

Devoir surveillé — Dérivation, accroissements finis et développements limités

L1 maths — 180 min

Durée : 180 min — Barème : 20 points. Calculatrice selon les consignes de l'énoncé. La rédaction et la clarté comptent.

Exercice 1 (4 points) — Le maximum de deux fonctions dérivables

Pour deux réels α et β , on note $\max(\alpha, \beta)$ le plus grand des deux. Si u et v sont deux fonctions définies sur un intervalle I , on note w la fonction définie sur I par

$$w(x) = \max(u(x), v(x)).$$

Tout l'exercice consiste à décider où w est dérivable **sans jamais l'expliciter par morceaux**, sauf dans les deux dernières questions où l'on vérifiera le critère obtenu.

1. (0,5 pt) Démontrer que, pour tous réels α et β ,

$$\max(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2},$$

et écrire l'identité analogue pour $\min(\alpha, \beta)$, dont on pourra se servir librement dans la suite. En déduire que si u et v sont continues sur I , alors w l'est aussi.

2. (0,75 pt) Soient u et v dérivables sur I , et soit $x_0 \in I$ tel que $u(x_0) \neq v(x_0)$. Démontrer que w est dérivable en x_0 , et donner $w'(x_0)$. On indiquera l'endroit **exact** où la continuité de $u - v$ est utilisée, et ce que l'on ne pourrait pas conclure sans elle.

3. (1,5 pt) Soient u et v dérivables sur I , et soit x_0 un point **intérieur** à I tel que $u(x_0) = v(x_0)$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in I$ tel que $x > x_0$,

$$\frac{w(x) - w(x_0)}{x - x_0} = \max\left(\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}, \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}\right),$$

et que pour $x < x_0$ la même égalité vaut avec un **minimum** à la place du maximum.

b. En déduire les dérivées à droite et à gauche de w en x_0 , exprimées à l'aide de $u'(x_0)$ et $v'(x_0)$. Conclure : w est dérivable en x_0 **si et seulement si** $u'(x_0) = v'(x_0)$.

4. (0,75 pt) On prend $I = [0, 2\pi]$, $u = \sin$ et $v = \cos$. Déterminer les points de $[0, 2\pi]$ où w n'est pas dérivable, donner en chacun les deux dérivées latérales, et expliciter w par morceaux.

5. (0,5 pt) On prend $I = \mathbb{R}$, $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^3$; les deux courbes se rencontrent en 0 et en 1. En lequel de ces deux points w est-elle dérivable? Que faut-il en conclure sur l'idée « les deux courbes se coupent, donc le maximum y a un point anguleux »? Exhiber enfin deux fonctions dérivables qui **échangent** effectivement leurs rôles en 0 et dont le maximum est pourtant dérivable en 0.

Corrigé

1. (0,5 pt) Deux cas, et ils sont exhaustifs.

Si $\alpha \geq \beta$. Alors $\alpha - \beta \geq 0$, donc $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$, et le membre de droite vaut

$$\frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha = \max(\alpha, \beta).$$

Si $\alpha < \beta$. Alors $|\alpha - \beta| = \beta - \alpha$, et le membre de droite vaut $\frac{\alpha + \beta + \beta - \alpha}{2} = \beta = \max(\alpha, \beta)$.

Dans les deux cas l'égalité est vraie. $\square$

L'identité pour le minimum. Le même découpage la donne, mais on peut aussi l'obtenir sans refaire un seul calcul : pour tous réels α et β , on a $\min(\alpha, \beta) = -\max(-\alpha, -\beta)$, puisque prendre l'opposé renverse l'ordre. En appliquant l'identité déjà établie au couple $(-\alpha, -\beta)$, et en remarquant que $|\alpha - \beta| = |-\alpha - (-\beta)|$, il vient

$$\min(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}.$$

On la retrouve aussi en ajoutant les deux : $\max(\alpha, \beta) + \min(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$, ce qui est évident puisque les deux membres contiennent chacun α et β une fois. $\square$

La continuité. Supposons u et v continues sur I . L'identité qui précède, appliquée en chaque point, donne

$$w = \frac{u + v + |u - v|}{2}.$$

Les fonctions $u + v$ et $u - v$ sont continues sur I comme somme et différence de fonctions continues ; la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, donc $|u - v|$ est continue par composition ; enfin la somme et le produit par la constante $\frac{1}{2}$ conservent la continuité. Donc w **est continue sur** I .

Pourquoi cette identité est le bon point de départ. Elle transforme une définition par disjonction de cas — donc inutilisable dans un calcul de limite — en une formule algébrique où la seule irrégularité est celle de la valeur absolue. Tout l'exercice en découle : la valeur absolue est dérivable partout sauf en 0, et « $u - v$ s'annule » sera exactement la situation délicate.

2. (0,75 pt) Les deux membres du maximum jouant des rôles symétriques, on peut supposer $u(x_0) > v(x_0)$, quitte à échanger les noms de u et v .

Posons $d = u - v$. Cette fonction est dérivable sur I , donc **continue** sur I (section 4 du cours), et $d(x_0) > 0$.

Le passage du point au voisinage. Appliquons la définition de la continuité de d en x_0 avec $\varepsilon = d(x_0) > 0$: il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$,

$$|d(x) - d(x_0)| < d(x_0), \quad \text{donc} \quad d(x) > 0.$$

Notons $V = I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. Sur V , on a $u > v$, donc $w = u$.

Conclusion. Les fonctions w et u coïncident sur V , qui contient x_0 : pour $x \in V$ distinct de x_0 , les taux d'accroissement en x_0 de w et de u sont **égaux**. Comme celui de u tend vers $u'(x_0)$, celui de w tend vers la même limite. Donc w est dérivable en x_0 , avec

$$w'(x_0) = u'(x_0) \quad \text{si } u(x_0) > v(x_0), \quad w'(x_0) = v'(x_0) \quad \text{si } v(x_0) > u(x_0). \quad \square$$

Où la continuité a servi. En une seule ligne : celle qui passe de « $d(x_0) > 0$ » à « $d > 0$ sur tout un voisinage de x_0 ». Sans elle, on saurait seulement que $w(x_0) = u(x_0)$, ce qui ne dit **rien** des valeurs de w aux points voisins, et un taux d'accroissement ne se calcule pas avec la seule valeur au point.

Que l'hypothèse n'est pas décorative. Prenons sur $\mathbb{R}$ les fonctions $u = 0$ et v définie par $v(0) = -1$ et $v(x) = 1$ pour $x \neq 0$. Alors $u(0) = 0 > -1 = v(0)$, et pourtant $w(0) = 0$ tandis que $w(x) = 1$ pour tout $x \neq 0$: la fonction w n'est même pas continue en 0, donc pas dérivable, alors que u l'est. Ici v n'est pas continue en 0 — ce qui est précisément ce que l'hypothèse « v dérivable » interdit.

3.a. (0,75 pt sur les 1,5) Notons $\mu = u(x_0) = v(x_0)$. Alors $w(x_0) = \max(\mu, \mu) = \mu$.

Retraire une constante. Pour tout réel γ et tous réels α, β , on a $\max(\alpha, \beta) - \gamma = \max(\alpha - \gamma, \beta - \gamma)$: retrancher le même nombre aux deux candidats ne change pas lequel est le plus grand. Donc, pour tout $x \in I$,

$$w(x) - w(x_0) = \max(u(x), v(x)) - \mu = \max(u(x) - \mu, v(x) - \mu).$$

Diviser par $x - x_0$. Pour $\lambda > 0$, la multiplication par λ est croissante, donc $\lambda \max(\alpha, \beta) = \max(\lambda\alpha, \lambda\beta)$. Pour $x > x_0$, le réel $\lambda = \frac{1}{x - x_0}$ est strictement positif, et comme $\mu = u(x_0) = v(x_0)$,

$$\frac{w(x) - w(x_0)}{x - x_0} = \max\left(\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}, \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}\right).$$

Le cas $x < x_0$. Cette fois $\lambda = \frac{1}{x - x_0} < 0$, et la multiplication par un réel strictement négatif **renverse** l'ordre : elle échange le plus grand et le plus petit, c'est-à-dire $\lambda \max(\alpha, \beta) = \min(\lambda\alpha, \lambda\beta)$. On obtient donc la même égalité avec un minimum. $\square$

3.b. (0,75 pt sur les 1,5) Posons, pour $x \in I$ distinct de x_0 ,

$$A(x) = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}.$$

Par dérivabilité de u et de v en x_0 , on a $A(x) \rightarrow u'(x_0)$ et $B(x) \rightarrow v'(x_0)$ quand $x \rightarrow x_0$.

La dérivée à droite. D'après **3.a**, le taux d'accroissement de w vaut $\max(A(x), B(x))$ pour $x > x_0$, et l'identité de la question **1** le récrit

$$\max(A(x), B(x)) = \frac{A(x) + B(x) + |A(x) - B(x)|}{2}.$$

Cette expression est obtenue à partir de A et B par des sommes, un quotient par 2 et une valeur absolue, toutes opérations compatibles avec le passage à la limite — la valeur absolue parce qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. D'où

$$w'_d(x_0) = \frac{u'(x_0) + v'(x_0) + |u'(x_0) - v'(x_0)|}{2} = \max(u'(x_0), v'(x_0)).$$

La dérivée à gauche. Le même calcul avec le minimum, et l'identité $\min(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$, donne

$$w'_g(x_0) = \min(u'(x_0), v'(x_0)).$$

La conclusion. Le point x_0 est intérieur à I , donc les deux dérivées latérales ont un sens, et la section 5 du cours dit que w est dérivable en x_0 si et seulement si elles existent et sont **égales**. Or

$$\max(u'(x_0), v'(x_0)) = \min(u'(x_0), v'(x_0)) \iff u'(x_0) = v'(x_0),$$

puisque le maximum et le minimum de deux réels sont égaux exactement quand ces deux réels le sont. Donc w **est dérivable en x_0 si et seulement si $u'(x_0) = v'(x_0)$** , et alors $w'(x_0)$ est cette valeur commune. $\square$

Une observation qui vaut d'être notée. On a toujours $w'_g(x_0) \leq w'_d(x_0)$: un maximum de deux fonctions ne peut présenter qu'un coin « pointant vers le bas », jamais un coin pointant vers le haut. C'est cohérent avec le fait qu'un maximum de deux fonctions convexes est convexe, et cela fournit un contrôle immédiat : une réponse annonçant $w'_g > w'_d$ est fausse.

4. (0,75 pt) *Les points de rencontre.* Résolvons $\sin x = \cos x$ sur $[0, 2\pi]$. Si $\cos x = 0$, l'égalité imposerait $\sin x = 0$, ce qui est impossible puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. On peut donc diviser par $\cos x$, et l'équation équivaut à $\tan x = 1$, dont les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad x = \frac{5\pi}{4}.$$

Qui domine où. La fonction $\sin - \cos$ est continue et ne s'annule qu'en ces deux points, donc elle garde un signe constant sur chacun des trois intervalles qu'ils découpent ; il suffit d'un point d'essai dans chacun.

- Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: en $x = 0$, $\sin 0 = 0 < 1 = \cos 0$, donc $w = \cos$.
- Sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$: en $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin = 1 > 0 = \cos$, donc $w = \sin$.
- Sur $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$: en $x = \frac{3\pi}{2}$, $\sin = -1 < 0 = \cos$, donc $w = \cos$.

D'où l'expression par morceaux :

$$w(x) = \cos x \quad \text{sur} \quad \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad w(x) = \sin x \quad \text{sur} \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], \quad w(x) = \cos x \quad \text{sur} \quad \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right].$$

Les deux points suspects. Ce sont exactement les deux points de rencontre, les seuls où la question **2** ne s'applique pas. On y compare $u' = \cos$ et $v' = -\sin$.

En $x_0 = \frac{\pi}{4}$: $u'(\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $v'(\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ces deux nombres diffèrent, donc w **n'est pas dérivable en** $\frac{\pi}{4}$, et la question **3.b** donne

$$w'_d\left(\frac{\pi}{4}\right) = \max\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad w'_g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En $x_0 = \frac{5\pi}{4}$: $u'(\frac{5\pi}{4}) = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $v'(\frac{5\pi}{4}) = -\sin \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$: là encore les deux nombres diffèrent, donc w **n'est pas dérivable en** $\frac{5\pi}{4}$, avec

$$w'_d\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad w'_g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En tout autre point de $]0, 2\pi[$, la question **2** s'applique et w est dérivable.

Contrôle par l'expression par morceaux. À gauche de $\frac{\pi}{4}$, on a $w = \cos$, de dérivée $-\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; à droite, $w = \sin$, de dérivée $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Les deux lectures concordent, et de même en $\frac{5\pi}{4}$.

5. (0,5 pt) *Qui domine.* On a $u(x) - v(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$. Le facteur x^2 est positif, donc le signe est celui de $1 - x$: la différence est positive sur $] -\infty, 1]$ et négative sur $[1, +\infty[$. Donc

$$w(x) = x^2 \quad \text{pour } x \leq 1, \quad w(x) = x^3 \quad \text{pour } x \geq 1.$$

En 0. On a $u(0) = v(0) = 0$, et $u'(0) = 0 = v'(0)$ puisque $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3x^2$. Les deux dérivées coïncident : d'après la question **3.b**, w **est dérivable en** 0, avec $w'(0) = 0$.

En 1. On a $u(1) = v(1) = 1$, mais $u'(1) = 2$ et $v'(1) = 3$: w **n'est pas dérivable en** 1, avec $w'_g(1) = \min(2, 3) = 2$ et $w'_d(1) = \max(2, 3) = 3$, ce que confirme l'expression par morceaux.

Ce qu'il faut en conclure. L'idée « les courbes se coupent, donc il y a un point anguleux » est **fausse**. Le critère ne porte pas sur les valeurs mais sur les **dérivées** : ce qui casse la dérivabilité, c'est que les deux branches arrivent au point de rencontre avec des pentes différentes. En 0, les deux courbes se touchent avec la même tangente, et le maximum ne s'en aperçoit pas.

Deux fonctions qui échangent vraiment leurs rôles. Dans l'exemple ci-dessus, $u \geq v$ des deux côtés de 0 : les courbes se touchent sans échanger leurs rôles, et l'on pourrait croire que c'est ce qui sauve la dérivabilité. Prenons alors

$$u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = x^2 + x^3.$$

Ici $v - u = x^3$ change de signe en 0 : u domine strictement pour $x < 0$, v domine strictement pour $x > 0$, l'échange est réel. Pourtant $u(0) = v(0) = 0$ et $u'(0) = v'(0) = 0$, donc la question **3.b** garantit que w est dérivable en 0, avec $w'(0) = 0$. On le vérifie directement : $w(x) = x^2$ pour $x \leq 0$ et $w(x) = x^2 + x^3$ pour $x \geq 0$, dont les deux taux d'accroissement en 0 valent respectivement x et $x + x^2$, tous deux de limite nulle.

Exercice 2 (4 points) — Deux approximations concurrentes de l'exponentielle

Pour approcher e^x au voisinage de 0, on dispose du polynôme de Taylor d'ordre 2 de $\exp$ en 0,

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

et l'on propose de lui opposer la fraction

$$Q(x) = \frac{2+x}{2-x}, \quad \text{définie pour } x \neq 2.$$

Les deux se calculent en trois opérations. L'exercice décide laquelle est la meilleure, puis mesure ce que le développement limité autorise à en dire, et ce qu'il n'autorise pas.

1. (0,75 pt) Justifier que Q admet en 0 un développement limité à tout ordre, en nommant le théorème employé et en vérifiant ses hypothèses. Puis, en écrivant $Q(x) = (2+x) \times \frac{1}{2-x}$, dire à quel ordre chacun des deux facteurs doit être développé pour obtenir le développement limité d'ordre 3 du produit. On remarquera que l'un des deux facteurs est un **polynôme**, et l'on dira précisément quelle conséquence cela a sur l'ordre.

2. (1 pt) Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de Q . On se ramènera au développement usuel de $\frac{1}{1-u}$ en factorisant le dénominateur par sa valeur en 0, et l'on dira quelle quantité joue le rôle de u et pourquoi elle tend vers 0.

3. (0,75 pt) Rappeler le développement limité d'ordre 3 en 0 de e^x , puis donner ceux de $e^x - P(x)$ et de $e^x - Q(x)$. Laquelle des deux approximations est la meilleure au voisinage de 0, et dans quel rapport ? Pour $x > 0$ petit, chacune est-elle **par excès** ou **par défaut** ?

4. (0,5 pt) Contrôle numérique. Calculer $P(0,2)$ et $Q(0,2)$ sous forme décimale, et les comparer à

$$e^{0,2} = 1,22140276 \dots$$

Les signes des deux écarts sont-ils ceux prévus à la question **3** ? Leur rapport vaut-il 2 ? Expliquer l'écart constaté en poussant les deux développements d'un ordre de plus.

5. (1 pt) *Ce que le développement limité ne dit pas.* La question **3** donne le signe de $e^x - Q(x)$ pour $x > 0$ **assez petit**, sans dire à partir de quel seuil. Démontrer que l'inégalité

$$e^x \leq \frac{2+x}{2-x}$$

vaut en fait pour tout $x \in [0, 2[$. On étudiera pour cela la fonction ψ définie sur $] -2, 2[$ par $\psi(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x) - x$. Dire enfin, en une phrase, ce que le développement limité donnait et ce qu'il ne donnait pas.

Corrigé

1. (0,75 pt) L'existence. La fonction Q est un quotient de deux fonctions polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ensemble où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, qui contient l'intervalle ouvert $] -2, 2[$ et donc un voisinage de 0. En particulier Q est n fois dérivable en 0 pour tout n , et la **formule de Taylor-Young** (section 19) s'applique : Q admet en 0 un développement limité à tout ordre.

L'ordre de chaque facteur. La règle du produit (section 22) dit que le développement limité d'un produit à l'ordre n s'obtient à partir des développements des deux facteurs à l'ordre n , l'ordre du produit étant le **minimum** des ordres disponibles. Appliquée sans réfléchir, elle réclamerait ici l'ordre 3 pour les deux facteurs.

Mais $2+x$ est un **polynôme de degré 1** : il est égal à son propre développement limité à tout

ordre, **avec un reste nul**. Il ne consomme donc aucun ordre. Précisément, si l'on note S la partie régulière du développement limité d'ordre 3 de $\frac{1}{2-x}$, de sorte que

$$\frac{1}{2-x} = S(x) + o(x^3),$$

alors

$$Q(x) = (2+x)S(x) + (2+x)o(x^3),$$

et le second terme est un $o(x^3)$ parce que $2+x$ est **borné** au voisinage de 0 : il tend vers 2. Il reste à développer le seul facteur $\frac{1}{2-x}$ **à l'ordre 3**, puis à tronquer le produit au degré 3.

Le contraste à retenir. Un facteur qui **vaut** 0 en 0 fait gagner un ordre sur l'autre facteur ; un facteur **polynomial** n'en fait perdre aucun. Ce sont deux effets distincts, et c'est le second qui joue ici, puisque $2+x$ vaut $2 \neq 0$ en 0.

2. (1 pt) *Le développement du facteur non polynomial.* Factorisons le dénominateur par sa valeur en 0 :

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-u} \quad \text{avec } u = \frac{x}{2}.$$

La quantité substituée est $u = \frac{x}{2}$, et elle tend bien vers 0 quand x tend vers 0 : c'est la condition qui autorise la substitution dans le développement usuel (section 22). Celui-ci donne, à l'ordre 3,

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3),$$

et comme $u = \frac{x}{2}$, on a $o(u^3) = o(x^3)$, les deux quantités ne différant que d'un facteur constant $\frac{1}{8}$. D'où

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} \right) + o(x^3) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

Le produit. Multiplions par $2+x$, en ne conservant que les termes de degré au plus 3 : le terme $x \times \frac{x^3}{16}$ est de degré 4, donc absorbé par le reste.

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \right) + x \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} \right) + o(x^3) \\ &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} \right) + o(x^3). \end{aligned}$$

En regroupant :

$$Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

Deux contrôles. Le terme constant doit valoir $Q(0) = \frac{2}{2} = 1$: c'est le cas. Et le coefficient de x doit valoir $Q'(0)$; or $Q'(x) = \frac{(2-x) + (2+x)}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}$, donc $Q'(0) = 1$: c'est le cas aussi.

3. (0,75 pt) Le tableau des développements usuels (section 21) donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Le premier écart. Comme $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ exactement,

$$e^x - P(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Le second écart. En retranchant les deux développements, les termes de degré 0, 1 et 2 se détruisent, et

$$e^x - Q(x) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)x^3 + o(x^3) = -\frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

Qui est le meilleur. Les deux erreurs sont d'ordre 3 en x : les deux approximations coïncident avec e^x jusqu'au terme en x^2 , et **aucune n'est d'un ordre supérieur à l'autre**. Ce qui les sépare est le coefficient : $\frac{1}{6}$ contre $\frac{1}{12}$ en valeur absolue. Au voisinage de 0, l'erreur de Q est donc environ **deux fois plus petite** que celle de P , le rapport des deux erreurs tendant vers

$$\frac{1/6}{1/12} = 2 \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

De quel côté. Pour $x > 0$ petit, $x^3 > 0$, donc $e^x - P(x) > 0$: le polynôme P approche **par défaut**. Et $e^x - Q(x) < 0$: la fraction Q approche **par excès**. Pour $x < 0$ petit, $x^3 < 0$ et les deux conclusions s'échangent.

4. (0,5 pt) *Les deux valeurs.* D'une part

$$P(0,2) = 1 + 0,2 + \frac{0,04}{2} = 1 + 0,2 + 0,02 = 1,22.$$

D'autre part

$$Q(0,2) = \frac{2,2}{1,8} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9} = 1,22222222 \dots$$

Les deux écarts.

$$e^{0,2} - P(0,2) = 1,22140276 - 1,22 = 0,00140276,$$

$$e^{0,2} - Q(0,2) = 1,22140276 - 1,22222222 = -0,00081946.$$

Les signes. Ils sont bien ceux annoncés : positif pour P , qui approche par défaut, négatif pour Q , qui approche par excès. Et Q est effectivement plus précise : $8,2 \times 10^{-4}$ contre $1,4 \times 10^{-3}$.

Le rapport. Il vaut

$$\frac{0,00140276}{0,00081946} \simeq 1,71,$$

et non 2. Ce n'est pas une contradiction : le rapport 2 est une **limite quand x tend vers 0**, et 0,2 n'est pas infiniment petit. Pour voir d'où vient l'écart, poussons d'un ordre. Le développement de $\frac{1}{2-x}$ à l'ordre 4 ajoute le terme $\frac{x^4}{32}$, et le coefficient de x^4 dans Q vaut donc $2 \times \frac{1}{32} + 1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$. Ainsi

$$Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

tandis que e^x a $\frac{1}{24}$ pour coefficient de x^4 . Les deux erreurs s'écrivent donc

$$e^x - P(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad e^x - Q(x) = -\frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

En $x = 0,2$, ces expressions prédisent $0,001333 + 0,000067 = 0,001400$ et $-0,000667 - 0,000133 = -0,000800$, à comparer aux valeurs mesurées 0,001403 et $-0,000819$: l'accord est excellent. Le rapport prédit devient $\frac{0,0014}{0,0008} = 1,75$, très proche du 1,71 observé.

La lecture. Le terme en x^4 pénalise Q deux fois plus que P — son coefficient d'erreur vaut $\frac{1}{12}$ contre $\frac{1}{24}$ — et c'est exactement ce qui érode l'avantage de Q dès que x n'est plus très petit.

Un développement limité classe les approximations **au voisinage du point**, et rien ne garantit que le classement se conserve à distance finie.

5. (1 pt) Le domaine et la légitimité du logarithme. Pour $x \in]-2, 2[$, on a $2+x > 0$ et $2-x > 0$: les deux logarithmes ont un sens, et $Q(x) = \frac{2+x}{2-x} > 0$. De plus

$$\ln Q(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x),$$

puisque le logarithme d'un quotient de deux réels strictement positifs est la différence des logarithmes. Donc $\psi = \ln Q - \text{id}$ sur $] -2, 2[$.

La dérivée. Les fonctions $x \mapsto \ln(2+x)$ et $x \mapsto \ln(2-x)$ sont dérivables sur $] -2, 2[$ comme composées de fonctions affines à valeurs strictement positives et du logarithme, dérivable sur $]0, +\infty[$. Par la formule de dérivation d'une composée,

$$\psi'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} - 1,$$

le signe + devant le second terme venant du facteur -1 de la dérivée intérieure combiné au signe $-$ devant le logarithme. En réduisant au même dénominateur,

$$\psi'(x) = \frac{(2-x) + (2+x)}{(2+x)(2-x)} - 1 = \frac{4}{4-x^2} - 1 = \frac{4 - (4-x^2)}{4-x^2} = \frac{x^2}{4-x^2}.$$

Le signe. Sur $] -2, 2[$, on a $4-x^2 > 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $\psi' \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$. La dérivée est donc strictement positive sur $]0, 2[$, et le théorème de la section 15 donne : **ψ est strictement croissante sur $[0, 2[$.**

La conclusion. On calcule $\psi(0) = \ln 2 - \ln 2 - 0 = 0$. Par croissance, pour tout $x \in [0, 2[$,

$$\psi(x) \geq \psi(0) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ln Q(x) \geq x.$$

L'exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on peut l'appliquer aux deux membres sans changer le sens, et $e^{\ln Q(x)} = Q(x)$ puisque $Q(x) > 0$. D'où

$$\forall x \in [0, 2[, \quad e^x \leq \frac{2+x}{2-x},$$

l'inégalité étant même **stricte** pour $x > 0$, par stricte croissance de ψ . $\square$

Ce que le développement limité donnait, et ce qu'il ne donnait pas. Il donnait le signe de $e^x - Q(x)$ **au voisinage de 0**, c'est-à-dire l'existence d'un $\delta > 0$, dont il ne dit rien, tel que l'inégalité vaille sur $]0, \delta[$; il ne donnait ni la valeur de δ , ni le moindre renseignement au-delà. L'étude des variations, elle, fournit le résultat sur $[0, 2[$ tout entier : un développement limité est un énoncé local, et seul un argument global peut le rendre global.

Remarque

Le même calcul règle le cas négatif : sur $] -2, 0]$, la croissance de ψ donne $\psi \leq 0$, donc $Q(x) \leq e^x$. L'inégalité change de sens en 0, ce qui était déjà visible sur le terme $-\frac{x^3}{12}$ de la question 3. Et près de 2, elle devient très lâche : $Q(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 2 par valeurs inférieures, alors que e^x tend vers e^2 .

Exercice 3 (4 points) — Où faire atterrir un pipeline

Une plateforme A est installée en mer, à 4 km d'une côte supposée **rectiligne**. On note H le point de la côte le plus proche de A , c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire à la côte passant par A : la distance AH vaut donc 4 km. La raffinerie B est située **sur la côte**, à 10 km de H .

On relie A à B par un pipeline en deux tronçons : un tronçon rectiligne en mer, de A jusqu'à un point d'atterrissage M situé sur la côte entre H et B , puis un tronçon le long de la côte, de M jusqu'à B . On note x la distance HM en kilomètres, de sorte que $x \in [0, 10]$: la valeur $x = 0$ correspond à un atterrissage en H , la valeur $x = 10$ à un tronçon marin allant directement de A à B .

La pose coûte 5 millions d'euros par kilomètre en mer et 3 millions d'euros par kilomètre à terre. On note $f(x)$ le coût total, en millions d'euros.

- (0,5 pt) Établir que $f(x) = 5\sqrt{16 + x^2} + 3(10 - x)$ pour tout $x \in [0, 10]$, puis démontrer que f **atteint** un minimum sur $[0, 10]$. On nommera le théorème employé et l'on vérifiera ses hypothèses.
- (0,75 pt) Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$. En déduire que f est **convexe** sur $[0, 10]$, puis que l'équation $f'(x) = 0$ y admet **au plus** une solution.
- (1,25 pt) Résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0, 10]$; on note x^* la solution obtenue, et l'on justifiera l'élévation au carré. Démontrer ensuite, **par la convexité et la position de la courbe par rapport à sa tangente en x^*** , et sans dresser aucun tableau, que x^* réalise le minimum de f sur $[0, 10]$. Donner le coût minimal, puis le comparer aux deux tracés « évidents » : le tronçon unique en mer de A à B , et le trajet $A \rightarrow H$ suivi de $H \rightarrow B$. Pour le premier, on donnera un encadrement à 0,5 million près, sans calculatrice.
- (0,75 pt) On note θ l'angle, au point M , entre le tronçon marin MA et la perpendiculaire à la côte. Démontrer que la condition $f'(x) = 0$ s'écrit $5 \sin \theta = 3$, et donner $\sin \theta$ à l'optimum. Traiter enfin le cas où le coût marin serait **inférieur ou égal** au coût terrestre : où faudrait-il alors faire atterrir le pipeline, et pourquoi le lemme de Fermat ne permet-il rien d'en conclure ?
- (0,75 pt) *Le prix d'une erreur de placement.* Pour des raisons de terrain, l'atterrissage est finalement implanté en un point x_0 tel que $|x_0 - x^*| \leq 0,1$ km. Majorer le surcoût $|f(x_0) - f(x^*)|$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis **deux fois** : d'abord à f' sur l'intervalle $[2,9; 3,1]$, pour y majorer $|f'|$, puis à f sur ce même intervalle. Conclure en euros, et dire ce que ce résultat enseigne sur le voisinage d'un minimum.

Si la question 3 n'a pas abouti, on admettra $x^* = 3$ pour traiter les questions 4 et 5.

Corrigé

- (0,5 pt) *La mise en équation.* Le triangle AHM est rectangle en H , de côtés $AH = 4$ et $HM = x$. Le théorème de Pythagore donne la longueur du tronçon marin :

$$AM = \sqrt{4^2 + x^2} = \sqrt{16 + x^2}.$$

Le tronçon terrestre va de M à B , tous deux sur la côte, avec $HM = x$ et $HB = 10$ et M situé entre H et B : sa longueur vaut $MB = 10 - x$, qui est bien positive pour $x \in [0, 10]$. En multipliant chaque longueur par son coût unitaire,

$$f(x) = 5\sqrt{16 + x^2} + 3(10 - x).$$

L'existence du minimum. La fonction $x \mapsto 16 + x^2$ est polynomiale donc continue sur $[0, 10]$, et elle y est à valeurs dans $[16, 116] \subset [0, +\infty[$, ce qui autorise la composition avec la racine carrée, continue sur $[0, +\infty[$. La fonction f est donc continue sur $[0, 10]$ comme somme d'une composée de fonctions continues et d'une fonction affine.

Or $[0, 10]$ est un **segment**, c'est-à-dire un intervalle fermé et borné. Le **théorème des bornes atteintes**, acquis au chapitre « Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité », s'applique : f est bornée sur $[0, 10]$ et **y atteint ses bornes**. En particulier son minimum est atteint en au moins un point de $[0, 10]$. $\square$

Pourquoi cette question vient d'abord. Résoudre $f'(x) = 0$ ne prouve rien à soi seul : cela fournit des candidats, sous réserve que le minimum existe et qu'il soit intérieur. L'existence est ici garantie par la continuité sur un segment, indépendamment de tout calcul de dérivée.

2. (0,75 pt) La dérivée première. La fonction $x \mapsto 16 + x^2$ est dérivable sur $[0, 10]$ et strictement positive, donc $x \mapsto \sqrt{16 + x^2}$ y est dérivable, de dérivée $\frac{2x}{2\sqrt{16 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}}$. D'où

$$f'(x) = \frac{5x}{\sqrt{16 + x^2}} - 3.$$

La dérivée seconde. Posons $s(x) = \sqrt{16 + x^2}$, de sorte que $s^2 = 16 + x^2$ et $s' = \frac{x}{s}$. En dérivant le quotient $\frac{x}{s}$,

$$\left(\frac{x}{s}\right)' = \frac{s - xs'}{s^2} = \frac{s - \frac{x^2}{s}}{s^2} = \frac{s^2 - x^2}{s^3} = \frac{16}{(16 + x^2)^{3/2}},$$

donc

$$f''(x) = \frac{80}{(16 + x^2)^{3/2}}.$$

La convexité. Le numérateur est strictement positif et le dénominateur aussi, donc $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 10]$. La caractérisation de la convexité par la dérivée seconde (section 24) s'applique, f étant deux fois dérivable sur l'intervalle $[0, 10]$: **f est convexe sur $[0, 10]$** .

Au plus une solution. Comme $f'' > 0$ sur l'intervalle $[0, 10]$, la fonction f' y est **strictement croissante** (section 15). Une fonction strictement croissante est injective, donc elle prend la valeur 0 au plus une fois : l'équation $f'(x) = 0$ admet **au plus une** solution dans $[0, 10]$. $\square$

3. (1,25 pt) La résolution. Pour $x \in [0, 10]$,

$$f'(x) = 0 \iff \frac{5x}{\sqrt{16 + x^2}} = 3 \iff 5x = 3\sqrt{16 + x^2}.$$

Les deux membres de cette dernière égalité sont **positifs**, puisque $x \geq 0$ et que la racine carrée est positive : élever au carré est donc une équivalence, et non une simple implication. Il vient

$$25x^2 = 9(16 + x^2) \iff 16x^2 = 144 \iff x^2 = 9 \iff x = 3,$$

la solution $x = -3$ étant exclue par $x \geq 0$. On pose donc $x^* = 3$, qui appartient bien à $[0, 10]$.

Vérification. $f'(3) = \frac{15}{\sqrt{25}} - 3 = \frac{15}{5} - 3 = 0$.

Le minimum, par la tangente. La fonction f est convexe et dérivable sur $[0, 10]$: d'après la section 24, sa courbe est **au-dessus de chacune de ses tangentes**, ce qui s'écrit, pour tous x et a de $[0, 10]$,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Appliquons cette inégalité au point $a = x^* = 3$, où $f'(3) = 0$: le terme linéaire disparaît et il reste

$$\forall x \in [0, 10], \quad f(x) \geq f(3).$$

Donc $x^* = 3$ réalise le minimum de f sur $[0, 10]$, et ce **globalement**, sans aucun tableau de variations. $\square$

Le coût minimal.

$$f(3) = 5\sqrt{16 + 9} + 3 \times 7 = 5 \times 5 + 21 = 46 \text{ millions d'euros.}$$

Le tronçon unique en mer. Il correspond à $x = 10$:

$$f(10) = 5\sqrt{16 + 100} = 5\sqrt{116}.$$

Encadrons $\sqrt{116}$ à la main : $10,7^2 = 114,49 < 116$ et $10,8^2 = 116,64 > 116$, donc $10,7 < \sqrt{116} < 10,8$ et

$$53,5 < f(10) < 54 \text{ millions d'euros.}$$

Le trajet perpendiculaire. Il correspond à $x = 0$:

$$f(0) = 5 \times 4 + 3 \times 10 = 20 + 30 = 50 \text{ millions d'euros.}$$

La comparaison. On a donc $46 < 50 < 53,5$: l'atterrissage optimal économise 4 millions d'euros sur le trajet perpendiculaire, et plus de 7,5 millions sur la ligne droite en mer. Aucune des deux solutions intuitives n'est bonne, et c'est ce qui justifie l'étude : le tracé optimal fait un compromis, il « penche » de 3 km vers la raffinerie avant d'atterrir.

4. (0,75 pt) L'angle. La perpendiculaire à la côte menée par M est parallèle à la droite (AH) , donc l'angle θ qu'elle fait avec MA est aussi l'angle que fait MA avec (AH) , c'est-à-dire l'angle du triangle AHM **au sommet** A . Ce triangle est rectangle en H : le côté opposé au sommet A est $HM = x$, et l'hypoténuse est $AM = \sqrt{16 + x^2}$. Donc

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}}.$$

La réécriture. La dérivée obtenue à la question **2** se lit alors

$$f'(x) = 5 \sin \theta - 3,$$

et la condition $f'(x) = 0$ s'écrit exactement $5 \sin \theta = 3$. À l'optimum $x^* = 3$, on retrouve

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

La condition d'optimalité ne dépend donc **pas des distances**, mais seulement du rapport des deux coûts : $\sin \theta = \frac{3}{5}$, c'est-à-dire le coût terrestre divisé par le coût marin.

Le cas d'un coût marin plus faible. Notons p le coût marin et q le coût terrestre, avec $p \leq q$. La dérivée devient $f'(x) = p \sin \theta - q$, et comme $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} < 1$ **strictement** pour tout x ,

$$f'(x) < p - q \leq 0.$$

La dérivée est strictement négative sur tout $[0, 10]$, donc f y est strictement décroissante et son minimum est atteint en $x = 10$: il faut **renoncer au tronçon terrestre** et aller droit de A à B en mer, ce qui est conforme au bon sens si la mer ne coûte pas plus cher.

Pourquoi Fermat ne dit rien ici. Le lemme de Fermat (section 10) ne conclut que sous trois conditions, dont l'une est que le point considéré soit **intérieur** à l'intervalle. Ici le minimum est atteint en $x = 10$, une **extrémité** de $[0, 10]$: l'hypothèse est en défaut, le lemme ne s'applique pas, et de fait $f'(10) \neq 0$. Chercher les extremums en résolvant $f' = 0$ n'est légitime qu'après avoir traité séparément les bornes, et le cas $p \leq q$ est exactement celui où cette précaution paie.

5. (0,75 pt) Posons $J = [2,9; 3,1]$, qui est l'intervalle décrit par x_0 puisque $|x_0 - 3| \leq 0,1$. C'est bien un intervalle, contenu dans $[0, 10]$.

Premier étage : majorer $|f''|$ sur J . Pour $x \in J$, on a $x \geq 2,9$, donc

$$16 + x^2 \geq 16 + 8,41 = 24,41 \geq 24,$$

et par croissance de la racine carrée $\sqrt{16+x^2} \geq \sqrt{24} \geq 4,8$, puisque $4,8^2 = 23,04 \leq 24$. En multipliant ces deux minoration de quantités positives,

$$(16+x^2)^{3/2} = (16+x^2) \sqrt{16+x^2} \geq 24 \times 4,8 = 115,2,$$

d'où

$$f''(x) = \frac{80}{(16+x^2)^{3/2}} \leq \frac{80}{115,2} \leq 0,7.$$

On retient $|f''| \leq 0,7$ sur J , la dérivée seconde étant positive.

Deuxième étage : majorer $|f'|$ sur J . La fonction f' est dérivable sur l'intervalle J et sa dérivée f'' y est majorée en module par 0,7 : l'**inégalité des accroissements finis** (section 13) s'applique à f' et donne, pour tout $t \in J$,

$$|f'(t) - f'(3)| \leq 0,7 |t - 3| \leq 0,7 \times 0,1 = 0,07.$$

Or $f'(3) = 0$ d'après la question 3. Donc $|f'(t)| \leq 0,07$ pour tout $t \in J$.

Troisième étage : majorer le surcoût. La fonction f est dérivable sur l'intervalle J , où $|f'| \leq 0,07$: l'inégalité des accroissements finis, appliquée cette fois à f entre x_0 et 3, tous deux dans J , donne

$$|f(x_0) - f(3)| \leq 0,07 \times |x_0 - 3| \leq 0,07 \times 0,1 = 7 \times 10^{-3}.$$

Le surcoût est donc **inférieur à 7 000 euros**, sur un projet de 46 millions, soit moins de 0,02 %.
□

Contrôle numérique. En $x_0 = 3,1$, on a $f(3,1) = 5\sqrt{25,61} + 3 \times 6,9$, et $\sqrt{25,61} \simeq 5,0606$, donc $f(3,1) \simeq 25,303 + 20,7 = 46,003$: le surcoût réel vaut environ 3 150 euros. La majoration, avec ses 7 000 euros, est donc grossière d'un facteur 2 environ, ce qui était prévisible : le raisonnement en deux temps produit $0,7 \times h^2$ là où le terme dominant exact vaut $\frac{f''(3)}{2} h^2 = \frac{0,64}{2} \times 0,01 = 0,0032$, soit 3 200 euros. La majoration est valable, simplement pas optimale — et c'est tout ce qu'on lui demandait.

Ce que ce résultat enseigne. Au voisinage d'un minimum, la dérivée s'annule. Une erreur de placement h ne coûte donc pas quelque chose de l'ordre de h , mais de l'ordre de h^2 : c'est ce que traduit l'application en cascade de l'inégalité des accroissements finis, qui fait apparaître un produit de deux facteurs h . Concrètement, déplacer l'atterrissage de 100 mètres est gratuit à l'échelle du projet, alors que le même déplacement en un point où f' ne s'annule pas coûterait ici jusqu'à $|f'(t)| \times 0,1$, soit plusieurs centaines de milliers d'euros loin de l'optimum.

Remarque

La relation $\sin \theta = \frac{c_2}{c_1}$ obtenue à la question 4 est exactement de la forme de la loi de Snell-Descartes de l'optique, qui régit la trajectoire d'un rayon lumineux passant d'un milieu à un autre. Ce n'est pas une coïncidence : la lumière suit le chemin le plus rapide, le pipeline le moins coûteux, et les deux problèmes sont la même minimisation.

Exercice 4 (8 points) — Problème : l'erreur de l'interpolation affine

Quand on ne connaît une fonction que par deux de ses valeurs, $f(a)$ et $f(b)$, la seule chose raisonnable à faire entre les deux est de remplacer la courbe par la **corde**. C'est ce que fait toute lecture d'une table de valeurs, et l'on appelle cela l'**interpolation affine**. Ce problème établit une formule **exacte** de l'erreur commise, puis en tire une majoration, un signe, et un pas de table.

Dans tout le problème, $a < b$ sont deux réels, f est une fonction définie sur $[a, b]$, et L désigne l'unique fonction affine telle que $L(a) = f(a)$ et $L(b) = f(b)$; on note

$$E = f - L$$

l'erreur d'interpolation. Le résultat à établir est le suivant.

Théorème

Erreur de l'interpolation affine. Soit f continue sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$. Alors, pour tout $x_0 \in]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$E(x_0) = f(x_0) - L(x_0) = \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(c).$$

Aucune intégrale n'intervient : tout vient du théorème de Rolle, appliqué **trois fois**.

Partie A — Sur un exemple (2 points)

Dans cette partie, $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ et $b = 4$.

A.1. (0,5 pt) Déterminer L , et vérifier $L(1) = f(1)$ ainsi que $L(4) = f(4)$.

A.2. (0,75 pt) Calculer E' , dresser le tableau du signe de E' et des variations de E sur $[1, 4]$, et en déduire le point où $|E|$ est maximal ainsi que cette valeur maximale. De quel côté de la corde se trouve la courbe ?

A.3. (0,75 pt) Écrire l'égalité du théorème au point $x_0 = 2$, et en déduire la valeur **exacte** du réel c qu'elle fournit. Ce réel est-il unique ? Vérifier qu'il appartient bien à $]1, 4[$.

Partie B — La démonstration (3,5 points)

Dans toute cette partie, f est continue sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$, et x_0 est un point **fixé** de $]a, b[$.

B.1. (0,5 pt) Donner l'expression de L en fonction de a , b , $f(a)$ et $f(b)$. En déduire que $L'' = 0$, puis que $E(a) = E(b) = 0$ et que $E'' = f''$ sur $]a, b[$.

B.2. (0,75 pt) On pose, pour $t \in [a, b]$,

$$\varphi(t) = E(t) - K \frac{(t - a)(t - b)}{2},$$

où K est un réel à choisir. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, et dire ce qu'on remarque. Déterminer ensuite l'unique réel K tel que $\varphi(x_0) = 0$, en justifiant son existence **et** son unicité.

B.3. (1,25 pt) Appliquer le théorème de Rolle à φ sur $[a, x_0]$, puis sur $[x_0, b]$, en vérifiant **une par une** ses trois hypothèses dans chacun des deux cas. En déduire l'existence de deux réels $c_1 < c_2$ de $]a, b[$ tels que $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$. On dira où sert le fait que x_0 est **strictement** compris entre a et b .

B.4. (1 pt) Appliquer une troisième fois le théorème de Rolle, à la fonction φ' sur le segment $[c_1, c_2]$; on dira en particulier pourquoi φ' est continue sur ce segment. Calculer φ'' , et conclure la démonstration.

Partie C — Ce que la formule donne (2,5 points)

Dans toute cette partie, on suppose de plus f de **classe** $\mathcal{C}^2$ **sur le segment** $[a, b]$, on note M_2 un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$, et l'on pose $h = b - a$. On dira à la question **C.3** pourquoi cette hypothèse renforcée est nécessaire.

C.1. (0,75 pt) Démontrer que

$$\max_{x \in [a, b]} |(x-a)(x-b)| = \frac{h^2}{4},$$

en précisant le point où ce maximum est atteint. En déduire que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - L(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Appliquer cette majoration à la situation de la partie A, la comparer à l'erreur réelle, et commenter l'écart.

C.2. (0,5 pt) On suppose de plus $f'' \geq 0$ sur $]a, b[$. Démontrer que la courbe de f est **au-dessous** de sa corde sur $[a, b]$. Quel énoncé de la section 24 du cours retrouve-t-on ainsi? Qu'apporte la formule que cet énoncé ne donnait pas?

C.3. (0,5 pt) On approche maintenant f sur $[a, b]$ par sa **tangente en** a , et non plus par sa corde. Majorer l'erreur commise à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 au point a , puis comparer cette majoration à celle de la question **C.1**. Laquelle des deux approximations est la meilleure sur $[a, b]$, et dans quel rapport? Que coûte chacune en information sur f ?

C.4. (0,75 pt) *Un pas de table.* On dispose d'une table des valeurs de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1, 2]$, de pas 0,1, où l'on lit $\frac{1}{1,4} = 0,7142857 \dots$ et $\frac{1}{1,5} = 0,6666667 \dots$. Estimer $\frac{1}{1,45}$ par interpolation affine, majorer l'erreur commise à l'aide de la question **C.1**, et comparer à la valeur exacte $\frac{1}{1,45} = 0,6896552 \dots$. Déterminer enfin quel pas il faudrait donner à une table de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1, 2]$ pour que l'interpolation affine y garantisse 10^{-6} , et combien de lignes cette table compterait.

Corrigé

A.1. (0,5 pt) On a $f(1) = 1$ et $f(4) = \frac{1}{4}$. La fonction affine L passe donc par les points de coordonnées $(1; 1)$ et $(4; \frac{1}{4})$, de sorte que sa pente vaut

$$\frac{\frac{1}{4} - 1}{4 - 1} = \frac{-\frac{3}{4}}{3} = -\frac{1}{4},$$

et

$$L(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 1) = \frac{5}{4} - \frac{x}{4}.$$

Vérifications : $L(1) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1 = f(1)$, et $L(4) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} = f(4)$.

A.2. (0,75 pt) On a $E(x) = \frac{1}{x} - \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$ sur $[1, 4]$, fonction dérivable comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle qui ne contient pas 0, et

$$E'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} = \frac{x^2 - 4}{4x^2}.$$

Sur $[1, 4]$, le dénominateur est strictement positif, donc le signe de $E'(x)$ est celui de $x^2 - 4$, c'est-à-dire celui de $x - 2$ puisque $x + 2 > 0$. La dérivée s'annule donc en $x = 2$ seulement, en changeant de signe.

x	1	2	4
$E'(x)$	—	0	+
$E(x)$	0	$-\frac{1}{4}$	0

Les deux valeurs extrêmes sont nulles par construction : $E(1) = E(4) = 0$. La valeur au point critique vaut

$$E(2) = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

La fonction E décroît de 0 à $-\frac{1}{4}$, puis remonte de $-\frac{1}{4}$ à 0 : elle est donc **négative** sur tout $[1, 4]$, et $|E|$ est maximal en $x = 2$, où il vaut $\frac{1}{4}$.

De quel côté est la courbe. Comme $E = f - L \leq 0$, on a $f \leq L$: la courbe de f est **au-dessous** de sa corde sur $[1, 4]$, ce qui est cohérent avec la convexité de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ (section 24). La question **C.2** démontrera que ce n'est pas une coïncidence.

A.3. (0,75 pt) Ici $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Au point $x_0 = 2$, l'égalité du théorème s'écrit

$$E(2) = \frac{(2-1)(2-4)}{2} f''(c) = \frac{1 \times (-2)}{2} \times \frac{2}{c^3} = -\frac{2}{c^3}.$$

Or $E(2) = -\frac{1}{4}$ d'après la question **A.2**. Donc

$$\frac{2}{c^3} = \frac{1}{4}, \quad \text{soit} \quad c^3 = 8, \quad \text{soit} \quad c = 2.$$

Unicité. La fonction $c \mapsto \frac{2}{c^3}$ est strictement décroissante sur $]1, 4[$, donc injective : elle ne prend la valeur $\frac{1}{4}$ qu'une fois. Le réel c fourni par le théorème est donc ici **unique**, ce qui est une particularité de cet exemple et non une propriété générale — le théorème n'affirme qu'une existence.

Appartenance. On a bien $1 < 2 < 4$, donc $c = 2 \in]1, 4[$.

Une remarque de lecture. Le point c coïncide ici avec x_0 , ce qui est une pure coïncidence de cet exemple : la formule ne prétend rien de tel, et l'on ne peut jamais supposer $c = x_0$.

B.1. (0,5 pt) L'expression de L . La fonction affine qui vaut $f(a)$ en a et $f(b)$ en b est

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a),$$

et c'est la seule : une fonction affine est déterminée par ses valeurs en deux points distincts, ce qui est le cas ici puisque $a \neq b$.

La dérivée seconde. La fonction L est un polynôme de degré au plus 1, donc L' est constante, égale à $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, et $L'' = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Les deux zéros de E . Par construction, $E(a) = f(a) - L(a) = 0$ et $E(b) = f(b) - L(b) = 0$.

La dérivée seconde de E . Sur $]a, b[$, la fonction f est deux fois dérivable et L l'est aussi (c'est un polynôme), donc $E = f - L$ l'est également, et

$$E'' = f'' - L'' = f'' \quad \text{sur }]a, b[.$$

C'est le point qui fait toute la démonstration : **retrancher la corde ne change pas la dérivée seconde**, et ce qu'on va mesurer est bien une propriété de f'' .

B.2. (0,75 pt) Les deux bouts sont gratuits. Le polynôme $(t-a)(t-b)$ s'annule en $t=a$ et en $t=b$. Donc, quel que soit le réel K ,

$$\varphi(a) = E(a) - 0 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(b) = E(b) - 0 = 0.$$

On remarque donc que φ possède **déjà deux zéros**, sans qu'aucun choix n'ait été fait : le paramètre K reste entièrement libre pour en fabriquer un troisième.

Le troisième zéro. La condition $\varphi(x_0) = 0$ s'écrit

$$E(x_0) = K \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}.$$

C'est une équation du premier degré en K , dont le coefficient est $\frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}$. Or $x_0 \in]a, b[$ donne $x_0 - a > 0$ et $x_0 - b < 0$, donc ce coefficient est **non nul** (il est même strictement négatif). L'équation admet donc une solution, et une seule :

$$K = \frac{2 E(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

Ce réel K est désormais **fixé**, et toute la suite consiste à démontrer qu'il est une valeur de f'' .

B.3. (1,25 pt) Rolle sur $[a, x_0]$. Vérifions les trois hypothèses, une par une.

1. **Continuité sur le segment** $[a, x_0]$. La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc sur $[a, x_0]$ qui y est contenu ; les fonctions L et $t \mapsto \frac{(t-a)(t-b)}{2}$ sont polynomiales, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par différence, φ est continue sur $[a, x_0]$.
2. **Dérivabilité sur l'intervalle ouvert** $]a, x_0[$. On a $]a, x_0[\subset]a, b[$, où f est deux fois dérivable, donc en particulier dérivable ; les deux autres termes sont polynomiaux. Par différence, φ est dérivable sur $]a, x_0[$.
3. **Égalité des valeurs aux extrémités**. $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(x_0) = 0$ d'après la question **B.2**.

Le théorème de Rolle (section 11) fournit donc $c_1 \in]a, x_0[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.

Rolle sur $[x_0, b]$. Les trois vérifications sont identiques, en remplaçant $[a, x_0]$ par $[x_0, b]$: continuité sur $[x_0, b] \subset [a, b]$, dérivabilité sur $]x_0, b[\subset]a, b[$, et $\varphi(x_0) = \varphi(b) = 0$. On obtient $c_2 \in]x_0, b[$ tel que $\varphi'(c_2) = 0$.

Les deux points sont distincts et bien placés. On a $a < c_1 < x_0 < c_2 < b$, donc $c_1 < c_2$ et tous deux appartiennent à $]a, b[$. $\square$

Où sert la position stricte de x_0 . Si x_0 valait a ou b , l'un des deux segments $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$ serait réduit à un point, et le théorème de Rolle, qui exige $a < b$, ne s'y appliquerait pas : on n'obtiendrait qu'un seul point c_1 , ce qui ne suffirait pas pour la suite. C'est aussi la raison pour laquelle le théorème énoncé ne porte que sur $x_0 \in]a, b[$ — en a et en b l'égalité est de toute façon triviale, ses deux membres étant nuls.

B.4. (1 pt) Rolle sur $[c_1, c_2]$, appliqué à φ' . Vérifions à nouveau les trois hypothèses.

1. **Continuité de φ' sur $[c_1, c_2]$** . Sur $]a, b[$, la fonction φ est **deux fois** dérivable, donc φ' y est dérivable, donc continue (section 4 : la dérivabilité entraîne la continuité). Or $[c_1, c_2] \subset]a, b[$, puisque $a < c_1$ et $c_2 < b$. Donc φ' est continue sur $[c_1, c_2]$. C'est ici que sert la dérivabilité **seconde** : sans elle, φ' pourrait être discontinue et le théorème de Rolle ne s'appliquerait pas.
2. **Dérivabilité de φ' sur $]c_1, c_2[$** . Même argument : $]c_1, c_2[\subset]a, b[$.
3. **Égalité des valeurs aux extrémités**. $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$ d'après la question **B.3**.

Le théorème de Rolle fournit donc $c \in]c_1, c_2[$ tel que $\varphi''(c) = 0$. Et $]c_1, c_2[\subset]a, b[$, donc $c \in]a, b[$.

Le calcul de φ'' . Développons le polynôme :

$$\frac{(t-a)(t-b)}{2} = \frac{t^2 - (a+b)t + ab}{2}.$$

Sa dérivée vaut $\frac{2t - (a+b)}{2}$ et sa dérivée seconde vaut 1, constante. Donc, sur $]a, b[$,

$$\varphi''(t) = E''(t) - K \times 1 = f''(t) - K,$$

en utilisant $E'' = f''$ établi à la question **B.1**.

La conclusion. L'égalité $\varphi''(c) = 0$ donne donc $K = f''(c)$. En reportant dans l'expression de K obtenue à la question **B.2** :

$$\frac{2E(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)} = f''(c), \quad \text{c'est-à-dire} \quad E(x_0) = \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(c).$$

C'est exactement l'énoncé annoncé. $\square$

Remarque

Le geste, et ce qu'il a de nouveau. La fabrication d'une fonction auxiliaire qui s'annule aux deux bouts est celle de la section 19, où elle sert à démontrer la formule de Taylor-Lagrange. Ce qui change ici, c'est que φ a **trois** zéros et non deux, et que Rolle s'applique en cascade : deux fois à φ , une fois à φ' . Retenez la règle de comptage : $n+1$ zéros de φ donnent n zéros de φ' , donc $n-1$ zéros de φ'' , et ainsi de suite. C'est ce mécanisme qui permet d'atteindre une dérivée d'ordre élevé à partir de simples annulations.

C.1. (0,75 pt) *Le maximum du produit.* Pour $x \in [a, b]$, on a $x-a \geq 0$ et $x-b \leq 0$, donc le produit $(x-a)(x-b)$ est négatif et

$$|(x-a)(x-b)| = (x-a)(b-x).$$

Posons $q(x) = (x-a)(b-x)$ sur $[a, b]$. Cette fonction est polynomiale, donc dérivable, et

$$q'(x) = (b-x) - (x-a) = a+b-2x,$$

qui est strictement positif pour $x < \frac{a+b}{2}$ et strictement négatif pour $x > \frac{a+b}{2}$. La fonction q croît puis décroît : son maximum est atteint au **milieu** $\frac{a+b}{2}$, et il vaut

$$q\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{2} \times \frac{b-a}{2} = \frac{h^2}{4}. \quad \square$$

La majoration. Soit $x \in]a, b[$. Le théorème de la partie B fournit $c \in]a, b[$ tel que $E(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$. En passant aux valeurs absolues, puis en majorant séparément les deux facteurs,

$$|E(x)| = \frac{|(x-a)(x-b)|}{2} \times |f''(c)| \leq \frac{h^2}{4} \times \frac{M_2}{2} = \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Aux deux extrémités $x = a$ et $x = b$, on a $E(x) = 0$ et l'inégalité est encore vraie. Elle vaut donc sur $[a, b]$ tout entier. $\square$

Application à la partie A. Sur $[1, 4]$, on a $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, fonction décroissante et positive, donc majorée par sa valeur en 1 : on prend $M_2 = 2$. Avec $h = 3$,

$$\frac{M_2 h^2}{8} = \frac{2 \times 9}{8} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

L'erreur réelle maximale, calculée à la question **A.2**, vaut $\frac{1}{4} = 0,25$: la majoration est **neuf fois trop grande**.

Le commentaire. Cet écart n'a rien de mystérieux. La majoration uniforme remplace $f''(c)$ par le pire majorant sur tout l'intervalle, alors que l'erreur réelle au point $x = 2$ ne fait intervenir que $f''(2) = \frac{1}{4}$. Or f'' passe de 2 à $\frac{1}{32}$ entre 1 et 4 : elle varie d'un facteur 64, et la majoration paie cette variation. La question **C.4** montrera qu'au contraire, sur un intervalle court où f'' varie peu, la même majoration devient presque exacte.

C.2. (0,5 pt) Soit $x \in]a, b[$. Le théorème de la partie B fournit $c \in]a, b[$ tel que

$$E(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c).$$

Le facteur $(x-a)(x-b)$ est strictement négatif, comme on l'a vu à la question **C.1**, et $f''(c) \geq 0$ par hypothèse. Le produit est donc négatif ou nul :

$$E(x) \leq 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \leq L(x).$$

Aux extrémités, $E(a) = E(b) = 0$ et l'inégalité est une égalité. Donc, sur $[a, b]$ tout entier, **la courbe de f est au-dessous de sa corde**. $\square$

L'énoncé retrouvé. C'est la définition même de la convexité, telle qu'elle est posée à la section 24 : « entre deux points de la courbe, la corde est au-dessus de la courbe ». On vient donc de la redémontrer, pour une fonction deux fois dérivable, **sans passer par le lemme des trois pentes**.

Ce que la formule ajoute. Trois choses que l'énoncé de la section 24 ne donne pas. D'abord une mesure : l'écart à la corde vaut exactement $\frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$, et non seulement « quelque chose de négatif ». Ensuite une majoration chiffrée, celle de la question **C.1**. Enfin la localisation du pire cas, le milieu du segment, où le facteur $|(x-a)(x-b)|$ est maximal. La convexité dit de quel côté ; la formule dit de combien, et où.

C.3. (0,5 pt) *L'erreur de la tangente.* La tangente en a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, et c'est le polynôme de Taylor de f à l'ordre 1 en a . La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ — c'est ici que sert l'hypothèse renforcée de cette partie, car $f'(a)$ doit exister et f' doit être dérivable — la **formule de Taylor-Lagrange** à l'ordre 1 entre a et x s'applique et fournit, pour chaque $x \in]a, b]$, un réel $c_x \in]a, x[$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(c_x).$$

En passant aux valeurs absolues et en majorant $|f''|$ par M_2 , puis $(x-a)^2$ par h^2 ,

$$|f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]| \leq \frac{M_2 h^2}{2} \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

La comparaison. Les deux majorations sont

$$\frac{M_2 h^2}{2} \quad \text{pour la tangente en } a, \quad \frac{M_2 h^2}{8} \quad \text{pour la corde.}$$

La corde est donc **quatre fois meilleure** sur le segment entier.

Cette comparaison est-elle honnête ? Oui, car les deux majorations sont **atteintes**, donc optimales. Prenons $f(x) = \frac{M_2}{2}(x-a)^2$, pour laquelle $f'' = M_2$ partout. La tangente en a est la droite $y = 0$, et l'erreur en $x = b$ vaut exactement $\frac{M_2 h^2}{2}$. La corde joint $(a; 0)$ à $(b; \frac{M_2 h^2}{2})$,

donc $L(x) = \frac{M_2 h}{2}(x - a)$ et

$$E(x) = \frac{M_2}{2}(x - a)^2 - \frac{M_2 h}{2}(x - a) = \frac{M_2}{2}(x - a)(x - a - h) = \frac{M_2}{2}(x - a)(x - b),$$

dont le module est maximal au milieu et y vaut $\frac{M_2 h^2}{8}$. Les deux bornes sont donc exactement atteintes, et le rapport 4 est le bon.

Ce que chacune coûte. La corde réclame **deux valeurs de f** et aucune dérivée; la tangente réclame **une valeur de f et une valeur de f'** . C'est ce qui décide en pratique : une table de valeurs ne contient pas de dérivées, et c'est pourquoi on y interpole avec la corde.

Une nuance à ne pas taire. Le rapport 4 concerne le pire cas sur $[a, b]$. Près de a , la tangente est bien meilleure : son erreur est majorée par $\frac{M_2}{2}(x - a)^2$, qui tend vers 0 quand x tend vers a , alors que la corde conserve une erreur de l'ordre de h^2 au milieu. La corde gagne **uniformément**, la tangente gagne **localement**.

C.4. (0,75 pt) L'interpolation. On interpole entre $a = 1,4$ et $b = 1,5$, donc $h = 0,1$, et le point 1,45 est le **milieu** du segment. La corde y prend la moyenne des deux valeurs :

$$L(1,45) = \frac{0,7142857 + 0,6666667}{2} = \frac{1,3809524}{2} = 0,6904762.$$

La majoration. Sur $[1,4; 1,5]$, la fonction $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ est décroissante et positive, donc majorée par sa valeur en 1,4. Comme $1,4^3 = 2,744$,

$$M_2 = \frac{2}{2,744} = 0,7288... \leq 0,73.$$

La question **C.1** donne alors

$$|E(1,45)| \leq \frac{0,73 \times 0,01}{8} = 9,125 \times 10^{-4} \leq 9,2 \times 10^{-4}.$$

La comparaison. L'erreur réelle vaut

$$E(1,45) = 0,6896552 - 0,6904762 = -8,210 \times 10^{-4}.$$

Elle est **négative**, conformément à la question **C.2** : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée seconde positive, donc sa courbe est sous sa corde, et l'interpolation affine **surestime** toujours un inverse. Et son module, $8,21 \times 10^{-4}$, est très proche de la majoration $9,2 \times 10^{-4}$: le rapport vaut 1,11. Contrairement au cas de la partie A, la majoration est ici presque exacte, parce que f'' ne varie que de 0,729 à 0,593 sur ce court intervalle.

Ce que la table garantit. Avec un pas de 0,1, la majoration place $\frac{1}{1,45}$ dans l'intervalle $[0,689564; 0,691389]$: elle garantit deux décimales, 0,69, et **pas** la troisième, puisque 0,690 et 0,691 y restent tous deux possibles. Que la valeur exacte arrondisse à 0,690 est vrai, mais ce n'est pas ce que la majoration démontre — c'est exactement la distinction faite à la question **C.1** et dans l'encadrement de $\sqrt{e}$ du cours.

Le pas nécessaire pour 10^{-6} . Sur $[1, 2]$, la dérivée seconde $\frac{2}{x^3}$ est majorée par sa valeur en 1, soit $M_2 = 2$. Sur chaque intervalle de la table, de longueur h , la majoration de la question **C.1** vaut

$$\frac{M_2 h^2}{8} = \frac{2h^2}{8} = \frac{h^2}{4}.$$

La condition $\frac{h^2}{4} \leq 10^{-6}$ équivaut, les deux membres étant positifs, à $h^2 \leq 4 \times 10^{-6}$, soit

$$h \leq 2 \times 10^{-3}.$$

Un pas de 2×10^{-3} suffit donc. L'intervalle $[1, 2]$ est alors découpé en $\frac{1}{2 \times 10^{-3}} = 500$ sous-intervalles, ce qui fait 501 **lignes** de table, extrémités comprises.

La lecture finale. Avec le pas 0,1, la table compte 11 lignes et garantit $\frac{2 \times 0,01}{8} = 2,5 \times 10^{-3}$. Passer à 10^{-6} divise l'erreur par 2 500 et n'exige de diviser le pas que par 50 : l'erreur d'interpolation étant **quadratique** en h , elle s'effondre bien plus vite que le pas ne diminue. C'est cette dépendance en h^2 , et non en h , qui rend les tables utilisables, et c'est le théorème de la partie B qui la démontre.