l'expression.

— La **puissance du dénominateur**, disons x^p : elle coûte p ordres, comme l'exercice 27 l'a établi.

- La **valuation attendue du numérateur** : si l'expression a une limite finie non nulle, cette valuation vaut exactement p , et il suffit alors de développer le numérateur à l'ordre p . Si l'on veut en plus le terme suivant, on développe à l'ordre $p + 1$ ou $p + 2$.

Pour une **limite**, l'ordre minimal est donc p , et le seul travail de diagnostic consiste à prévoir que la valuation du numérateur vaut bien p , c'est-à-dire que les termes de degré inférieur se détruisent.

a. Dénominateur x^3 , donc ordre 3. Le numérateur vaut $2\operatorname{sh} x - 2x$, dont les termes de degré 0 et 1 se détruisent, la fonction sh étant impaire de dérivée 1 en 0 : sa valuation est 3. **Ordre 3 sur chaque exponentielle.**

b. Dénominateur x^2 , donc ordre 2 sur le produit. Mais les deux facteurs sont de valuation 1 chacun, donc leur produit est de valuation 2 : d'après la règle du produit, il suffit de développer **chaque facteur à l'ordre 1**. C'est le seul cas des huit où l'ordre 1 suffit, et c'est parce que la compensation n'a pas lieu dans une somme mais dans un produit.

c. Dénominateur x^3 , donc ordre 3 sur les deux racines. On prévoit que les termes de degré 0, 1 et 2 se détruisent : les termes constants se retranchent, les termes en x s'ajoutent pour donner $2x$ que le $-2x$ annule, et les termes en x^2 sont identiques dans les deux racines donc se retranchent. **Ordre 3.**

d. Dénominateur x^3 , donc ordre 3 sur les deux arctangentes. Les termes en x valent $2x$ et $2x$, donc se détruisent. **Ordre 3.**

e. Dénominateur x^2 , donc ordre 2 au numérateur. Les termes constants valent 1 et 1. **Ordre 2.**

f. Dénominateur x^2 , donc ordre 2 sur $(1+x)^{1/3}$. Les termes de degré 0 et 1 sont retranchés explicitement par l'énoncé. **Ordre 2.**

g. Il faut d'abord **réunir en un seul quotient** :

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x}.$$

Le dénominateur est équivalent à x^4 , il coûte donc 4 ordres, et il faut le numérateur à l'ordre 4, c'est-à-dire $\tan^2 x$ à l'ordre 4, c'est-à-dire $\tan x$ **à l'ordre 3**. C'est le cas où le diagnostic est le plus utile, car la forme initiale ne montre aucun dénominateur en puissance de x .

h. Le point n'est pas 0 : on pose $x = \frac{\pi}{2} + h$ avec $h \rightarrow 0$, ce qui met le dénominateur sous la forme h^2 . Il coûte 2 ordres, et il faut le numérateur à l'ordre 2 en h . **Ordre 2 après changement de variable.** $\square$

Récapitulatif du diagnostic.

Expression	Dénominateur	Ordres coûtés	Valuation attendue du numérateur	Ordre à développer
a	x^3	3	3	3
b	x^2	2	2	1 sur chaque facteur
c	x^3	3	3	3
d	x^3	3	3	3
e	x^2	2	2	2
f	x^2	2	2	2
g	$x^2 \tan^2 x \sim x^4$	4	4	3 sur $\tan$
h	h^2	2	2	2 en h

2.a. Le numérateur vaut $2\operatorname{sh} x - 2x$, et le développement de sh à l'ordre 3 donne

$$e^x - e^{-x} - 2x = 2 \left(x + \frac{x^3}{6} \right) - 2x + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

En divisant par x^3 :

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}. \quad \square$$

Le diagnostic était juste : l'ordre 3 a fourni le premier terme non nul, ni plus ni moins.

2.b. Avec $\ln(1+x) = x + o(x)$ et $\ln(1-x) = -x + o(x)$, le produit vaut

$$\ln(1+x)\ln(1-x) = (x + o(x))(-x + o(x)) = -x^2 + o(x^2),$$

d'où

$$\frac{\ln(1+x)\ln(1-x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1. \quad \square$$

Le point de méthode. Développer chaque logarithme à l'ordre 2 aurait été une perte de temps pure : les termes en x^2 de chaque facteur, multipliés par le terme en x de l'autre, ne produisent que du x^3 . C'est la seule des huit limites où l'ordre à développer est strictement inférieur à la puissance du dénominateur, et c'est la règle du produit qui l'explique.

2.c. Le développement de $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$, substitué en $u = 2x$ puis en $u = -2x$, donne

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3),$$

$$\sqrt{1-2x} = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3),$$

les coefficients étant $\frac{2x}{2} = x$, puis $-\frac{4x^2}{8} = -\frac{x^2}{2}$, puis $\frac{8x^3}{16} = \frac{x^3}{2}$. La différence fait disparaître les termes pairs et double les termes impairs :

$$\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} = 2x + x^3 + o(x^3),$$

donc le numérateur vaut $x^3 + o(x^3)$ et

$$\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} - 2x}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1. \quad \square$$

Le raccourci de parité. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}$ est impaire : son développement ne pouvait contenir que des puissances impaires, et il était inutile de calculer les termes en x^2 pour savoir qu'ils allaient disparaître.

2.d. Avec $\text{Arctan } u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$:

$$\text{Arctan}(2x) = 2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3), \quad 2 \text{Arctan } x = 2x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

La différence vaut

$$-\frac{8x^3}{3} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3) = -2x^3 + o(x^3),$$

d'où une limite égale à -2 . $\square$ *Ce que ce résultat dit.* La quantité $\text{Arctan}(2x) - 2 \text{Arctan } x$ n'est pas nulle, alors que ses termes d'ordre 1 coïncident : l'arctangente n'est pas linéaire, et le calcul mesure exactement de combien elle s'en écarte au premier ordre où cela se voit.

2.e. L'exercice 27, question 4, a établi le développement complet de cette expression :

$$\frac{\cos(2x) - \cos^2 x}{x^2} = -1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Pour la seule limite, l'ordre 2 au numérateur suffisait :

$$\cos(2x) - \cos^2 x = (1 - 2x^2) - (1 - x^2) + o(x^2) = -x^2 + o(x^2),$$

d'où une limite égale à -1 . $\square$

2.f. Le coefficient de u^2 dans $(1+u)^\alpha$ vaut $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, soit pour $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2} = \frac{\frac{1}{3} \times (-\frac{2}{3})}{2} = -\frac{1}{9}.$$

Donc $(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$, le numérateur vaut $-\frac{x^2}{9} + o(x^2)$, et

$$\frac{(1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{9}. \quad \square$$

2.g. La réunion en un quotient, comme annoncé au diagnostic :

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x}.$$

Cette écriture a un sens pour x non nul assez petit, la tangente ne s'annulant qu'en 0 au voisinage de 0.

Le numérateur. Avec $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, on factorise avant d'élever au carré :

$$\tan^2 x = x^2 \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 = x^2 \left(1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)\right) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4),$$

d'où $\tan^2 x - x^2 = \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$.

Le dénominateur. De la même façon, $x^2 \tan^2 x = x^4 + o(x^4)$, expression équivalente à x^4 .

Le quotient.

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}. \quad \square$$

Ce qu'il fallait absolument faire. Réunir les deux fractions **avant** de développer. Développer chacune séparément conduit à $\frac{1}{x^2}$ moins $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} + o(1)$, ce qui donne le bon résultat mais fait manipuler des expressions qui ne sont pas des développements limités, puisqu'elles ne sont pas bornées en 0. C'est faisable, mais avec un formalisme de développement asymptotique que la réunion en un quotient évite.

2.h. *Le changement de variable.* On pose $x = \frac{\pi}{2} + h$, avec $h \rightarrow 0$. Alors

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \cos h,$$

et le dénominateur devient h^2 . L'expression s'écrit donc

$$\frac{1 - \cos h}{h^2}.$$

Le développement. À l'ordre 2, $\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$, donc $1 - \cos h = \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ et

$$\frac{1 - \sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{2}. \quad \square$$

Ce que le résultat signale. La quantité $1 - \sin x$ est positive au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ et s'annule en ce point à l'ordre 2, ce qui est la traduction analytique du fait que $\frac{\pi}{2}$ est un maximum du sinus, avec tangente horizontale.

3. Le numérateur à l'ordre 2. On a

$$\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad \sin^2 x = x^2 + o(x^2),$$

donc leur différence est $o(x^2)$, et l'expression devient

$$\frac{o(x^2)}{x^4} = \frac{o(x^2)}{x^2} \times \frac{1}{x^2}.$$

On n'a rien appris. Le numérateur est un $o(x^2)$, mais un $o(x^2)$ peut valoir x^3 , x^4 , $x^{2,5}$ ou n'importe quoi de plus petit que x^2 : divisé par x^4 , il peut tendre vers 0, vers une limite finie, ou vers l'infini. L'ordre 2 redonne donc une forme indéterminée, et il ne dit même pas si la limite existe.

L'ordre correct. Le dénominateur x^4 coûte 4 ordres, il faut donc le numérateur à l'ordre 4 :

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

en substituant x^2 dans $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, et

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1 - (1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4)}{2} + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

La différence et la limite.

$$\ln(1+x^2) - \sin^2 x = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4),$$

d'où

$$\frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}. \quad \square$$

La leçon. Un ordre trop court ne donne pas un résultat approximatif : il ne donne **aucun** résultat. Le symbole o absorbe précisément l'information dont on a besoin, et c'est la raison pour laquelle le diagnostic de la question 1 se fait avant, et non après.

Partie B

4. Le développement du numérateur. À l'ordre 3, pour voir venir :

$$e^x - 1 - ax = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - 1 - ax + o(x^3) = (1-a)x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

La division. En divisant par x^2 :

$$\frac{e^x - 1 - ax}{x^2} = \frac{1-a}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o(x).$$

La condition. Les deuxième et troisième termes tendent vers $\frac{1}{2}$ et 0. Le premier, $\frac{1-a}{x}$, n'a de limite finie en 0 que s'il est identiquement nul, c'est-à-dire si

$$1-a=0, \quad \text{soit} \quad a=1.$$

Réciproquement, pour $a=1$, l'expression vaut $\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o(x)$ et

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Conclusion. L'unique valeur convenable est $a = 1$, et la limite est alors $\frac{1}{2}$. $\square$

La lecture structurelle, à préférer au calcul. Pour que le quotient par x^2 ait une limite finie, il faut et il suffit que le numérateur soit de valuation au moins 2. Or le terme de degré 1 du numérateur est $(1 - a)x$: la condition est exactement son annulation. Vue ainsi, la question ne demande aucun développement au-delà de l'ordre 1, et le calcul à l'ordre 3 n'a servi qu'à obtenir la valeur de la limite en prime.

5. *Le comportement pour $a \neq 1$.* Posons $\lambda = 1 - a \neq 0$. Alors

$$\frac{e^x - 1 - ax}{x^2} = \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{2} + o(1),$$

donc l'expression est **équivalente à** $\frac{\lambda}{x}$ au voisinage de 0. Les deux limites latérales sont donc infinies et **de signes opposés** :

- si $\lambda > 0$, c'est-à-dire $a < 1$, l'expression tend vers $+\infty$ en 0^+ et vers $-\infty$ en 0^- ;
- si $\lambda < 0$, c'est-à-dire $a > 1$, les deux signes sont échangés.

Dans tous les cas, $\left| \frac{e^x - 1 - ax}{x^2} \right| \rightarrow +\infty$, et la limite en 0 **n'existe pas dans** $\mathbb{R}$, faute d'égalité des deux limites latérales.

Pourquoi « la limite est indéterminée » serait faux. Le mot « indéterminée » qualifie une **forme d'écriture**, du type $\frac{0}{0}$ ou $\infty - \infty$, c'est-à-dire une situation où le calcul de limite par opérations ne conclut pas et où il faut travailler davantage. Ce n'est pas un résultat.

Ici, au contraire, on a **conclu** : le comportement est parfaitement déterminé, l'expression est équivalente à $\frac{\lambda}{x}$, elle tend vers $+\infty$ d'un côté et vers $-\infty$ de l'autre, et l'on sait exactement pourquoi. Dire « indéterminée » revient à présenter un résultat comme un échec de méthode. La rédaction correcte est : « pour $a \neq 1$, l'expression est équivalente à $\frac{1-a}{x}$ en 0, donc elle n'admet pas de limite en 0, ses deux limites latérales étant infinies de signes contraires. » $\square$

Le vocabulaire, une fois pour toutes. Une forme est indéterminée avant le calcul ; une limite est finie, infinie, ou inexistante après. Les deux mots n'appartiennent pas au même moment du raisonnement.

Commentaire. Le geste que cet exercice installe est le diagnostic préalable, et son intérêt se mesure sur les huit cas.

Six d'entre eux se traitent à l'ordre égal à la puissance du dénominateur, ce qui est le cas ordinaire. Le cas **b** montre qu'un produit permet de descendre **au-dessous** de cet ordre, parce que les valuations des deux facteurs s'additionnent : développer chaque logarithme à l'ordre 2 n'aurait rien apporté. Le cas **g** montre qu'une expression sans dénominateur apparent en peut cacher un de degré 4, et qu'il faut réunir les fractions avant de compter les ordres. Le cas **h** rappelle que le point n'est pas toujours 0, et que le changement de variable est le premier geste, avant tout développement.

La question **3** donne la contrepartie négative, et c'est elle qui justifie la démarche : quand l'ordre est trop court, on n'obtient pas un résultat imprécis, on n'obtient rien du tout, et l'on peut passer un temps considérable à chercher l'erreur dans un calcul qui est correct mais insuffisant. La partie **B** est un exercice de partiel classique dont la structure est celle du diagnostic pur : la condition cherchée est exactement « la valuation du numérateur atteint 2 », donc elle se lit sur le coefficient de x , sans développer plus loin. Et la question **5** corrige un abus de langage fréquent : une limite infinie est un résultat, pas une indétermination.

Exercice 30 ★★★ Branches infinies : asymptote, ou parabolique ?

Notions : Applications des développements limités : limites, équivalents, tangente et position, asymptotes

Une courbe qui part à l'infini le fait de plusieurs manières, et le développement limité en dit la nature exacte. Attention, la recette « on calcule $f(x) - mx - p$ » ne s'applique qu'après avoir vérifié qu'il y a bien une asymptote : deux des quatre fonctions ci-dessous n'en ont pas au sens où on l'attend, et c'est ce qui fait l'intérêt de l'exercice.

1. *Question de méthode.* Pour étudier une fonction au voisinage de $+\infty$, on pose $x = \frac{1}{t}$. Pourquoi ce changement de variable, et non un autre ? Que devient le voisinage de $+\infty$, et quel signe faut-il donner à t ?

2. Pour chacune des quatre fonctions suivantes, étudier la branche infinie **en** $+\infty$, puis en $-\infty$ chaque fois que le domaine le permet. On demande, dans cet ordre :

- la nature de la branche infinie ;
- l'équation de l'asymptote s'il y en a une ;
- la **position de la courbe par rapport à cette asymptote**, donnée par le terme suivant du développement.

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$

c. $k(x) = \sqrt{4x^2 + x}$

b. $g(x) = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$

d. $h(x) = x + \sqrt{x}$

3. Classer les quatre fonctions par nature de branche infinie en $+\infty$, puis énoncer le **critère** qui permet de trancher avant tout calcul de terme suivant.

Corrigé

1. *Pourquoi $x = \frac{1}{t}$.* Toute la théorie des développements limités est locale **en un point fini** : la définition compare le reste à une puissance de $(x-a)$, ce qui exige que $x-a$ tende vers 0. L'infini n'est pas un point, et $\frac{1}{x}$ n'est pas une puissance de quoi que ce soit qui tende vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. Il n'existe donc aucun développement limité « en $+\infty$ » au sens de la définition.

Ce que fait le changement de variable. Il transporte le problème là où les outils existent. Poser $x = \frac{1}{t}$, c'est-à-dire $t = \frac{1}{x}$, envoie le voisinage de $+\infty$ sur un **voisinage de 0 à droite** : quand

x parcourt $]A, +\infty[$ avec $A > 0$, la variable t parcourt $]0, \frac{1}{A}[$. On étudie alors $t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ au voisinage de 0^+ avec les développements usuels, et l'on revient à x à la fin.

Le signe de t . Il est **strictement positif** dans l'étude en $+\infty$, et strictement négatif dans l'étude en $-\infty$. Ce signe n'est pas un détail : c'est lui qui décide de la position de la courbe par rapport à son asymptote, puisqu'il donne le signe du terme suivant du développement. C'est aussi lui qui interdit de traiter les deux infinis d'un seul calcul quand une racine carrée est en jeu, comme les cas **a** et **c** vont le montrer.

Le geste préalable, systématique. On factorise l'expression par son terme dominant avant de développer. C'est ce qui fait apparaître une quantité qui tend vers 0, condition de toute substitution.

2.a. *Le domaine.* Pour tout réel x , on a $x^2 + 4 > 0$: la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. *L'étude en $+\infty$.* On factorise sous la racine par x^2 , puis on sort $\sqrt{x^2} = |x| = x$, licite car $x > 0$:

$$\sqrt{x^2 + 4} = x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}.$$

La quantité $u = \frac{4}{x^2}$ tend vers 0, donc on substitue dans $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$:

$$\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

le coefficient du second terme valant $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ et celui du troisième $-\frac{1}{8} \times 16 = -2$. En multipliant par x :

$$\sqrt{x^2 + 4} = x + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

d'où

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

La nature de la branche. On lit $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. La courbe admet donc une **asymptote horizontale**, d'équation

$$y = 0.$$

La position. On a $f(x) - 0 = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, quantité **strictement positive** pour x assez grand : la courbe est **au-dessus** de son asymptote en $+\infty$.

Le piège de l'exercice. Un étudiant qui applique la recette de l'asymptote oblique calcule $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$, puis se demande quelle est la valeur de p dans $y = 0 \cdot x + p$, et se trouve désorienté. Il n'y a pas d'asymptote oblique ici, parce que la fonction **elle-même** a une limite finie : c'est le cas le plus simple, et la recette générale le contient, avec $m = 0$ et $p = 0$. Le réflexe correct est de commencer par chercher la limite de f , et non celle de $\frac{f(x)}{x}$.

L'étude en $-\infty$, où tout change. Cette fois $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, puisque $x < 0$. Donc

$$\sqrt{x^2 + 4} = -x \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) = -x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

et

$$f(x) = -2x - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe admet donc, en $-\infty$, une **asymptote oblique** d'équation

$$y = -2x.$$

Et $f(x) - (-2x) = -\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, quantité **positive** puisque $x < 0$: la courbe est **au-dessus** de son asymptote en $-\infty$ aussi. $\square$

Remarque

Une même courbe peut avoir une asymptote horizontale d'un côté et une asymptote oblique de l'autre. C'est ici la conséquence directe du $|x|$ caché dans la racine, et c'est la raison pour laquelle **on n'écrit jamais $\sqrt{x^2} = x$ sans avoir précisé le signe de x** . Sur cette fonction, l'oubli change la nature de la branche, pas seulement sa position.

Le contrôle numérique. Pour $x = 1000$, la valeur exacte est $f(1000) = 0,00199999 \dots$ et $\frac{2}{x} = 0,002$: l'accord confirme le développement en $+\infty$. Pour $x = -1000$, on trouve $f(-1000) = 2000,002000$ et $-2x - \frac{2}{x} = 2000,002000$.

2.b. Le domaine. Il faut $e + \frac{1}{x} > 0$, soit $\frac{1}{x} > -e$. Pour $x > 0$ c'est immédiat ; pour $x < 0$ cela équivaut à $x < -\frac{1}{e}$. La fonction g est donc définie sur $\left] -\infty, -\frac{1}{e} \right[\cup]0, +\infty[$, et les deux infinis sont dans le domaine.

Le développement en $+\infty$. On extrait la constante du logarithme, ce qui est le geste analogue à la factorisation par le terme dominant :

$$\ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = \ln \left(e \left(1 + \frac{1}{ex} \right) \right) = 1 + \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right),$$

licite puisque $e > 0$ et que le second facteur est positif sur le domaine. La quantité $u = \frac{1}{ex}$ tend vers 0, donc

$$\ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) = \frac{1}{ex} - \frac{1}{2e^2x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

En multipliant par x :

$$g(x) = x + \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2x} + o \left(\frac{1}{x} \right).$$

La nature de la branche. Le développement fait apparaître la partie affine $x + \frac{1}{e}$ suivie d'un terme qui tend vers 0 : la courbe admet une **asymptote oblique** d'équation

$$y = x + \frac{1}{e}.$$

La position. On a $g(x) - \left(x + \frac{1}{e} \right) = -\frac{1}{2e^2x} + o \left(\frac{1}{x} \right)$. Pour $x > 0$, cette quantité est **négative** : la courbe est **au-dessous** de son asymptote en $+\infty$.

En $-\infty$. Le calcul est identique, aucun $|x|$ n'intervenant, et le développement reste valable. La même asymptote $y = x + \frac{1}{e}$ convient, mais la position s'inverse : pour $x < 0$, la quantité $-\frac{1}{2e^2x}$ est **positive**, donc la courbe est **au-dessus** de son asymptote en $-\infty$. $\square$

Ce que cette inversion enseigne. Une asymptote peut être la même des deux côtés sans que la position le soit. La position est donnée par le **signe** du terme suivant, donc par le signe d'une puissance impaire de $\frac{1}{x}$, qui change avec celui de x . Un terme suivant en $\frac{1}{x^2}$, lui, donnerait la même position des deux côtés.

Le contrôle numérique. Pour $x = 1000$, on trouve $g(1000) = 1000,36781179$ et $x + \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2x} = 1000,36781177$.

2.c. Le domaine. Il faut $4x^2 + x \geq 0$, c'est-à-dire $x(4x + 1) \geq 0$, soit

$$x \in \left] -\infty, -\frac{1}{4} \right] \cup [0, +\infty[.$$

Les deux infinis sont dans le domaine.

Le développement en $+\infty$. On factorise par le terme dominant $4x^2$ et l'on sort $\sqrt{4x^2} = 2|x| = 2x$, licite car $x > 0$:

$$k(x) = 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}.$$

Avec $u = \frac{1}{4x} \rightarrow 0$ et $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = 1 + \frac{1}{8x} - \frac{1}{128x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right),$$

le troisième coefficient valant $-\frac{1}{8} \times \frac{1}{16} = -\frac{1}{128}$. En multipliant par $2x$:

$$k(x) = 2x + \frac{1}{4} - \frac{1}{64x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La nature, l'asymptote, la position. La courbe admet une **asymptote oblique** d'équation

$$y = 2x + \frac{1}{4},$$

et $k(x) - \left(2x + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est **négatif** pour $x > 0$: la courbe est **au-dessous** de son asymptote en $+\infty$.

L'étude en $-\infty$. Cette fois $\sqrt{4x^2} = 2|x| = -2x$, donc

$$k(x) = -2x \left(1 + \frac{1}{8x} - \frac{1}{128x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -2x - \frac{1}{4} + \frac{1}{64x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

L'asymptote est donc

$$y = -2x - \frac{1}{4},$$

et $k(x) - \left(-2x - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est **négatif** pour $x < 0$: la courbe est encore **au-dessous** de son asymptote. $\square$

La lecture géométrique. Les deux asymptotes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées, et la courbe est au-dessous des deux. Ce n'est pas un hasard : la fonction k est positive et se comporte comme $2|x|$ à l'infini, de sorte que sa courbe reste sous les deux demi-droites qui l'encadrent. Contrairement au cas **a**, la **nature** de la branche est la même des deux côtés, seule l'asymptote change.

Le contrôle numérique. Pour $x = 1000$: $k(1000) = 2000,24998438$ et $2x + \frac{1}{4} - \frac{1}{64x} = 2000,24998437$. Pour $x = -1000$: $k(-1000) = 1999,74998437$ et $-2x - \frac{1}{4} + \frac{1}{64x} = 1999,74998437$.

2.d. Le domaine. La racine impose $x \geq 0$: la fonction h est définie sur $[0, +\infty[$, et il n'y a qu'une seule branche infinie, en $+\infty$.

La pente. On calcule le rapport

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{x + \sqrt{x}}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Il y a donc une **direction asymptotique** de pente $m = 1$.

L'ordonnée à l'origine, ou plutôt son absence. On examine $h(x) - mx$:

$$h(x) - x = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Cette quantité n'a pas de limite finie : **il n'y a pas d'asymptote**. La courbe s'écarte indéfiniment de toute droite de pente 1, tout en gardant la direction de cette droite.

La nature de la branche. C'est une **branche parabolique de direction** $y = x$, et il n'y a donc ni asymptote ni position par rapport à une asymptote à donner. $\square$

Pourquoi ce nom. Parce que la courbe fait avec la droite $y = x$ ce que la parabole $y = x^2$ fait avec l'axe des abscisses : elle s'en éloigne indéfiniment, mais la direction de la tangente tend vers celle de la droite. On peut le voir en changeant de repère : dans le repère d'axes $y = x$ et $y = -x$, la courbe de h ressemble à une parabole couchée.

Ce qu'il faut écrire, et ne pas écrire. On écrit « branche parabolique de direction $y = x$ ». On n'écrit pas « asymptote $y = x$ » : c'est faux, l'écart $\sqrt{x}$ tendant vers l'infini. Et l'on n'écrit pas « pas de branche infinie » : il y en a une, et sa direction est connue.

Une remarque sur l'écart. L'écart $\sqrt{x}$ croît lentement : pour $x = 10^6$, il ne vaut que 1000, contre 10^6 pour l'ordonnée. Visuellement, sur un graphique de large échelle, la courbe **semble** coller à la droite $y = x$, et c'est ainsi qu'on se persuade à tort qu'il y a une asymptote. Seul le calcul de $h(x) - x$ tranche, et il tranche sans ambiguïté.

3. Le classement en $+\infty$.

Fonction	Nature de la branche en $+\infty$	Asymptote
a $\sqrt{x^2 + 4} - x$	asymptote horizontale	$y = 0$
b $x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$	asymptote oblique	$y = x + \frac{1}{e}$
c $\sqrt{4x^2 + x}$	asymptote oblique	$y = 2x + \frac{1}{4}$
d $x + \sqrt{x}$	branche parabolique	aucune

Le critère, énoncé dans l'ordre où il se pratique. Devant une fonction f dont on étudie le comportement en $+\infty$, on descend l'arbre suivant, et l'on s'arrête à la première réponse.

Méthode

1. $f(x)$ **a-t-elle une limite finie ℓ** ? Si oui : **asymptote horizontale** $y = \ell$. C'est le cas **a**, et c'est pour ne pas avoir posé cette question d'abord qu'on se trompe sur sa nature.
2. Sinon, le rapport $\frac{f(x)}{x}$ **a-t-il une limite m** ?
 - Si m est **infinie** : branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
 - Si $m = 0$: branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
 - Si m est finie non nulle, on passe au point 3.
3. $f(x) - mx$ **a-t-il une limite finie p** ?
 - Si oui : **asymptote oblique** $y = mx + p$. Ce sont les cas **b** et **c**.
 - Si non, la limite étant infinie : **branche parabolique de direction** $y = mx$. C'est le cas **d**.
4. Une fois l'asymptote obtenue, la **position** se lit sur le signe du terme suivant du développement, et il faut refaire ce travail séparément en $-\infty$.

Ce que le développement limité apporte à ce critère. Il répond aux trois questions d'un coup. Un développement de la forme

$$f(x) = mx + p + \frac{\alpha}{x^q} + o\left(\frac{1}{x^q}\right) \quad \text{avec } \alpha \neq 0 \text{ et } q \geq 1$$

donne immédiatement la pente m , l'ordonnée p , et la position par le signe de $\frac{\alpha}{x^q}$. Il suffit donc de développer une fois, à un ordre assez grand pour dépasser le terme constant, et de lire. C'est le cas des trois premières fonctions.

Et quand il n'y en a pas. Le cas **d** montre la limite de la méthode : le développement de $h(x) = x + \sqrt{x}$ ne s'écrit pas sous la forme ci-dessus, parce que $\sqrt{x}$ n'est ni une constante ni une puissance négative de x . Sa présence entre le terme dominant x et le terme constant est précisément le signe qu'il n'y a pas d'asymptote, et l'on conclut sans autre calcul. $\square$

Commentaire. Les quatre fonctions ont été choisies pour couvrir les quatre réponses possibles, et surtout pour que la recette la plus enseignée échoue sur deux d'entre elles.

La fonction **a** fait échouer la recette parce qu'elle a une asymptote **horizontale**, alors que sa forme, une racine moins un terme de degré 1, ressemble à celle d'un cas oblique. La leçon est de

chercher la limite de f avant celle de $\frac{f(x)}{x}$. Elle apporte en prime le cas d'une nature différente selon le côté, dû au $|x|$ de la racine.

La fonction **d** fait échouer la recette d'une autre manière : la direction asymptotique existe, la pente est parfaitement définie, et il n'y a pourtant pas d'asymptote. C'est le cas que les méthodes de cours évoquent en une ligne et qu'on ne rencontre presque jamais en exercice, alors qu'il se reconnaît immédiatement dès qu'un terme en $\sqrt{x}$, en $\ln x$ ou en $x^{1/3}$ subsiste après retrait de la partie affine.

Les fonctions **b** et **c** sont les cas ordinaires, et elles servent à installer deux gestes : extraire la constante d'un logarithme comme on factorise par le terme dominant, et ne jamais écrire $\sqrt{x^2} = x$ sans avoir dit de quel côté on travaille. Le contrôle numérique donné après chaque calcul est le dernier réflexe à prendre : sur un développement en l'infini, il suffit d'une valeur de x grande pour voir si le résultat tient.

Exercice 31 ★ Convexité : lecture graphique et test sur une table de valeurs

Notions : Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités

La convexité se démontre par la dérivée seconde, mais elle se **lit** avant de se calculer, et c'est cette lecture qu'on installe ici. Le lemme des trois pentes a été démontré à la section 24 du cours ; on n'y revient pas, on s'en sert sous la forme suivante, qui est celle qu'on emploie en pratique.

Propriété

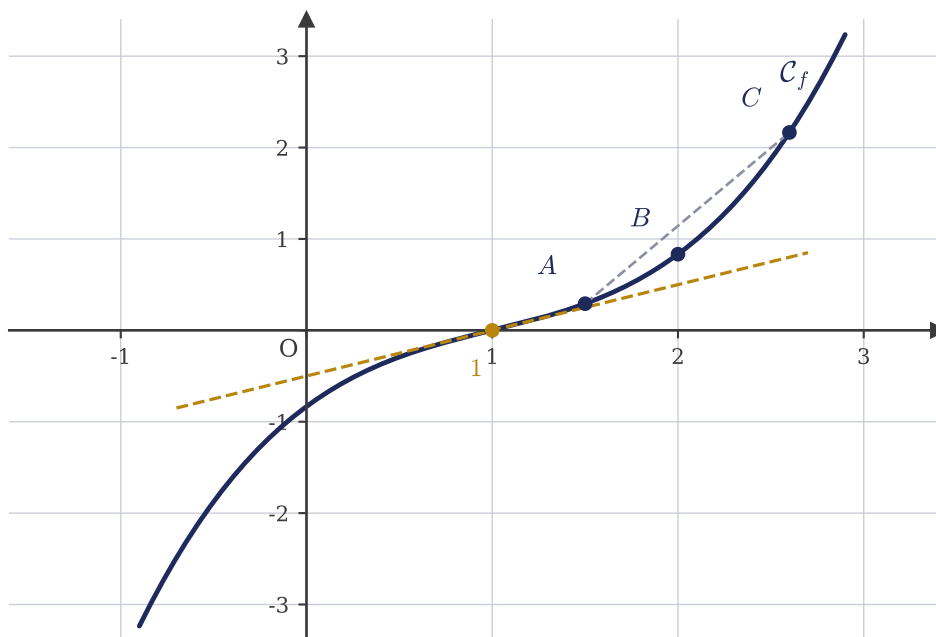
Inégalité des pentes. Si f est convexe sur un intervalle I , alors pour tous $u < v < w$ dans I ,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}.$$

Autrement dit, **les pentes des cordes croissent quand on avance vers la droite**. Pour une fonction concave, les trois inégalités sont inversées.

Partie A. Lecture graphique

La figure ci-dessous montre la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f sur l'intervalle $[-0,9; 2,9]$, sa tangente en $x = 1$ tracée en pointillés, et trois points A , B , C de la courbe, d'abscisses respectives 1,5 ; 2 ; 2,6, reliés par la corde $[AC]$.



1. Lire sur quel intervalle f est **convexe** et sur quel intervalle elle est **concave**. On dira à quoi on le voit.
2. Donner l'abscisse du **point d'inflexion**.
3. Que remarque-t-on sur la tangente en ce point, par rapport à la courbe ? En quoi cela distingue-t-il ce point de tous les autres points de la courbe ?
4. Ordonner les pentes des trois cordes $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, et énoncer la propriété générale que cette lecture illustre.

Partie B. Le test sur quatre valeurs

On ne dispose plus d'aucune courbe, mais seulement de quatre valeurs d'une fonction g définie sur $[0, 4]$, données par une table. La question est : **ces valeurs sont-elles compatibles avec une fonction convexe sur $[0, 4]$?**

x	0	1	3	4
Jeu $\mathcal{J}_1 : g(x)$	5	2	0	1
Jeu $\mathcal{J}_2 : g(x)$	0	3	4	8

- Pour chacun des deux jeux, répondre à la question, en justifiant par l'inégalité des pentes. Pour une réponse négative, on exhibera le triplet de points qui met l'inégalité en défaut.
- Énoncer, pour quatre abscisses $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ et quatre valeurs données, le critère qui décide de la compatibilité. Combien d'inégalités faut-il vérifier ?
- Dans le jeu qui n'est pas compatible, on souhaite modifier **une seule valeur**, celle de $g(1)$, pour le rendre compatible. Déterminer l'ensemble exact des valeurs de $g(1)$ qui conviennent.

Corrigé

Partie A

1. *La lecture.* Sur la partie gauche de la figure, jusqu'à l'abscisse 1, la courbe tourne sa **concavité vers le bas** : elle est située au-dessous de ses tangentes, et une corde tracée entre deux de ses points passerait au-dessous d'elle. La fonction f y est donc **concave**. Sur la partie droite, à partir de l'abscisse 1, c'est l'inverse : la courbe est au-dessus de ses tangentes et au-dessous de ses cordes, donc f y est **convexe**.

Conclusion.

$$f \text{ est concave sur } [-0,9; 1] \quad \text{et convexe sur } [1; 2,9].$$

À quoi on le voit, sans dérivée. Au **sens de rotation de la tangente**. En parcourant la courbe de gauche à droite, la tangente tourne d'abord dans le sens des aiguilles d'une montre, sa pente diminue : c'est la concavité. Puis elle tourne dans l'autre sens, sa pente augmente : c'est la convexité. Cette lecture est la traduction graphique du fait que la convexité équivaut à la croissance de f' , établie à la section 24.

Ce qu'il ne faut pas confondre. La fonction représentée est **croissante sur tout l'intervalle**, ce qui se lit tout aussi bien sur la figure. Croissance et convexité sont deux propriétés indépendantes : ici la fonction croît partout, et sa concavité change en cours de route. Une fonction peut être convexe et décroissante, concave et croissante, et les quatre combinaisons existent.

2. *Le point d'inflexion.* C'est le point où la concavité change de sens, c'est-à-dire le point de la courbe d'abscisse

$$x = 1.$$

On lit sur la figure que son ordonnée est 0, la courbe coupant l'axe des abscisses en ce point.

3. *La remarque sur la tangente.* La tangente en ce point, tracée en pointillés, **traverse** la courbe : elle est au-dessus de la courbe à gauche du point de contact et au-dessous à droite.

En quoi c'est exceptionnel. En tout autre point de la courbe, la tangente reste **localement du même côté** de la courbe. Sur la partie concave, la tangente est localement au-dessus de la courbe des deux côtés du point de contact ; sur la partie convexe, elle est localement au-dessous des deux côtés. Seul le point d'inflexion permet à la tangente de passer d'un côté à l'autre, et c'est même une définition possible du point d'inflexion : le point où la tangente traverse la courbe.

Une conséquence pratique. C'est le seul point où l'approximation affine de la section 3 se trompe **dans les deux sens** selon le côté où l'on se place. Sur la partie convexe, l'approximation affine

sous-estime toujours la fonction ; sur la partie concave, elle la surestime toujours. En un point d'inflexion, elle fait les deux.

4. *Les lectures.* On lit sur la figure les ordonnées approchées des trois points :

$$y_A \approx 0,3, \quad y_B \approx 0,8, \quad y_C \approx 2,2,$$

pour des abscisses 1,5 ; 2 ; 2,6. Les pentes des trois cordes valent donc approximativement

$$\text{pente}[AB] \approx \frac{0,8 - 0,3}{2 - 1,5} = \frac{0,5}{0,5} = 1,0,$$

$$\text{pente}[AC] \approx \frac{2,2 - 0,3}{2,6 - 1,5} = \frac{1,9}{1,1} \approx 1,7,$$

$$\text{pente}[BC] \approx \frac{2,2 - 0,8}{2,6 - 2} = \frac{1,4}{0,6} \approx 2,3.$$

L'ordre.

$$\text{pente}[AB] < \text{pente}[AC] < \text{pente}[BC].$$

La propriété générale ainsi lue. C'est exactement l'inégalité des pentes rappelée en tête d'énoncé, appliquée au triplet $u = 1,5$, $v = 2$, $w = 2,6$, tous trois situés dans l'intervalle $[1 ; 2,9]$ où f est convexe. La corde qui part de A et s'arrête au point le plus proche est la moins pentue ; celle qui part du point le plus avancé est la plus pentue ; celle qui joint les deux extrêmes est entre les deux. $\square$

Remarque

La lecture graphique donne des valeurs approchées, et il faut le dire. Ce qui est **exact**, en revanche, c'est l'**ordre** des trois pentes : il est imposé par la convexité, il ne dépend pas de la précision de la lecture, et il serait le même sur une figure grossièrement tracée. C'est ce qui rend cette question honnête : on ne demande pas de mesurer, on demande de classer.

Pour information, la courbe tracée est celle de

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{x-1}{2},$$

qui donne les valeurs exactes $f(1,5) = \frac{7}{24} \approx 0,2917$, $f(2) = \frac{5}{6} \approx 0,8333$ et $f(2,6) \approx 2,1653$, puis les pentes exactes 1,0833, 1,7033 et 2,22. L'ordre lu est le bon, et les valeurs approchées sont correctes à la lecture près.

Partie B

5. *Le principe du test.* L'inégalité des pentes est une condition **nécessaire** de convexité, et elle ne porte que sur des valeurs de g : on peut donc la tester sur une table, sans connaître g ailleurs. Il suffit de calculer les pentes des cordes successives et de vérifier qu'elles croissent.

Le jeu $\mathcal{J}_1$. Les trois pentes successives valent

$$p_1 = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{2 - 5}{1} = -3,$$

$$p_2 = \frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{0 - 2}{2} = -1,$$

$$p_3 = \frac{g(4) - g(3)}{4 - 3} = \frac{1 - 0}{1} = 1.$$

On a $-3 \leq -1 \leq 1$: les pentes croissent. **Ces valeurs sont compatibles avec une fonction convexe sur $[0, 4]$.**

Et il en existe réellement une. Ce n'est pas seulement que le test ne détecte rien : la fonction **affine par morceaux** qui joint les quatre points est convexe, précisément parce que ses pentes successives croissent. On a donc exhibé une fonction convexe sur $[0, 4]$ qui prend les quatre valeurs demandées, ce qui règle la question au-delà du test. $\square$

Le jeu $\mathcal{J}_2$. Les trois pentes successives valent

$$p_1 = \frac{3-0}{1} = 3, \quad p_2 = \frac{4-3}{2} = 0,5, \quad p_3 = \frac{8-4}{1} = 4.$$

Or $p_1 = 3 > 0,5 = p_2$: les pentes ne croissent pas. **Ces valeurs ne sont pas compatibles avec une fonction convexe sur $[0, 4]$.**

Le triplet fautif, avec l'inégalité mise en défaut. Prenons $u = 0$, $v = 1$, $w = 3$, trois points de $[0, 4]$. Si g était convexe, la première des deux inégalités des pentes donnerait

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} \leq \frac{g(3) - g(0)}{3 - 0},$$

c'est-à-dire

$$3 \leq \frac{4-0}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,33,$$

ce qui est **faux**. La convexité est donc impossible. $\square$

La lecture géométrique de ce refus. Le point $(1; 3)$ est situé **au-dessus** de la corde qui joint $(0; 0)$ à $(3; 4)$, puisque cette corde a pour ordonnée $\frac{4}{3} \approx 1,33$ en $x = 1$. Or une fonction convexe est toujours au-dessous de ses cordes : c'est la définition même. Le test des pentes n'est qu'une manière de calculer cette comparaison.

6. Le critère. Pour quatre abscisses $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ d'un intervalle et quatre valeurs y_1, y_2, y_3, y_4 , posons les **trois pentes successives**

$$p_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad p_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad p_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

Propriété

Les quatre valeurs sont compatibles avec une fonction convexe sur $[x_1, x_4]$ **si et seulement si**

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3.$$

Il y a donc **deux inégalités** à vérifier, et non les huit que produiraient tous les triplets possibles.

Pourquoi la condition est nécessaire. Appliquée aux triplets (x_1, x_2, x_3) et (x_2, x_3, x_4) , l'inégalité des pentes donne directement $p_1 \leq p_2$ puis $p_2 \leq p_3$.

Pourquoi elle est suffisante. Si les trois pentes croissent, la fonction affine par morceaux qui joint les quatre points est convexe, comme au jeu $\mathcal{J}_1$, et elle prend les quatre valeurs voulues.

Pourquoi deux inégalités suffisent. Parce que les quatre points fournissent $\binom{4}{3} = 4$ triplets, donc a priori 8 inégalités, mais toutes se déduisent des deux inégalités entre pentes **consécutives**. Par exemple la pente de la corde joignant les points 1 et 3 est une moyenne pondérée de p_1 et p_2 , donc encadrée par elles dès que $p_1 \leq p_2$. C'est le même mécanisme que dans l'inégalité des pentes du cours, dont le terme du milieu est toujours une moyenne des deux autres.

7. La mise en équations. On garde $g(0) = 0$, $g(3) = 4$ et $g(4) = 8$, et l'on note $y = g(1)$ l'inconnue. Les trois pentes deviennent

$$p_1 = \frac{y-0}{1} = y, \quad p_2 = \frac{4-y}{2}, \quad p_3 = \frac{8-4}{1} = 4.$$

Le critère de la question 6 s'écrit donc comme un système de deux inéquations.

Première inéquation : $p_1 \leq p_2$.

$$y \leq \frac{4-y}{2} \iff 2y \leq 4-y \iff 3y \leq 4 \iff y \leq \frac{4}{3}.$$

Seconde inéquation : $p_2 \leq p_3$.

$$\frac{4-y}{2} \leq 4 \iff 4-y \leq 8 \iff -y \leq 4 \iff y \geq -4.$$

La conclusion. Les valeurs qui conviennent sont exactement celles de l'intervalle

$$g(1) \in \left[-4; \frac{4}{3}\right]. \quad \square$$

Vérification sur une valeur, et sur les deux bornes. Pour $y = 1$, on obtient $p_1 = 1$, $p_2 = 1,5$ et $p_3 = 4$: les pentes croissent, c'est compatible. Pour $y = \frac{4}{3}$, on obtient $p_1 = \frac{4}{3}$ et $p_2 = \frac{4 - \frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3}$: les deux pentes sont **égales**, ce qui est autorisé puisque l'inégalité est large, et cela correspond à trois points alignés. Pour $y = -4$, on obtient $p_2 = 4 = p_3$, autre cas d'alignement. Les bornes sont donc incluses, et la valeur de départ $y = 3$ est bien hors de l'intervalle, ce qui recoupe la question 5.

Remarque

Un fait qui surprend : on ne peut pas réparer le jeu $\mathcal{J}_2$ en modifiant $g(3)$ à la place. Reprenons le même travail en gardant $g(0) = 0$, $g(1) = 3$, $g(4) = 8$, et en notant $z = g(3)$ l'inconnue. Alors $p_1 = 3$, $p_2 = \frac{z-3}{2}$ et $p_3 = 8-z$, et le critère exige

$$3 \leq \frac{z-3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{z-3}{2} \leq 8-z,$$

c'est-à-dire $z \geq 9$ pour la première et $3z \leq 19$, soit $z \leq \frac{19}{3} \approx 6,33$, pour la seconde. Les deux conditions sont **incompatibles** : aucune valeur de $g(3)$ ne convient.

La morale est que les quatre valeurs forment un système, et qu'une incompatibilité de convexité ne se localise pas sur un point précis. Le jeu $\mathcal{J}_2$ est fautif parce que $g(1)$ est trop haut **relativement** à ses voisins, et cela se corrige en baissant $g(1)$, non en remontant $g(3)$, qui ferait au contraire **baissier** p_3 et déplacerait le problème d'un cran : c'est bien pourquoi les deux conditions obtenues sur $g(3)$ sont incompatibles.

Commentaire. Les deux parties de cet exercice testent la même propriété par deux moyens qui ne se recouvrent pas.

La partie **A** est de la lecture pure, et son enjeu est de séparer trois notions que les figures font croire liées : le **sens de variation**, donné par la position de la courbe par rapport à l'horizontale ; la **convexité**, donnée par la position par rapport aux tangentes et aux cordes ; et le **point d'inflexion**, qui est un changement de la seconde et non de la première. La fonction de la figure est croissante partout, et pourtant sa concavité change : cette combinaison est là exprès.

La partie **B** met la convexité à l'épreuve là où l'on ne l'attend pas, sur une simple table de nombres. Elle vaut d'être connue pour deux raisons. D'abord parce qu'elle donne un test **immédiat**, sans dérivée, sans courbe et sans expression de la fonction : trois soustractions, trois divisions, deux comparaisons. Ensuite parce que c'est ainsi que la convexité s'emploie dans la

vie réelle, sur des séries de mesures dont on n'a aucune formule, et qu'un jeu de données qui viole l'inégalité des pentes exclut définitivement tout modèle convexe.

La question 7, enfin, transforme la convexité en système d'inéquations, et la remarque finale montre que ce système n'a pas de variable privilégiée : ce sont les **écarts entre valeurs voisines** qui sont contraints, jamais une valeur isolée.

Exercice 32 ★★★ Convexité et dérivée seconde

Notions : Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

La caractérisation de la convexité par le signe de f'' est l'outil le plus employé du chapitre, et le plus mal employé. Cet exercice l'installe sur une fonction complète, puis en montre les deux frontières : un point d'inflexion **sans** dérivée seconde, et une dérivée seconde nulle **sans** point d'inflexion. Il se termine par une inégalité classique obtenue par la seule convexité.

On utilisera librement les résultats de la section 24 du cours : f est convexe sur un intervalle I si et seulement si f' y est croissante, si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I lorsque f'' existe ; et une fonction convexe sur I a sa courbe **au-dessus de chacune de ses tangentes**.

Partie A. La gaussienne

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

1. Étudier la parité de f , ses limites en $\pm\infty$, puis calculer f' et f'' .
2. Établir que f admet exactement **deux points d'inflexion**, d'abscisses $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, et donner leur ordonnée.
3. Réunir variations et convexité dans un **seul tableau**, en y faisant figurer le signe de f' , le signe de f'' , le sens de variation et la forme de la courbe.
4. Décrire l'esquisse de la courbe : quels points et quelles droites doit-on y placer avant de tracer quoi que ce soit ?

Partie B. Une inflexion sans dérivée seconde

On note g la fonction **racine cubique**, c'est-à-dire la bijection réciproque de $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, construite au chapitre précédent :

$$g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad \text{de sorte que } g(x)^3 = x \text{ pour tout réel } x.$$

On rappelle que la notation $x^{1/3}$ est réservée à $x > 0$, et qu'on emploie donc $\sqrt[3]{x}$, défini sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. Montrer que g n'est pas dérivable en 0, et préciser la nature de la tangente en ce point.
6. Calculer g' et g'' sur $]0, +\infty[$, puis obtenir leur expression sur $] -\infty, 0[$ par un argument de parité. En déduire le sens de la concavité sur chacun des deux intervalles.
7. Conclure : g admet-elle un point d'inflexion en 0 ? La dérivée seconde $g''(0)$ existe-t-elle ? Que doit-on en retenir sur la définition d'un point d'inflexion ?

Partie C. Une dérivée seconde nulle sans inflexion

8. Soit $p(x) = x^6$. Calculer p'' , montrer que $p''(0) = 0$, et déterminer si 0 est un point d'inflexion de p .
9. Énoncer précisément ce qu'il faut vérifier, en plus de l'annulation de $f''(a)$, pour conclure qu'un point est un point d'inflexion. Que devient l'étude si l'on remplace p par $-p$?

Partie D. L'inégalité de Bernoulli par la convexité

10. Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \geq -1$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

en utilisant uniquement la convexité et la position de la courbe par rapport à une tangente bien choisie. On traitera à part le cas $n = 1$, et l'on précisera le cas d'égalité.

11. Montrer sur un exemple chiffré que l'hypothèse $x \geq -1$ ne peut pas être retirée. Dépend-elle de la parité de n ?

Corrigé**Partie A**

1. *Le domaine et la parité.* La fonction $x \mapsto -x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$: f est donc définie sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout réel x ,

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),$$

donc f est **paire**, et sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffira d'étudier $[0, +\infty[$ et de conclure par symétrie, mais on écrira ici le tableau complet.

Les limites. Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $-x^2 \rightarrow -\infty$, donc par composition avec la limite de l'exponentielle en $-\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

et par parité la même limite vaut en $-\infty$. La courbe admet donc l'axe des abscisses pour **asymptote horizontale aux deux infinis**, et comme $f > 0$ partout, elle reste au-dessus de cette asymptote.

La dérivée première. La dérivée de la composée donne, la dérivée intérieure étant $-2x$,

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}.$$

La dérivée seconde. On dérive le produit :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x) \times (-2x)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}. \quad \square$$

Le contrôle de parité, à faire. La fonction f étant paire, f' doit être impaire et f'' paire. On vérifie que $-2xe^{-x^2}$ est bien impaire et que $2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ est bien paire : les deux calculs sont cohérents.

2. *Le signe de f'' .* L'exponentielle étant strictement positive, le signe de $f''(x)$ est celui de $2x^2 - 1$, qui s'annule pour

$$x^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{soit} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7071.$$

Ce trinôme du second degré en x , de coefficient dominant positif, est **négatif entre ses racines et positif à l'extérieur**. Donc

$$f'' < 0 \text{ sur } \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[, \quad f'' > 0 \text{ sur } \left] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right[\text{ et sur } \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty \right[.$$

La conclusion sur les inflexions. En chacun des deux points $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, la dérivée seconde s'annule **et change de signe**, donc la convexité change de sens : ce sont bien des **points d'inflexion**. Et il n'y en a pas d'autres, puisque f'' ne s'annule qu'en ces deux points. La fonction f admet donc exactement deux points d'inflexion.

Leur ordonnée. Comme $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$,

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6065.$$

Les deux points d'inflexion sont donc

$$I_- (-0,7071; 0,6065) \quad \text{et} \quad I_+ (0,7071; 0,6065),$$

symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui était prévisible par parité. $\square$

3. Le signe de f' . L'exponentielle étant strictement positive, le signe de $f'(x) = -2x e^{-x^2}$ est celui de $-x$: la dérivée est positive sur $] -\infty, 0[$, nulle en 0, négative sur $]0, +\infty[$. La fonction f croît donc jusqu'en 0 puis décroît, avec un maximum

$$f(0) = e^0 = 1.$$

Le tableau conjoint. Les quatre charnières sont les deux abscisses d'inflexion et le maximum, plus les deux bornes infinies.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$		
$f'(x)$	+		+	0	-	-	
$f''(x)$	+	+	0	-	-	0	+
sens	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$
forme	convexe	infl.	concave		concave	infl.	convexe

Les valeurs remarquables.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x)$	0	$e^{-1/2} \approx 0,607$	1	$e^{-1/2} \approx 0,607$	0

Ce que le tableau conjoint rend visible et qu'un tableau de variations seul cache. La fonction est **croissante** sur $] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[$ et sur $] -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0[$, mais elle y croît de deux manières différentes : d'abord de plus en plus vite, puisqu'elle est convexe, puis de moins en moins vite, puisqu'elle est concave. Le point d'inflexion I_- est le point où la montée est la plus raide, c'est-à-dire le point où f' atteint son maximum. **Les variations et la convexité sont deux lectures indépendantes**, et le changement de l'une ne coïncide jamais avec le changement de l'autre. $\square$

4. L'esquisse, et l'ordre dans lequel on la construit. Avant de tracer la moindre courbe, on place :

- l'**asymptote horizontale** $y = 0$, approchée des deux côtés et par au-dessus ;
- le **sommet** $(0; 1)$, avec sa **tangente horizontale**, puisque $f'(0) = 0$;
- les **deux points d'inflexion** $(\pm 0,707; 0,607)$, à peu près à mi-hauteur du sommet, ce qui est un bon repère visuel ;
- les **tangentes en ces deux points**, de pentes $f'\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mp \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \mp \sqrt{2} e^{-1/2} \approx \mp 0,858$. Ce sont les tangentes les plus inclinées de toute la courbe, et chacune **traverse** la courbe.

Le commentaire du tracé. La courbe part de l'axe des abscisses en $-\infty$ en s'en détachant lentement, monte en creusant vers le haut jusqu'à I_- , puis continue de monter en s'aplatissant jusqu'au sommet $(0; 1)$, redescend symétriquement, et se recolle lentement à l'asymptote. C'est la fameuse « courbe en cloche ».

Le contrôle de cohérence. La courbe est convexe sur les deux queues et concave au centre, ce qui est la seule configuration compatible avec les trois faits suivants : elle a une asymptote horizontale, elle admet un maximum strict, et elle est positive. Une courbe concave sur $\mathbb{R}$ tout entier ne pourrait pas rester positive à l'infini, et une courbe convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier ne pourrait pas avoir de maximum intérieur : la présence de deux inflexions était donc obligatoire, avant tout calcul.

Partie B

5. *Le taux d'accroissement en 0.* Comme $g(0) = 0$, on a pour $x \neq 0$

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Le dénominateur $\sqrt[3]{x^2}$ est strictement positif pour $x \neq 0$ et tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$. Donc

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty,$$

et ce, des deux côtés. **La fonction g n'est donc pas dérivable en 0.** $\square$

La nature de la tangente. Le taux d'accroissement tendant vers $+\infty$, la courbe admet en 0 une **tangente verticale**, d'équation $x = 0$. C'est le cas décrit à la section 5 du cours : la non-dérivabilité y est due à une pente infinie, et non à un point anguleux, les deux limites latérales étant égales à $+\infty$. L'exercice 17 a obtenu le même résultat par un autre chemin, en étudiant la limite de g' en 0 ; on n'a besoin ici que de la conclusion, et c'est ce qui permet de passer directement à la question de la concavité.

6. *Sur $]0, +\infty[$.* Là, $g(x) = x^{1/3}$ et les formules usuelles s'appliquent :

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad g''(x) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-5/3} = -\frac{2}{9}x^{-5/3}.$$

Pour $x > 0$, on a $x^{-5/3} > 0$, donc

$$g''(x) < 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[,$$

et g est **concave** sur cet intervalle.

Sur $] -\infty, 0[$, par parité. La fonction g est **impaire** : en effet $(-\sqrt[3]{x})^3 = -x$, donc $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ par unicité de la racine cubique. Or la dérivée d'une fonction impaire est paire, et la dérivée d'une fonction paire est impaire : g' est donc paire et g'' **impaire**. Ainsi, pour $x < 0$,

$$g''(x) = -g''(-x),$$

et comme $-x > 0$ donne $g''(-x) < 0$, on obtient $g''(x) > 0$. La fonction g est donc **convexe** sur $] -\infty, 0[$. $\square$

Récapitulatif. La fonction g est convexe sur $] -\infty, 0[$ et concave sur $]0, +\infty[$: la concavité **change de sens en 0**.

7. *Oui, g admet un point d'inflexion en 0.* La concavité change de sens en ce point, et la tangente y traverse la courbe : la tangente verticale $x = 0$ a la courbe à sa gauche pour $x < 0$ et à sa droite pour $x > 0$. Les deux caractérisations du point d'inflexion sont donc satisfaites.

Non, $g''(0)$ n'existe pas. Et l'obstacle est plus radical qu'une simple absence de dérivée seconde : la question 5 a montré que $g'(0)$ n'existe même pas. Il ne peut donc être question de $g''(0)$, ni de son signe, ni de son annulation.

Ce qu'il faut en retenir. Un point d'inflexion est défini par le **changement de sens de la concavité**, pas par l'annulation de la dérivée seconde. L'annulation de f'' n'est qu'un **outil de**

détection, disponible quand f'' existe, et il ne couvre pas tous les cas. Une rédaction du type « cherchons les points d'inflexion en résolvant $f''(x) = 0$ » est donc incomplète par principe : elle ne trouvera jamais l'inflexion de $\sqrt[3]{}$ en 0.

La rédaction correcte de la recherche des inflexions. On détermine d'abord l'ensemble sur lequel f'' existe, on y résout $f''(x) = 0$ et l'on vérifie le changement de signe, **puis** on examine séparément les points où f'' n'existe pas. Le second temps est celui qu'on oublie, et il n'est jamais vide dans les exercices qui portent sur des racines ou des valeurs absolues.

Partie C

8. Les dérivées. La fonction $p(x) = x^6$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$p'(x) = 6x^5, \quad p''(x) = 30x^4.$$

En particulier $p''(0) = 0$.

Le signe de p'' . Pour tout réel x , on a $x^4 \geq 0$, donc

$$p''(x) \geq 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \quad \text{avec égalité uniquement en } x = 0.$$

La dérivée seconde **s'annule en 0 sans changer de signe** : elle est positive avant et positive après.

La conclusion. La caractérisation de la section 24 donne : $p'' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, donc p est **convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier**. La concavité ne change nulle part, et en particulier pas en 0 : 0 **n'est pas un point d'inflexion de p** . $\square$

Ce qui se passe réellement en 0. La courbe y a une tangente horizontale, un minimum strict, et elle est **très plate** : le contact avec sa tangente est d'ordre 6. C'est cette platitude qu'on prend pour une inflexion quand on regarde un tracé plutôt qu'un signe.

9. Ce qu'il faut vérifier. Pour conclure qu'un point d'abscisse a est un point d'inflexion à partir de la dérivée seconde, il faut établir que

$$f'' \text{ change de signe en } a,$$

c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $]a-\delta, a[$ sur lequel f'' garde un signe et un voisinage $]a, a+\delta[$ sur lequel elle garde le signe **contraire**.

L'annulation $f''(a) = 0$ est une condition **nécessaire** lorsque f'' est continue en a , elle n'est jamais suffisante, et la question 7 a montré qu'elle n'est même pas nécessaire lorsque f'' n'existe pas en a . Résumé en une ligne :

$$f''(a) = 0 \text{ ne suffit pas,} \quad f''(a) = 0 \text{ n'est pas indispensable,} \quad \text{le changement de signe décide.}$$

Si l'on remplace p par $-p$. On a $(-p)''(x) = -30x^4 \leq 0$ sur $\mathbb{R}$, avec annulation en 0 seulement, et sans changement de signe. La fonction $-p$ est donc **concave sur $\mathbb{R}$** , elle admet un maximum strict en 0, et 0 n'est toujours pas un point d'inflexion. L'étude est strictement symétrique de la précédente : changer f en $-f$ échange convexité et concavité, et laisse les points d'inflexion inchangés. Il n'y en avait pas, il n'y en a pas. $\square$

Partie D

10. Le cas $n = 1$. L'inégalité s'écrit $(1+x)^1 \geq 1+x$, c'est-à-dire $1+x \geq 1+x$: c'est une **égalité**, vraie pour tout réel x . Ce cas est donc réglé, et il est à traiter à part parce que la fonction $x \mapsto 1+x$ est affine, donc de dérivée seconde nulle : elle est convexe, mais pas strictement, et le cas d'égalité y est différent.

Le cas $n \geq 2$. Posons, sur $I = [-1, +\infty[$,

$$h_n(x) = (1+x)^n.$$

Cette fonction est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$h'_n(x) = n(1+x)^{n-1}, \quad h''_n(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

La convexité. Pour $x > -1$, on a $1+x > 0$, donc $(1+x)^{n-2} > 0$; et $n \geq 2$ donne $n(n-1) > 0$. Ainsi

$$h''_n(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in]-1, +\infty[.$$

La fonction h_n est donc **strictement convexe** sur $] -1, +\infty[$, et comme elle est continue sur $[-1, +\infty[$, elle est convexe sur $[-1, +\infty[$ tout entier.

La tangente bien choisie. On prend la tangente **au point d'abscisse 0**, parce que c'est le seul point où le membre de droite de l'inégalité voulue est visiblement affine. Ses coefficients sont

$$h_n(0) = 1, \quad h'_n(0) = n \times 1^{n-1} = n,$$

donc son équation est

$$y = 1 + nx.$$

La conclusion. Une fonction convexe sur un intervalle a sa courbe au-dessus de chacune de ses tangentes (section 24). Appliqué à h_n sur $[-1, +\infty[$ et à sa tangente en 0, cela donne exactement

$$\forall x \geq -1, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx. \quad \square$$

Le cas d'égalité, pour $n \geq 2$. La stricte convexité sur $] -1, +\infty[$ entraîne que la courbe est **strictement** au-dessus de la tangente en tout point autre que le point de contact : l'égalité n'a donc lieu, sur $] -1, +\infty[$, qu'en $x = 0$. Reste le bord : en $x = -1$, on a $h_n(-1) = 0$ et $1 + n(-1) = 1 - n \leq -1 < 0$, donc l'inégalité y est stricte. Finalement, pour $n \geq 2$,

$$(1+x)^n = 1 + nx \iff x = 0.$$

Remarque

La démonstration n'a utilisé qu'une chose : **la position d'une courbe convexe par rapport à une tangente**. C'est le schéma de toutes les inégalités de convexité, et il se rédige toujours dans le même ordre.

1. Identifier la fonction dont le membre le plus « courbe » de l'inégalité est la valeur.
2. Identifier l'intervalle, et y établir la convexité par le signe de f'' .
3. Repérer le point de contact : c'est celui où l'inégalité devient une égalité, donc celui où l'anneau du membre de droite est tangente.
4. Conclure par « courbe au-dessus de la tangente », et traiter le cas d'égalité par la stricte convexité.

L'étape **3** est celle qui bloque : le point de contact se **lit** sur l'inégalité, il ne se cherche pas. Ici, $1 + nx$ est visiblement la tangente en 0, puisque son ordonnée à l'origine est $h_n(0)$ et sa pente $h'_n(0)$.

11. Un contre-exemple. Prenons $n = 3$ et $x = -4$, qui viole l'hypothèse puisque $-4 < -1$. Alors

$$(1+x)^n = (-3)^3 = -27 \quad \text{et} \quad 1 + nx = 1 - 12 = -11.$$

Or $-27 < -11$: l'inégalité est **fausse**. L'hypothèse $x \geq -1$ ne peut donc pas être retirée. $\square$

Où la démonstration s'effondre. En deux endroits à la fois. D'une part, l'intervalle $] -\infty, +\infty[$ n'est plus un intervalle de convexité : pour $x < -1$ et $n = 3$, on a $h''_3(x) = 6(1+x) < 0$, donc h_3 y est **concave**, et la courbe passe au-dessous de ses tangentes. D'autre part, l'argument de la tangente exige que le point de contact et le point testé soient dans le **même** intervalle de convexité, ce qui n'est plus le cas.

La dépendance à la parité de n . Elle est réelle.

- Pour n **impair**, $n \geq 3$, la puissance conserve le signe et $(1+x)^n$ devient très négatif quand $x \rightarrow -\infty$, tandis que $1+nx$ ne décroît que linéairement : l'inégalité est fausse pour x assez négatif, comme l'exemple ci-dessus le montre.
- Pour n **pair**, la puissance est positive et tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$, tandis que $1+nx$ tend vers $-\infty$: l'inégalité **reste vraie** pour tout réel x . Par exemple pour $n = 2$ et $x = -4$: $(-3)^2 = 9 \geq 1 - 8 = -7$.

Et la démonstration suit la même frontière. Tout se lit sur l'exposant $n-2$ de $h_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$.

- Si n est **pair**, alors $n-2$ est pair, donc $(1+x)^{n-2} \geq 0$ pour tout réel x , donc $h_n'' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ tout entier : la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$, la démonstration de la question **10** s'applique sans restriction, et le résultat vaut pour tout réel x .
- Si n est **impair**, alors $n-2$ est impair, donc $(1+x)^{n-2}$ change de signe en -1 : la convexité s'arrête exactement là, et le résultat aussi.

L'hypothèse $x \geq -1$ de l'énoncé est donc celle qui rend le résultat vrai pour tous les n à la fois, et c'est la raison pour laquelle on l'écrit sans distinguer les cas.

Commentaire. Les quatre parties disent quatre choses différentes de la même caractérisation. La partie **A** est le mode d'emploi normal, et le tableau conjoint de la question **3** en est le livrable. Son intérêt est de rendre visible que les deux lectures ne changent pas aux mêmes endroits : la fonction change de sens en 0, elle change de forme en $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, et aucune de ces trois abscisses n'est remarquable pour l'autre lecture. Une copie qui confond « $f'' = 0$ » et « extremum » ou « $f' = 0$ » et « inflexion » se corrige en regardant ce tableau.

La partie **B** casse l'implication qu'on croit réciproque. Il y a une inflexion en 0 pour la racine cubique, et la dérivée seconde n'y existe pas, ni même la dérivée première. La définition d'un point d'inflexion porte sur le changement de concavité, jamais sur l'annulation d'une dérivée, et l'outil habituel n'est qu'un outil.

La partie **C** casse l'implication dans l'autre sens, et c'est le piège le plus courant : $f''(a) = 0$ ne dit rien tout seul, il faut le **changement de signe**. Les deux parties se lisent ensemble : l'annulation de f'' n'est ni nécessaire ni suffisante, et le seul critère est celui qui figure dans la définition.

La partie **D**, enfin, montre l'usage productif de la convexité : elle démontre des inégalités, et elle le fait en une ligne dès que le point de contact est identifié. L'inégalité de Bernoulli se démontre habituellement par récurrence sur n , ce qui demande une page ; par convexité, elle demande le calcul de h_n'' et une phrase. La question **11** rappelle en prime qu'une hypothèse d'intervalle n'est pas décorative : elle délimite exactement la zone où la convexité vaut.

Exercice 33 ★★★ Newton : construire, itérer, et les modes d'échec

Notions : Méthode de Newton : construction, convergence et vitesse, Formule de Taylor-Lagrange et inégalité de Taylor-Lagrange, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction

La méthode de Newton est le procédé d'approximation le plus rapide du chapitre, et le plus fragile. On la construit ici de zéro, on l'observe travailler sur un exemple chiffré, on la compare à la dichotomie, puis on passe la moitié de l'exercice sur ses **trois manières d'échouer**, qui sont ce qu'un utilisateur doit connaître avant de s'en servir.

Partie A. Construire la formule

1. Soit f dérivable sur un intervalle et x_n un réel tel que $f'(x_n) \neq 0$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_n , déterminer son point d'intersection avec l'axe des abscisses, et en déduire la formule de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

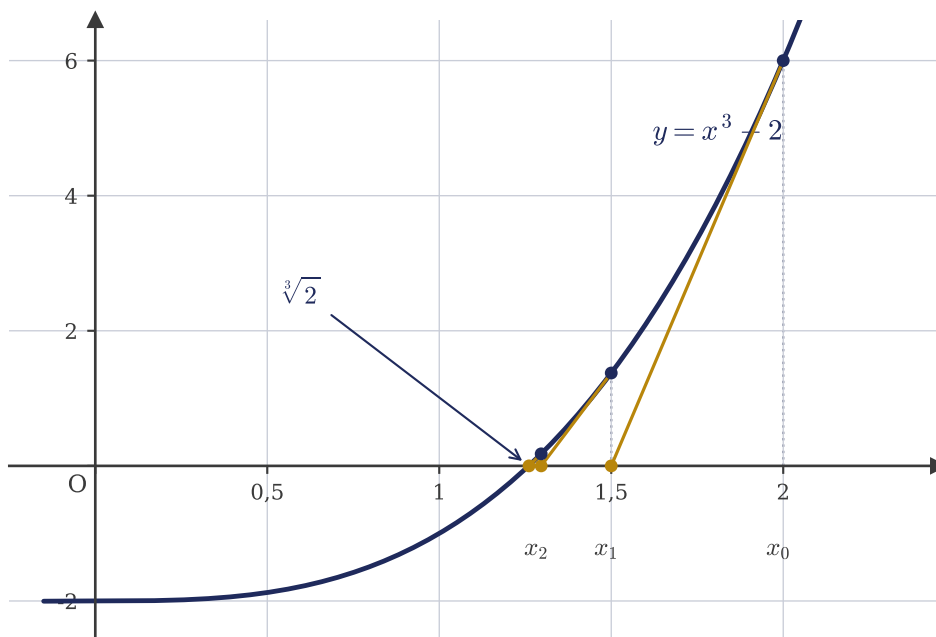
On dira où l'hypothèse $f'(x_n) \neq 0$ intervient.

Partie B. La racine cubique de 2

On prend

$$f(x) = x^3 - 2, \quad x_0 = 2,$$

et l'on cherche $\sqrt[3]{2} = 1,259921049\dots$, seule racine réelle de f . La figure ci-dessous montre les trois premières tangentes.



2. Expliciter la relation de récurrence pour cette fonction, puis calculer x_1 , x_2 , x_3 et x_4 , en donnant les valeurs à 10^{-8} près. On gardera les valeurs exactes sous forme de fractions aussi longtemps que possible.

3. Dresser la table des erreurs $e_n = |x_n - \sqrt[3]{2}|$ et compter, pour chaque rang, le nombre de **décimales exactes**. Que constate-t-on d'un rang au suivant ? Répondre par observation de la table.

4. *Comparaison avec la dichotomie.* On applique la dichotomie à f sur $[1, 2]$. Justifier que la méthode s'applique, puis déterminer combien d'itérations elle exige pour atteindre la précision obtenue par x_4 . Présenter le résultat en deux lignes.

Partie C. Les trois modes d'échec

Chacun des trois cas ci-dessous est un échec d'une nature différente : la suite existe et diverge, la suite s'arrête, la suite existe et tourne en rond.

5. La divergence. On applique la méthode de Newton à la fonction **racine cubique** $g(x) = \sqrt[3]{x}$, dont la seule racine est 0, en partant d'un $x_0 \neq 0$ quelconque.

a. Montrer que la relation de récurrence s'écrit $x_{n+1} = -2x_n$.

b. En déduire le comportement de la suite (x_n) , et dire quelle hypothèse manquait.

6. L'arrêt. Reprendre $f(x) = x^3 - 2$ mais avec $x_0 = 0$. Que se passe-t-il ? Interpréter géométriquement. Que se passe-t-il si l'on part de $x_0 = 10^{-3}$, ce qui est numériquement presque la même chose ?

7. Le cycle. On considère

$$\varphi(x) = x^3 - 2x + 2, \quad x_0 = 0.$$

a. Calculer x_1 puis x_2 . Que constate-t-on ?

b. La fonction φ possède-t-elle une racine réelle ? La méthode la trouvera-t-elle en partant de $x_0 = 0$?

8. Conclusion. Énoncer un jeu d'hypothèses qui garantit la convergence, vérifier qu'elles sont satisfaites dans la partie **B**, et dire laquelle est en défaut dans chacun des trois échecs.

Corrigé

Partie A

1. L'équation de la tangente. La fonction f étant dérivable en x_n , sa courbe admet en ce point une tangente d'équation

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

comme la section 3 l'a établi : c'est le graphe de l'approximation affine de f au voisinage de x_n . L'intersection avec l'axe des abscisses. On cherche x tel que $y = 0$, c'est-à-dire

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \iff f'(x_n)(x - x_n) = -f(x_n).$$

Où l'hypothèse intervient. C'est **ici**, et à cet endroit précis. Pour diviser par $f'(x_n)$, il faut que ce nombre soit non nul. On obtient alors

$$x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{soit} \quad x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

et l'on pose x_{n+1} égal à cette valeur. $\square$

L'idée en une phrase. On ne sait pas résoudre $f(x) = 0$, mais on sait résoudre l'équation de la tangente, qui est affine. On remplace donc la fonction par son approximation affine, on résout exactement l'équation approchée, et l'on recommence à partir du point obtenu.

Ce que devient la formule quand $f'(x_n) = 0$. La tangente est horizontale. Ou bien elle est confondue avec l'axe des abscisses, et alors $f(x_n) = 0$: on a déjà la racine. Ou bien elle est parallèle à l'axe sans le rencontrer, et **il n'y a pas de point d'intersection** : la suite ne peut pas être prolongée. C'est le mode d'échec de la question 6.

Partie B

2. La relation de récurrence. Avec $f(x) = x^3 - 2$ et $f'(x) = 3x^2$, non nul dès que $x \neq 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \frac{3x_n^3 - x_n^3 + 2}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}.$$

On peut aussi l'écrire $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3x_n^2}$, forme plus commode pour le calcul à la main.

Les itérés, en fractions exactes.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2 \times 8 + 2}{3 \times 4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}, \\x_2 &= \frac{2 \times \frac{27}{8} + 2}{3 \times \frac{9}{4}} = \frac{\frac{27}{4} + 2}{\frac{27}{4}} = \frac{\frac{35}{4}}{\frac{27}{4}} = \frac{35}{27}, \\x_3 &= \frac{2 \times \frac{42\,875}{19\,683} + 2}{3 \times \frac{1\,225}{729}} = \frac{\frac{125\,116}{19\,683}}{\frac{1\,225}{243}} = \frac{125\,116}{99\,225}.\end{aligned}$$

Le détail du dernier calcul : $2 \times 42\,875 = 85\,750$, auquel on ajoute $2 \times 19\,683 = 39\,366$, ce qui donne $125\,116$; et $\frac{19\,683}{243} = 81$, d'où le dénominateur $81 \times 1\,225 = 99\,225$.

Au rang suivant, les fractions cessent d'être maniées à la main et l'on passe en décimal.

Les valeurs à 10^{-8} près.

n	x_n exact	x_n à 10^{-8}
0	2	2,00000000
1	$\frac{3}{2}$	1,50000000
2	$\frac{35}{27}$	1,29629630
3	$\frac{125\,116}{99\,225}$	1,26093222
4	fraction de numérateur et dénominateur à 16 chiffres	
		1,25992186

Pour mémoire, $\sqrt[3]{2} = 1,25992105$. $\square$

La cohérence avec la figure. La figure montre bien trois tangentes successives, partant de $x_0 = 2$, puis de $x_1 = 1,5$, puis de $x_2 \approx 1,296$, et le troisième pied de tangente, $x_3 \approx 1,2609$, est déjà visuellement confondu avec la racine. La suite est **décroissante** et reste à droite de la racine, ce qui se voit sur la figure et se démontre en partie 8.

3. La table des erreurs. On calcule $e_n = |x_n - \sqrt[3]{2}|$, et l'on convient de compter comme nombre de décimales exactes le plus grand entier d tel que $e_n < 10^{-d}$ — convention plus commode que le comptage des chiffres qui coïncident, lequel dépend des retenues et n'est pas monotone, c'est-à-dire l'ordre de grandeur 10^{-d} de l'erreur.

n	e_n	Décimales exactes
0	$7,40 \times 10^{-1}$	0
1	$2,40 \times 10^{-1}$	0
2	$3,64 \times 10^{-2}$	1
3	$1,01 \times 10^{-3}$	2
4	$8,11 \times 10^{-7}$	6
5	$5,22 \times 10^{-13}$	12

Le rang 5, obtenu en poursuivant la récurrence, a été ajouté pour que la tendance soit lisible.

Le constat. À partir du rang 3, **la précision double d'une itération à la suivante**. Le nombre à regarder est $-\log_{10} e_n$, qui vaut successivement 3,00, puis 6,09, puis 12,28 : chacun est le double du précédent. Les décimales garanties, elles, suivent en 2, 6, 12, un cran en dessous parce qu'on les arrondit vers le bas. On voit aussi la chose sur les exposants de l'erreur : 10^{-3} , puis 10^{-7} , puis 10^{-13} , chaque exposant étant approximativement le double du précédent. Autrement dit, e_{n+1} est de l'ordre de e_n^2 :

$$e_3^2 = (1,01 \times 10^{-3})^2 \approx 1,0 \times 10^{-6}, \quad \text{à comparer à } e_4 = 8,11 \times 10^{-7},$$

$$e_4^2 = (8,11 \times 10^{-7})^2 \approx 6,6 \times 10^{-13}, \quad \text{à comparer à } e_5 = 5,22 \times 10^{-13}.$$

Les deux comparaisons se recoupent à moins d'un facteur 2 près. $\square$

Ce qu'on ne fait pas ici. On ne démontre pas la majoration $e_{n+1} \leq C e_n^2$, qui est établie à la section 25 du cours à partir de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 : c'est elle qui explique le doublement observé, et c'est vers elle qu'il faut renvoyer. Ici, on **constate**, et le constat suffit à comprendre pourquoi la méthode est employée en pratique.

Une nuance sur les premiers rangs. Le doublement ne s'observe qu'à partir du rang 3. Les trois premières itérations ne gagnent presque rien, la suite ne faisant que se rapprocher de la racine. C'est le régime habituel : la convergence quadratique est un comportement **asymptotique**, qui ne démarre que lorsque x_n est déjà assez proche de la racine. Une conséquence pratique importante en découle : Newton n'est pas une méthode pour **trouver** une racine, c'est une méthode pour **affiner** une approximation déjà correcte.

4. La dichotomie s'applique. La fonction f est polynomiale, donc continue sur $[1, 2]$, et

$$f(1) = 1 - 2 = -1 < 0, \quad f(2) = 8 - 2 = 6 > 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires, acquis au chapitre précédent, garantit l'existence d'une racine dans $]1, 2[$, et la dichotomie construit une suite d'intervalles emboîtés qui l'encadrent.

Le coût. Chaque itération divise par 2 la longueur de l'intervalle, qui vaut 1 au départ. Après k itérations, l'intervalle a pour longueur 2^{-k} , et l'erreur commise en prenant l'une de ses bornes est majorée par 2^{-k} . Pour atteindre la précision de x_4 , soit $8,11 \times 10^{-7}$, il faut

$$2^{-k} \leq 8,11 \times 10^{-7}.$$

Or $2^{-20} = 9,54 \times 10^{-7}$, qui est **trop grand**, et $2^{-21} = 4,77 \times 10^{-7}$, qui convient. Il faut donc $k = 21$ itérations.

Le résultat, en deux lignes.

Méthode	Itérations pour une erreur $\leq 8,11 \times 10^{-7}$
Newton, depuis $x_0 = 2$	4
Dichotomie, depuis $[1, 2]$	21

Le commentaire honnête. Le rapport est de 1 à 5 en nombre d'itérations, mais les itérations ne coûtent pas la même chose : la dichotomie évalue f une fois par étape, Newton évalue f **et** f' . À évaluations comptées, l'écart reste écrasant. En revanche la dichotomie a deux avantages que Newton n'a pas : elle ne demande aucune dérivée, et elle **converge toujours** dès que le changement de signe est établi, ce que la partie **C** va rendre précieux.

Partie C

5.a. La dérivée de la racine cubique. Comme à l'exercice 32, on a pour $x \neq 0$

$$g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \neq 0,$$

donc la formule de Newton est applicable en tout point non nul.

Le calcul. Pour $x_n \neq 0$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \sqrt[3]{x_n} \times 3\sqrt[3]{x_n^2} = x_n - 3\sqrt[3]{x_n \times x_n^2} = x_n - 3\sqrt[3]{x_n^3} = x_n - 3x_n,$$

c'est-à-dire

$$x_{n+1} = -2x_n. \quad \square$$

L'identité $\sqrt[3]{x^3} = x$ est valable pour tout réel x , positif ou négatif, ce qui rend le calcul licite quel que soit le signe de x_n .

5.b. Le comportement. Une récurrence immédiate donne $x_n = (-2)^n x_0$, donc

$$|x_n| = 2^n |x_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

et la suite change de signe à chaque étape. **Elle diverge, en oscillant, et s'éloigne de la racine de plus en plus vite.** Partant de $x_0 = 0,001$, on obtient $-0,002$, puis $0,004$, puis $-0,008$: le premier itéré est déjà deux fois plus loin de la racine que le point de départ, et il n'y a pas de rattrapage possible.

L'hypothèse qui manquait. La racine cherchée est 0, et c'est **précisément le point où g n'est pas dérivable** : le taux d'accroissement y tend vers $+\infty$, comme l'exercice 32 l'a établi. La dérivée g' , loin de rester minorée au voisinage de la racine, y explose :

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.$$

Or la convergence de Newton repose sur le contrôle de $\frac{1}{f'}$ **au voisinage de la racine** : il faut que f' y soit non nulle et que f y soit de classe $\mathcal{C}^2$. Ici les deux conditions tombent au point le plus important, et la méthode se retourne contre elle-même : la tangente est presque verticale, donc elle coupe l'axe presque à la verticale du point, mais le facteur 3 la fait passer trop loin de l'autre côté.

Ce qui rend ce cas instructif. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle change de signe, elle n'a qu'une racine : la dichotomie la trouverait sans le moindre problème. Ce n'est donc pas la fonction qui est pathologique, c'est **la méthode qui exige davantage** que l'existence d'une racine.

6. Avec $x_0 = 0$. On a $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(0) = 0$: la formule de Newton **n'est pas définie**, et la suite s'arrête au rang 0. L'algorithme, dans un programme, provoquerait une division par zéro.

L'interprétation géométrique. Le point de la courbe d'abscisse 0 est $(0; -2)$, et la tangente y est **horizontale**, d'équation $y = -2$. Cette droite ne rencontre jamais l'axe des abscisses, donc il n'y a aucun x_1 à construire. La méthode ne se trompe pas, elle n'a rien à répondre.

Avec $x_0 = 10^{-3}$. Cette fois $f'(x_0) = 3 \times 10^{-6} \neq 0$, la formule s'applique, et

$$x_1 = 10^{-3} - \frac{10^{-9} - 2}{3 \times 10^{-6}} = 10^{-3} + \frac{2 - 10^{-9}}{3 \times 10^{-6}} \approx 666\,666,67.$$

La suite ne s'arrête pas, mais elle est **projetée à plus de six cent mille** de la racine. Comme la fonction est convexe et croissante sur $]0, +\infty[$, la suite y redescend ensuite vers $\sqrt[3]{2}$, mais en multipliant seulement son écart par environ $\frac{2}{3}$ à chaque étape au début : il faut une trentaine d'itérations pour revenir dans une zone raisonnable, puis quatre pour finir.

La leçon des deux essais. Deux points de départ numériquement voisins, 0 et 10^{-3} , produisent l'un un arrêt et l'autre un détour de six ordres de grandeur. **La méthode de Newton n'est pas continue par rapport au point de départ**, et un $f'(x_0)$ petit est aussi dangereux qu'un $f'(x_0)$ nul, sans avoir la politesse de s'annoncer par une erreur.

7.a. Les deux premiers itérés. On a $\varphi'(x) = 3x^2 - 2$, et

$$\varphi(0) = 2, \quad \varphi'(0) = -2, \quad x_1 = 0 - \frac{2}{-2} = 1.$$

Puis

$$\varphi(1) = 1 - 2 + 2 = 1, \quad \varphi'(1) = 3 - 2 = 1, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

Le constat. On a $x_2 = x_0 = 0$. La suite est donc **périodique de période 2** :

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

Elle ne diverge pas, elle ne s'arrête pas, elle ne converge pas : elle tourne indéfiniment entre deux valeurs, et aucune des deux n'est une racine, puisque $\varphi(0) = 2 \neq 0$ et $\varphi(1) = 1 \neq 0$. $\square$

Comment un tel cycle se fabrique. Il suffit d'imposer deux conditions à la fois : que la tangente en 0 coupe l'axe en 1, et que la tangente en 1 coupe l'axe en 0. Cela s'écrit

$$0 - \frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} = 1 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{\varphi(1)}{\varphi'(1)} = 0,$$

soit deux équations sur les quatre nombres $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi'(1)$. Un polynôme de degré 3 a quatre coefficients : il y a donc largement de quoi satisfaire les deux conditions, et les cycles ne sont pas des curiosités rares.

7.b. *Une racine réelle existe.* La fonction φ est polynomiale, donc continue, et

$$\varphi(-2) = -8 + 4 + 2 = -2 < 0, \quad \varphi(-1) = -1 + 2 + 2 = 3 > 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires donne une racine dans $] -2, -1[$, dont la valeur approchée est

$$r \approx -1,76929.$$

La méthode ne la trouvera jamais depuis $x_0 = 0$. La suite étant identiquement égale à 0 pour les rangs pairs et à 1 pour les rangs impairs, elle ne s'approche d'aucune valeur négative : la racine r est hors d'atteinte. $\square$

Ce qui bloque, vu géométriquement. Entre le point de départ 0 et la racine $r \approx -1,77$, la dérivée φ' s'annule, en $x = -\sqrt{2/3} \approx -0,816$. La courbe présente donc un extremum local entre les deux, et les tangentes prises du mauvais côté de cet extremum renvoient systématiquement du côté opposé à la racine. C'est le mécanisme de tous les cycles : un extremum local situé entre le point de départ et la racine.

8. *Un jeu d'hypothèses qui garantit la convergence.* Voici l'énoncé de la section 25, sous la forme qui se vérifie le plus vite.

Théorème

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment $[a, b]$ telle que :

1. $f(a)$ et $f(b)$ sont de **signes contraires** ;
2. f' ne s'annule **pas** sur $[a, b]$;
3. f'' garde un **signe constant** sur $[a, b]$, autrement dit f y est convexe ou concave.

Alors f admet une unique racine r dans $[a, b]$, et si l'on choisit $x_0 \in [a, b]$ du côté où $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ sont de même signe, la suite de Newton est **monotone**, reste dans $[a, b]$ et converge vers r .

Vérification sur la partie B, avec $f(x) = x^3 - 2$ et $[a, b] = [1, 2]$.

- f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1, 2]$.
- $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 6 > 0$: signes contraires. **Hypothèse 1 vérifiée.**
- $f'(x) = 3x^2 \geq 3 > 0$ sur $[1, 2]$: la dérivée ne s'annule pas. **Hypothèse 2 vérifiée.**
- $f''(x) = 6x \geq 6 > 0$ sur $[1, 2]$: signe constant, la fonction est convexe. **Hypothèse 3 vérifiée.**
- Le choix de x_0 : on a $f(2) = 6 > 0$ et $f''(2) = 12 > 0$, de même signe. Le point $x_0 = 2$ est donc le bon départ.

La conclusion du théorème est exactement ce qu'on a observé : la suite est **décroissante**, minorée par $\sqrt[3]{2}$, et converge vers elle. Le tableau de la question 2 le confirme chiffre par chiffre. $\square$

Quelle hypothèse est en défaut dans chacun des trois échecs.

Échec	Hypothèse en défaut
5 racine cubique	La régularité et l'hypothèse 2 : g n'est ni de classe $\mathcal{C}^2$ ni dérivable en la racine 0, et g' n'y est pas minorée, elle y explose.
6 $x_0 = 0$ pour $x^3 - 2$	L'hypothèse 2 : sur tout segment contenant 0, la dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule. Le point de départ n'est pas dans un segment admissible.
7 le cycle	Les hypothèses 2 et 3 : entre $x_0 = 0$ et la racine $r \approx -1,77$, la dérivée φ' s'annule en $-\sqrt{2/3}$, et $\varphi''(x) = 6x$ change de signe en 0.

Pourquoi il faut vérifier avant d'itérer, et non après. Les trois échecs ne se signalent pas de la même manière, et deux d'entre eux ne se signalent pas du tout. Le cas **6** produit une erreur visible, une division par zéro, et alerte donc l'utilisateur. Le cas **5** produit une suite qui grandit, ce qui se remarque au bout de quelques itérations. Mais le cas **7** produit une suite parfaitement calme, bornée, dont toutes les valeurs sont raisonnables, et un programme qui ne teste que « $|x_{n+1} - x_n|$ est-il petit ? » tournerait indéfiniment sans rien signaler. **Le contrôle des hypothèses est le seul moyen de savoir qu'on cherche là où il y a quelque chose à trouver.**

Le protocole raisonnable, en pratique. On localise d'abord la racine par un changement de signe et, si besoin, quelques dichotomies, ce qui est lent mais infallible ; on vérifie sur le segment obtenu que f' ne s'annule pas et que f'' garde un signe ; **puis** on lance Newton, qui finit le travail en trois ou quatre itérations. C'est la combinaison des deux méthodes qui est bonne, pas l'une contre l'autre.

Commentaire. L'exercice se lit en deux moitiés qui se contredisent en apparence.

La partie **B** est la publicité de la méthode, et elle n'est pas exagérée : quatre itérations contre vingt et une, six décimales exactes obtenues en une étape à partir de deux. Le doublement du nombre de décimales, constaté sur la table de la question **3**, est la signature de la convergence quadratique, et il explique que toutes les bibliothèques de calcul l'emploient.

La partie **C** est le mode d'emploi, et elle est plus longue exprès. Les trois échecs sont trois façons pour la tangente de mal se comporter : une tangente presque verticale à la racine renvoie trop loin (cas **5**), une tangente horizontale ne renvoie nulle part (cas **6**), et deux tangentes peuvent se renvoyer la balle indéfiniment (cas **7**). Dans les trois cas, la fonction est pourtant continue et possède une racine que la dichotomie trouverait sans peine.

La morale est celle de la question **3** : Newton **affine**, il ne **cherche** pas. Sa vitesse est un comportement local, valable au voisinage de la racine, et payé par des hypothèses que le point de départ doit satisfaire. Un exercice de partiel qui demande « appliquer la méthode de Newton » attend donc trois choses, et pas seulement la troisième : la localisation de la racine, la vérification des hypothèses sur le segment retenu, et le calcul des itérés.

Exercice 34 ★★★ Six copies à corriger

Notions : Dérivabilité en un point : taux d'accroissement, tangente, approximation affine, dérivabilité entraîne continuité, Extremum local intérieur et théorème de Rolle, Variations et signe de la dérivée, stricte monotonie, inégalités par étude de fonction, Théorème de la limite de la dérivée et théorème de Darboux, Convexité : inégalité des pentes, caractérisations par la dérivée première et seconde, points d'inflexion, inégalités, Développement limité : définition, unicité, troncature, parité

Ce n'est pas un exercice de calcul, c'est un exercice de **rigueur de rédaction**, et c'est ce que le chapitre sanctionne réellement en partiel. Six extraits de copie sont donnés, chacun découpé en lignes numérotées, et chacun se terminant par une conclusion qui a l'air juste.

Pour chacun des six, on demande trois choses, dans cet ordre.

Méthode

1. **La conclusion est-elle vraie ou fausse ?** On répond par un calcul ou un contre-exemple, pas par une impression.
2. **Quelle ligne exactement est fautive ?** On ne dit pas « c'est faux », on dit « la faute est à la ligne k », et on dit pourquoi.
3. **Rédiger la version correcte**, complète, telle qu'on l'écrirait sur sa propre copie.

Attention. Deux de ces six copies ont une conclusion **juste** et une démonstration **fausse**. C'est le cas le plus difficile à repérer, parce que rien ne dépasse à la lecture, et le plus fréquent en situation. Une conclusion vraie ne valide jamais rétroactivement le raisonnement qui y mène.

Copie 1

Sujet. Soit $f(x) = (x^2 + 3)^5$. Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Ligne 1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

Ligne 2. Sa dérivée vaut $f'(x) = 5(x^2 + 3)^4$.

Ligne 3. Pour tout réel x , on a $x^2 + 3 \geq 3 > 0$, donc $(x^2 + 3)^4 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Ligne 4. La dérivée est strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Copie 2

Sujet. Soit $f(x) = x^5$. Déterminer les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}$.

Ligne 1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4$.

Ligne 2. On résout $f'(x) = 0$, ce qui donne $x = 0$ comme unique solution.

Ligne 3. Le lemme de Fermat affirme qu'en un extremum local intérieur, la dérivée s'annule.

Ligne 4. Donc f admet un extremum local en 0, et c'est le seul.

Copie 3

Sujet. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(3\pi x)$ pour $x \in]0, 1[$ et $f(0) = -1$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ligne 1. On a $f(0) = -1$ et $f(1) = \cos(3\pi) = -1$, donc $f(0) = f(1)$.

Ligne 2. La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto 3\pi x$ et du cosinus.

Ligne 3. Les hypothèses du théorème de Rolle sont donc vérifiées.

Ligne 4. Il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Copie 4

Sujet. Montrer que la fonction tangente est strictement croissante sur son ensemble de définition $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ligne 1. La fonction $\tan$ est dérivable sur $\mathcal{D}$, et $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Ligne 2. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $1 + \tan^2 x \geq 1 > 0$.

Ligne 3. La dérivée est donc strictement positive sur $\mathcal{D}$.

Ligne 4. Donc $\tan$ est strictement croissante sur $\mathcal{D}$.

Copie 5

Sujet. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ pour $x > 0$ et $f(x) = x - 1$ pour $x \leq 0$. Déterminer $f'(0)$.

Ligne 1. Pour $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et pour $x < 0$, on a $f'(x) = 1$.

Ligne 2. Quand $x \rightarrow 0^+$, $f'(x) \rightarrow 1$; quand $x \rightarrow 0^-$, $f'(x) \rightarrow 1$.

Ligne 3. La dérivée f' admet donc la limite 1 en 0.

Ligne 4. Donc $f'(0) = 1$.

Copie 6

Sujet. Donner le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+x}$.

Ligne 1. On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Ligne 2. La dérivée de $x \mapsto \ln(1+x)$ est $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Ligne 3. En dérivant le développement terme à terme, on obtient $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.

Question finale

7. Classer les six fautes selon leur **nature**, puis dire lesquelles des six conclusions étaient vraies. Quelle est, des quatre natures de faute recensées, celle contre laquelle une relecture ne protège pas ?

Corrigé

Copie 1

La conclusion est FAUSSE. La fonction f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$: elle est paire, puisque $f(-x) = ((-x)^2 + 3)^5 = f(x)$, et une fonction paire non constante ne peut pas être monotone

sur $\mathbb{R}$. Concrètement,

$$f(-1) = 4^5 = 1024 = f(1),$$

alors que $-1 < 1$: la stricte croissance imposerait $f(-1) < f(1)$.

La faute est à la ligne 2. La dérivée d'une composée $u \mapsto u^5$ suivie de $x \mapsto x^2 + 3$ s'écrit $5u^4 \times u'$, et le facteur $u'(x) = 2x$ a été **oublié**. La dérivée correcte est

$$f'(x) = 5(x^2 + 3)^4 \times 2x = 10x(x^2 + 3)^4.$$

Les lignes suivantes sont impeccables et c'est ce qui rend la copie dangereuse. La ligne 3 raisonne juste sur une expression fausse, et la ligne 4 invoque correctement le théorème de la section 15, en prenant même soin de signaler que $\mathbb{R}$ est un intervalle. Le seul défaut est un facteur $2x$ absent trois lignes plus haut.

La version correcte.

La fonction $x \mapsto x^2 + 3$ est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[3, +\infty[$, et $u \mapsto u^5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 10x(x^2 + 3)^4.$$

Le facteur $(x^2 + 3)^4$ est strictement positif pour tout réel x , donc $f'(x)$ est du **signe de x** . Ainsi f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle admet un minimum global en 0, de valeur $f(0) = 3^5 = 243$, et **elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$** : l'énoncé du sujet demandait de démontrer quelque chose de faux. $\square$

Le contrôle qui aurait sauvé la copie. Deux secondes suffisaient : f est visiblement paire, donc elle ne peut pas être strictement monotone sur $\mathbb{R}$. **Un coup d'œil à la parité avant de dériver élimine la moitié des conclusions absurdes.**

Copie 2

La conclusion est FAUSSE. La fonction $x \mapsto x^5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle n'admet **aucun** extremum local. En effet, pour tout $x \neq 0$ voisin de 0, on a $x^5 < 0$ si $x < 0$ et $x^5 > 0$ si $x > 0$: la valeur $f(0) = 0$ n'est ni un maximum ni un minimum local, puisque f prend, dans tout voisinage de 0, des valeurs strictement plus petites et strictement plus grandes.

La faute est à la ligne 4, et elle consiste à utiliser la **réciproque** du lemme de Fermat. La ligne 3 énonce correctement le lemme :

$$\text{extremum local intérieur} \implies f' = 0.$$

La ligne 4 s'en sert dans l'autre sens :

$$f' = 0 \implies \text{extremum local},$$

ce qui n'est pas le lemme, et ce qui est faux. Un point où f' s'annule s'appelle un **point critique** ; le lemme de Fermat dit que les extremums intérieurs sont des points critiques, il ne dit rien de la réciproque, et la section 10 le signale explicitement.

La version correcte.

La fonction $f(x) = x^5$ est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 5x^4$. On a $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x , avec égalité si et seulement si $x = 0$. La dérivée est donc positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en un point isolé : d'après la section 15, f est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

Une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ n'admet aucun extremum local : pour tout a réel et tout voisinage $]a - \delta, a + \delta[$, on a $f(a - \frac{\delta}{2}) < f(a) < f(a + \frac{\delta}{2})$. Donc **f n'a pas d'extremum local.** $\square$

Ce que le point 0 est réellement. Un point d'inflexion à tangente horizontale. En effet $f''(x) = 20x^3$, qui **change de signe** en 0 : la fonction est concave sur $] - \infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$. Le point critique existe bien, il n'est simplement pas de la nature qu'on attendait. C'est le complément indispensable à la correction : dire ce qui est faux ne suffit pas, il faut dire ce qui est vrai.

Le tableau des trois natures possibles d'un point critique. Si $f'(a) = 0$, alors le point d'abscisse a est ou bien un maximum local, ou bien un minimum local, ou bien **ni l'un ni l'autre**, et c'est le signe de f' **de part et d'autre de** a qui décide, jamais l'annulation seule.

Copie 3

La conclusion est VRAIE. C'est la première des deux copies annoncées. En effet, pour $x \in]0, 1[$, la dérivée vaut $f'(x) = -3\pi \sin(3\pi x)$, et elle s'annule dès que $3\pi x$ est un multiple entier de π , c'est-à-dire pour

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x = \frac{2}{3},$$

deux points de $]0, 1[$. Il existe donc bien un tel c , et il en existe même deux.

La faute est à la ligne 3. Le théorème de Rolle exige **trois** hypothèses, énoncées à la section 11 :

- f continue sur le segment **fermé** $[a, b]$;
- f dérivable sur l'intervalle **ouvert** $]a, b[$;
- $f(a) = f(b)$.

La copie a vérifié la troisième (ligne 1) et la deuxième (ligne 2), et elle a **sauté la première**. Or celle-ci est fautive : la fonction f n'est pas continue en 0, puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(3\pi x) = \cos 0 = 1, \quad \text{alors que} \quad f(0) = -1.$$

Le théorème de Rolle **ne s'applique pas**, et la ligne 4 n'est donc pas démontrée, même si elle est vraie.

Les deux versions correctes. Deux rédactions valides existent, et il est instructif de les voir toutes les deux.

Première rédaction, par calcul direct. Pour $x \in]0, 1[$, la fonction f coïncide avec $x \mapsto \cos(3\pi x)$, dérivable comme composée, et

$$f'(x) = -3\pi \sin(3\pi x).$$

Le choix $c = \frac{1}{3}$ donne $3\pi c = \pi$, donc $f'(c) = -3\pi \sin \pi = 0$, et $c \in]0, 1[$. La conclusion est établie sans invoquer aucun théorème. $\square$

Seconde rédaction, par Rolle sur un segment bien choisi. On applique Rolle non pas à $[0, 1]$, où la continuité tombe, mais à un segment contenu dans $]0, 1[$, où f est continue. Prenons $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$:

- f est continue sur $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$, ce segment étant contenu dans $]0, 1[$ où f coïncide avec une composée de fonctions continues ;
- f est dérivable sur $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[$, pour la même raison ;
- $f\left(\frac{1}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$, donc les deux valeurs coïncident.

Le théorème de Rolle s'applique et fournit $c \in \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[\subset]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$. $\square$

Ce que cette copie enseigne. La valeur $f(0) = -1$ a été choisie exprès pour que $f(0) = f(1)$ soit vrai tout en cassant la continuité. La copie a donc vérifié l'hypothèse la plus visible, celle qui se calcule, et oublié celle qui se lit. **On vérifie les hypothèses dans l'ordre où le théorème les énonce, pas dans l'ordre où elles sont faciles.**

Le complément de l'exercice 09. Celui-ci construisait, pour chacune des trois hypothèses, un contre-exemple où la conclusion est **fausse** : c'est ce qui prouve que l'hypothèse ne peut pas être supprimée de l'énoncé. La présente copie montre l'autre situation, celle où la conclusion se trouve **vraie** malgré l'hypothèse manquante. Les deux sont nécessaires pour comprendre ce qu'un théorème dit : quand ses hypothèses tombent, il est **muet**, ce qui ne veut pas dire que sa conclusion est fausse.

Copie 4

La conclusion est FAUSSE. Prenons $x_1 = \frac{\pi}{3}$ et $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, tous deux dans $\mathcal{D}$, avec $x_1 < x_2$. Alors

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \approx 1,73 \quad \text{et} \quad \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} \approx -1,73.$$

On a donc $x_1 < x_2$ et $\tan x_1 > \tan x_2$: la fonction $\tan$ **n'est pas croissante sur $\mathcal{D}$** .

La faute est à la ligne 4. Le théorème qui relie le signe de la dérivée à la monotonie, démontré à la section 15 à partir de l'égalité des accroissements finis, porte sur un **intervalle**. Or $\mathcal{D}$ n'est pas un intervalle : il contient $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ mais pas $\frac{\pi}{2}$, qui est compris entre les deux.

Pourquoi l'hypothèse d'intervalle est indispensable, et pas décorative. La démonstration du théorème consiste à appliquer l'égalité des accroissements finis au segment $[x_1, x_2]$, ce qui exige que ce segment soit **contenu dans le domaine**. Ici, $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ contient $\frac{\pi}{2}$, où $\tan$ n'est pas définie : il n'y a aucun accroissement fini à écrire, et le théorème n'a rien à dire.

La version correcte.

Posons, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[,$$

de sorte que $\mathcal{D}$ est la réunion disjointe des I_k . Chaque I_k est un **intervalle**, et $\tan$ y est dérivable de dérivée $1 + \tan^2 > 0$. D'après la section 15, $\tan$ est donc **strictement croissante sur chaque I_k** .

En revanche, elle n'est pas monotone sur $\mathcal{D}$, comme le contre-exemple ci-dessus le montre. $\square$

La formulation à retenir. On écrit « strictement croissante sur chaque intervalle de son domaine », ou bien on nomme l'intervalle : « strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ». On n'écrit jamais « croissante sur son ensemble de définition » quand celui-ci n'est pas un intervalle, et c'est le cas pour $\tan$, pour $x \mapsto \frac{1}{x}$, et pour toute fonction dont le domaine est troué.

Le lien avec l'exercice 16. Celui-ci démontrait l'énoncé et construisait un contre-exemple sur une réunion de deux intervalles fabriquée pour l'occasion. La tangente montre que le phénomène n'a rien d'artificiel : il se produit sur l'une des fonctions les plus courantes du programme, dont le domaine est une réunion d'une **infinité** d'intervalles, et dont personne ne pense spontanément à dire qu'il n'est pas un intervalle.

Copie 5

La conclusion est FAUSSE, et plus radicalement qu'elle n'en a l'air : non seulement $f'(0) \neq 1$, mais $f'(0)$ **n'existe pas**.

La démonstration. Le taux d'accroissement à droite s'écrit, pour $x > 0$ et puisque $f(0) = 0 - 1 =$

−1,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\operatorname{Arctan} x + 1}{x}.$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, le numérateur tend vers $\operatorname{Arctan} 0 + 1 = 1$ et le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives, donc ce quotient tend vers $+\infty$. Il n'y a pas de dérivée à droite finie, donc pas de dérivée en 0.

La faute est à la ligne 4. Elle utilise, sans le nommer, le **théorème de la limite de la dérivée** de la section 17, dont l'énoncé exact est le suivant.

Théorème

Soit f **continue** sur un intervalle I contenant a , dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $f'(x)$ admet une limite ℓ finie quand $x \rightarrow a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

L'hypothèse manquante est la **continuité de f en a** , et elle est ici en défaut :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \operatorname{Arctan} 0 = 0, \quad \text{alors que} \quad f(0) = -1.$$

La fonction f fait un saut de -1 à 0 en franchissant l'origine par la droite. Elle n'est donc pas continue en 0 , donc pas dérivable en 0 , indépendamment de tout calcul de limite de f' .

La version correcte.

Continuité en 0. À gauche, $f(x) = x - 1 \rightarrow -1 = f(0)$: f est continue à gauche en 0 . À droite, $f(x) = \operatorname{Arctan} x \rightarrow 0 \neq f(0)$: f **n'est pas continue à droite** en 0 . La fonction f n'est donc pas continue en 0 .

Conclusion. La dérivabilité entraînant la continuité (section 4), f **n'est pas dérivable en 0**, et $f'(0)$ n'existe pas. La question du sujet n'a pas de réponse.

Ce qu'on peut néanmoins affirmer. La restriction de f à $] - \infty, 0]$ est continue en 0 et dérivable sur $] - \infty, 0[$ de dérivée constante 1. Le théorème de la limite de la dérivée, appliqué à cette restriction, donne l'existence de la dérivée **à gauche** :

$$f'_g(0) = 1,$$

ce qu'on retrouve directement puisque $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{(x - 1) + 1}{x} = 1$ pour $x < 0$. $\square$

Ce que la copie a fait de bien, et pourquoi c'est insuffisant. Le calcul des lignes 1 et 2 est correct, et la limite de f' en 0 vaut bien 1 des deux côtés. Cela ne suffit pas, parce que f' **peut très bien avoir une limite là où f n'a pas de dérivée** : il manque le pont entre les deux, et ce pont s'appelle la continuité. La leçon est générale : le théorème de la limite de la dérivée ne se cite pas sans vérifier d'abord la continuité, qui est de très loin son hypothèse la plus oubliée.

Copie 6

La conclusion est VRAIE. C'est la seconde des deux copies annoncées. Le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+x}$ est bien

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

La faute est à la ligne 3. Elle emploie une opération qui **n'existe pas** : la dérivation d'un développement limité. Le cours établit à la section 21 le théorème de **primitivation** d'un développement limité, qui va du développement de f' vers celui de f , et l'exercice 26 démontre que **la réciproque est fautive** : une fonction peut admettre un développement limité d'ordre $n + 1$ sans que sa dérivée admette de développement limité d'ordre n .

La ligne 3 utilise donc un théorème inexistant, et le fait qu'elle produise le bon résultat est une conséquence de la régularité de la fonction, pas de la validité de la méthode.

Les deux versions correctes.

Par substitution, qui est la plus courte. On écrit $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$. La quantité $-x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, donc la substitution dans le développement usuel de $\frac{1}{1-u}$ à l'ordre 2 est licite :

$$\frac{1}{1+x} = 1 + (-x) + (-x)^2 + o(x^2) = 1 - x + x^2 + o(x^2). \quad \square$$

Par Taylor-Young, si l'on préfère partir des dérivées. La fonction $g(x) = \frac{1}{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$, intervalle ouvert contenant 0, avec

$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad g''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

donc $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$ et $g''(0) = 2$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne

$$g(x) = 1 - x + \frac{2}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - x + x^2 + o(x^2). \quad \square$$

La règle, dans les deux sens, à retenir telle quelle.

- **Primitiver un développement limité : autorisé**, sous les hypothèses de la section 21, et cela fait gagner un ordre. C'est ainsi qu'on obtient le développement d'Arctan à partir de celui de $\frac{1}{1+x^2}$.
- **Dériver un développement limité : interdit**. Il n'existe aucun énoncé de ce type, et le contre-exemple de l'exercice 26 le confirme. Quand on a besoin du développement de f' , on l'obtient soit directement, soit par Taylor-Young appliqué à f' lorsque la régularité le permet.

Question finale

7. Les quatre natures de faute.

Nature	Copies	Ce qui s'est passé
Erreur de calcul	1	Un facteur oublié dans la dérivée d'une composée. Le raisonnement est juste, l'expression est fautive.
Réciproque abusive	2, 6	Un théorème vrai est employé dans le sens inverse : la réciproque du lemme de Fermat, la réciproque du théorème de primitivation.
Hypothèse non vérifiée	3, 4, 5	Le théorème invoqué est le bon, énoncé dans le bon sens, mais l'une de ses hypothèses est fautive : la continuité aux bornes, le fait d'être un intervalle, la continuité au point.
Théorème inexistant	6	La dérivation d'un développement limité n'est l'énoncé d'aucun résultat du cours.

La copie 6 relève de deux natures à la fois, ce qui est fréquent : employer la réciproque d'un théorème vrai, c'est en général invoquer un théorème qui n'existe pas.

Les conclusions vraies. Deux sur six : la copie **3** et la copie **6**. Dans les deux cas, le résultat annoncé est correct et la démonstration ne le prouve pas.

La nature contre laquelle une relecture ne protège pas. C'est l'**hypothèse non vérifiée**, et c'est même la seule des quatre qui résiste à la relecture.

- Une erreur de calcul se retrouve en refaisant le calcul, ou en testant une valeur : c'est ce qu'aurait fait le contrôle de parité de la copie 1.
- Une réciproque abusive se voit en réécrivant le théorème invoqué avec ses flèches : c'est ce qu'aurait fait la copie 2 en écrivant le lemme de Fermat dans le bon sens.
- Un théorème inexistant se détecte en cherchant sa référence dans le cours.

Mais une hypothèse non vérifiée ne laisse **aucune trace** sur la page. Toutes les lignes sont individuellement correctes, la conclusion découle du théorème cité, et rien dans le texte ne signale l'absence. La seule protection est procédurale : **on récite les hypothèses du théorème et on les coche une par une, avant de l'appliquer**. Les copies 3, 4 et 5 en sont trois exemples,

et dans les trois cas l'hypothèse manquante était la moins calculatoire de la liste, donc la plus facile à passer sous silence. $\square$

Commentaire. Ce que cet exercice mesure ne se mesure nulle part ailleurs dans le chapitre : la capacité à relire un raisonnement plutôt qu'à le produire.

Trois observations en découlent, et ce sont celles qu'un correcteur de partiel fait chaque année.

Une conclusion juste ne rachète rien. Les copies 3 et 6 arrivent au bon résultat et ne démontrent rien. Elles sont plus graves que les autres, parce que l'auteur n'a aucune raison de se relire : rien ne cloche. C'est la raison pour laquelle un barème sérieux ne note pas la conclusion, il note la démonstration.

Les hypothèses ne se vérifient pas par ordre de facilité. Les copies 3 et 5 ont vérifié ce qui se calculait, l'égalité $f(0) = f(1)$ pour l'une, la limite de f' pour l'autre, et ont omis ce qui se lisait, la continuité. Le remède est de recopier les hypothèses du théorème dans l'ordre de son énoncé, puis de les traiter dans cet ordre, même si la première est « évidente ».

Le domaine est une donnée du problème. La copie 4 le montre sur le cas le plus canonique : $\tan$ a une dérivée strictement positive partout où elle est définie, et elle n'est pas croissante. Le théorème du cours contient le mot « intervalle », et ce mot est une hypothèse, pas une commodité de rédaction. Chaque fois que le domaine d'une fonction est troué, une conclusion globale de monotonie est suspecte.