

Devoir surveillé — Dérivation, accroissements finis et développements limités

L1 maths — 180 min

Durée : 180 min — Barème : 20 points. Calculatrice selon les consignes de l'énoncé. La rédaction et la clarté comptent.

Consignes générales. Durée : 3 h. Calculatrice et documents interdits ; les valeurs numériques utiles sont données dans les énoncés, ou calculables à la main sans calculatrice. **Les quatre exercices sont indépendants** et peuvent être traités dans l'ordre que l'on veut ; à titre indicatif, ils pèsent environ 35 min, 30 min, 35 min et 80 min. Le barème est indiqué question par question et totalise 20 points. La rigueur de la rédaction est notée au même titre que les résultats : un théorème doit être **nommé**, et ses hypothèses **vérifiées par écrit**, avant d'être invoqué.

Exercice 1 (4 points) — Le maximum de deux fonctions dérivables

Pour deux réels α et β , on note $\max(\alpha, \beta)$ le plus grand des deux. Si u et v sont deux fonctions définies sur un intervalle I , on note w la fonction définie sur I par

$$w(x) = \max(u(x), v(x)).$$

Tout l'exercice consiste à décider où w est dérivable **sans jamais l'expliciter par morceaux**, sauf dans les deux dernières questions où l'on vérifiera le critère obtenu.

1. (0,5 pt) Démontrer que, pour tous réels α et β ,

$$\max(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2},$$

et écrire l'identité analogue pour $\min(\alpha, \beta)$, dont on pourra se servir librement dans la suite. En déduire que si u et v sont continues sur I , alors w l'est aussi.

2. (0,75 pt) Soient u et v dérivables sur I , et soit $x_0 \in I$ tel que $u(x_0) \neq v(x_0)$. Démontrer que w est dérivable en x_0 , et donner $w'(x_0)$. On indiquera l'endroit **exact** où la continuité de $u - v$ est utilisée, et ce que l'on ne pourrait pas conclure sans elle.

3. (1,5 pt) Soient u et v dérivables sur I , et soit x_0 un point **intérieur** à I tel que $u(x_0) = v(x_0)$.

- a. Démontrer que, pour tout $x \in I$ tel que $x > x_0$,

$$\frac{w(x) - w(x_0)}{x - x_0} = \max\left(\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}, \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}\right),$$

et que pour $x < x_0$ la même égalité vaut avec un **minimum** à la place du maximum.

- b. En déduire les dérivées à droite et à gauche de w en x_0 , exprimées à l'aide de $u'(x_0)$ et $v'(x_0)$. Conclure : w est dérivable en x_0 **si et seulement si** $u'(x_0) = v'(x_0)$.

4. (0,75 pt) On prend $I = [0, 2\pi]$, $u = \sin$ et $v = \cos$. Déterminer les points de $[0, 2\pi]$ où w n'est pas dérivable, donner en chacun les deux dérivées latérales, et expliciter w par morceaux.

5. (0,5 pt) On prend $I = \mathbb{R}$, $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^3$; les deux courbes se rencontrent en 0 et en 1. En lequel de ces deux points w est-elle dérivable? Que faut-il en conclure sur l'idée « les deux courbes se coupent, donc le maximum y a un point anguleux »? Exhiber enfin deux fonctions dérivables qui **échangent** effectivement leurs rôles en 0 et dont le maximum est pourtant dérivable en 0.

Exercice 2 (4 points) — Deux approximations concurrentes de l'exponentielle

Pour approcher e^x au voisinage de 0, on dispose du polynôme de Taylor d'ordre 2 de $\exp$ en 0,

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

et l'on propose de lui opposer la fraction

$$Q(x) = \frac{2+x}{2-x}, \quad \text{définie pour } x \neq 2.$$

Les deux se calculent en trois opérations. L'exercice décide laquelle est la meilleure, puis mesure ce que le développement limité autorise à en dire, et ce qu'il n'autorise pas.

1. (0,75 pt) Justifier que Q admet en 0 un développement limité à tout ordre, en nommant le théorème employé et en vérifiant ses hypothèses. Puis, en écrivant $Q(x) = (2+x) \times \frac{1}{2-x}$, dire à quel ordre chacun des deux facteurs doit être développé pour obtenir le développement limité d'ordre 3 du produit. On remarquera que l'un des deux facteurs est un **polynôme**, et l'on dira précisément quelle conséquence cela a sur l'ordre.

2. (1 pt) Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de Q . On se ramènera au développement usuel de $\frac{1}{1-u}$ en factorisant le dénominateur par sa valeur en 0, et l'on dira quelle quantité joue le rôle de u et pourquoi elle tend vers 0.

3. (0,75 pt) Rappeler le développement limité d'ordre 3 en 0 de e^x , puis donner ceux de $e^x - P(x)$ et de $e^x - Q(x)$. Laquelle des deux approximations est la meilleure au voisinage de 0, et dans quel rapport ? Pour $x > 0$ petit, chacune est-elle **par excès** ou **par défaut** ?

4. (0,5 pt) Contrôle numérique. Calculer $P(0,2)$ et $Q(0,2)$ sous forme décimale, et les comparer à

$$e^{0,2} = 1,22140276 \dots$$

Les signes des deux écarts sont-ils ceux prévus à la question **3** ? Leur rapport vaut-il 2 ? Expliquer l'écart constaté en poussant les deux développements d'un ordre de plus.

5. (1 pt) *Ce que le développement limité ne dit pas.* La question **3** donne le signe de $e^x - Q(x)$ pour $x > 0$ assez **petit**, sans dire à partir de quel seuil. Démontrer que l'inégalité

$$e^x \leq \frac{2+x}{2-x}$$

vaut en fait pour tout $x \in [0, 2[$. On étudiera pour cela la fonction ψ définie sur $] -2, 2[$ par $\psi(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x) - x$. Dire enfin, en une phrase, ce que le développement limité donnait et ce qu'il ne donnait pas.

Exercice 3 (4 points) — Où faire atterrir un pipeline

Une plateforme A est installée en mer, à 4 km d'une côte supposée **rectiligne**. On note H le point de la côte le plus proche de A , c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire à la côte passant par A : la distance AH vaut donc 4 km. La raffinerie B est située **sur la côte**, à 10 km de H .

On relie A à B par un pipeline en deux tronçons : un tronçon rectiligne en mer, de A jusqu'à un point d'atterrissage M situé sur la côte entre H et B , puis un tronçon le long de la côte, de M jusqu'à B . On note x la distance HM en kilomètres, de sorte que $x \in [0, 10]$: la valeur $x = 0$ correspond à un atterrissage en H , la valeur $x = 10$ à un tronçon marin allant directement de A à B .

La pose coûte 5 millions d'euros par kilomètre en mer et 3 millions d'euros par kilomètre à terre. On note $f(x)$ le coût total, en millions d'euros.

1. (0,5 pt) Établir que $f(x) = 5\sqrt{16 + x^2} + 3(10 - x)$ pour tout $x \in [0, 10]$, puis démontrer que f **atteint** un minimum sur $[0, 10]$. On nommera le théorème employé et l'on vérifiera ses hypothèses.

2. (0,75 pt) Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$. En déduire que f est **convexe** sur $[0, 10]$, puis que l'équation $f'(x) = 0$ y admet **au plus** une solution.

3. (1,25 pt) Résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0, 10]$; on note x^* la solution obtenue, et l'on justifiera l'élévation au carré. Démontrer ensuite, **par la convexité et la position de la courbe par rapport à sa tangente en x^*** , et sans dresser aucun tableau, que x^* réalise le minimum de f sur $[0, 10]$. Donner le coût minimal, puis le comparer aux deux tracés « évidents » : le tronçon unique en mer de A à B , et le trajet $A \rightarrow H$ suivi de $H \rightarrow B$. Pour le premier, on donnera un encadrement à 0,5 million près, sans calculatrice.

4. (0,75 pt) On note θ l'angle, au point M , entre le tronçon marin MA et la perpendiculaire à la côte. Démontrer que la condition $f'(x) = 0$ s'écrit $5 \sin \theta = 3$, et donner $\sin \theta$ à l'optimum. Traiter enfin le cas où le coût marin serait **inférieur ou égal** au coût terrestre : où faudrait-il alors faire atterrir le pipeline, et pourquoi le lemme de Fermat ne permet-il rien d'en conclure ?

5. (0,75 pt) *Le prix d'une erreur de placement.* Pour des raisons de terrain, l'atterrissage est finalement implanté en un point x_0 tel que $|x_0 - x^*| \leq 0,1$ km. Majorer le surcoût $|f(x_0) - f(x^*)|$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis **deux fois** : d'abord à f' sur l'intervalle $[2,9; 3,1]$, pour y majorer $|f'|$, puis à f sur ce même intervalle. Conclure en euros, et dire ce que ce résultat enseigne sur le voisinage d'un minimum.

Si la question 3 n'a pas abouti, on admettra $x^ = 3$ pour traiter les questions 4 et 5.*

Exercice 4 (8 points) — Problème : l'erreur de l'interpolation affine

Quand on ne connaît une fonction que par deux de ses valeurs, $f(a)$ et $f(b)$, la seule chose raisonnable à faire entre les deux est de remplacer la courbe par la **corde**. C'est ce que fait toute lecture d'une table de valeurs, et l'on appelle cela l'**interpolation affine**. Ce problème établit une formule **exacte** de l'erreur commise, puis en tire une majoration, un signe, et un pas de table.

Dans tout le problème, $a < b$ sont deux réels, f est une fonction définie sur $[a, b]$, et L désigne l'unique fonction affine telle que $L(a) = f(a)$ et $L(b) = f(b)$; on note

$$E = f - L$$

l'erreur d'interpolation. Le résultat à établir est le suivant.

Théorème

Erreur de l'interpolation affine. Soit f continue sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$. Alors, pour tout $x_0 \in]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$E(x_0) = f(x_0) - L(x_0) = \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(c).$$

Aucune intégrale n'intervient : tout vient du théorème de Rolle, appliqué **trois fois**.

Partie A — Sur un exemple (2 points)

Dans cette partie, $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ et $b = 4$.

A.1. (0,5 pt) Déterminer L , et vérifier $L(1) = f(1)$ ainsi que $L(4) = f(4)$.

A.2. (0,75 pt) Calculer E' , dresser le tableau du signe de E' et des variations de E sur $[1, 4]$, et en déduire le point où $|E|$ est maximal ainsi que cette valeur maximale. De quel côté de la corde se trouve la courbe ?

A.3. (0,75 pt) Écrire l'égalité du théorème au point $x_0 = 2$, et en déduire la valeur **exacte** du réel c qu'elle fournit. Ce réel est-il unique ? Vérifier qu'il appartient bien à $]1, 4[$.

Partie B — La démonstration (3,5 points)

Dans toute cette partie, f est continue sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$, et x_0 est un point **fixé** de $]a, b[$.

B.1. (0,5 pt) Donner l'expression de L en fonction de a , b , $f(a)$ et $f(b)$. En déduire que $L'' = 0$, puis que $E(a) = E(b) = 0$ et que $E'' = f''$ sur $]a, b[$.

B.2. (0,75 pt) On pose, pour $t \in [a, b]$,

$$\varphi(t) = E(t) - K \frac{(t - a)(t - b)}{2},$$

où K est un réel à choisir. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, et dire ce qu'on remarque. Déterminer ensuite l'unique réel K tel que $\varphi(x_0) = 0$, en justifiant son existence **et** son unicité.

B.3. (1,25 pt) Appliquer le théorème de Rolle à φ sur $[a, x_0]$, puis sur $[x_0, b]$, en vérifiant **une par une** ses trois hypothèses dans chacun des deux cas. En déduire l'existence de deux réels $c_1 < c_2$ de $]a, b[$ tels que $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$. On dira où sert le fait que x_0 est **strictement** compris entre a et b .

B.4. (1 pt) Appliquer une troisième fois le théorème de Rolle, à la fonction φ' sur le segment $[c_1, c_2]$; on dira en particulier pourquoi φ' est continue sur ce segment. Calculer φ'' , et conclure la démonstration.

Partie C — Ce que la formule donne (2,5 points)

Dans toute cette partie, on suppose de plus f de **classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a, b]$** , on note M_2 un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$, et l'on pose $h = b - a$. On dira à la question **C.3** pourquoi cette hypothèse renforcée est nécessaire.

C.1. (0,75 pt) Démontrer que

$$\max_{x \in [a, b]} |(x-a)(x-b)| = \frac{h^2}{4},$$

en précisant le point où ce maximum est atteint. En déduire que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - L(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Appliquer cette majoration à la situation de la partie A, la comparer à l'erreur réelle, et commenter l'écart.

C.2. (0,5 pt) On suppose de plus $f'' \geq 0$ sur $]a, b[$. Démontrer que la courbe de f est **au-dessous** de sa corde sur $[a, b]$. Quel énoncé de la section 24 du cours retrouve-t-on ainsi ? Qu'apporte la formule que cet énoncé ne donnait pas ?

C.3. (0,5 pt) On approche maintenant f sur $[a, b]$ par sa **tangente en a** , et non plus par sa corde. Majorer l'erreur commise à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 au point a , puis comparer cette majoration à celle de la question **C.1**. Laquelle des deux approximations est la meilleure sur $[a, b]$, et dans quel rapport ? Que coûte chacune en information sur f ?

C.4. (0,75 pt) *Un pas de table.* On dispose d'une table des valeurs de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1, 2]$, de pas 0,1, où l'on lit $\frac{1}{1,4} = 0,7142857 \dots$ et $\frac{1}{1,5} = 0,6666667 \dots$. Estimer $\frac{1}{1,45}$ par interpolation affine, majorer l'erreur commise à l'aide de la question **C.1**, et comparer à la valeur exacte $\frac{1}{1,45} = 0,6896552 \dots$. Déterminer enfin quel pas il faudrait donner à une table de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1, 2]$ pour que l'interpolation affine y garantisse 10^{-6} , et combien de lignes cette table compterait.