

Suites arithmétiques et fonctions affines

Fiche d'exercices corrigés — 1re ens. sci.

Difficulté : ★ application directe · ★★ standard · ★★★ approfondissement · ★★★★★ défi.

Un conseil : cherchez d'abord, le corrigé ensuite — c'est là que ça progresse.

Exercice 1 ★ Reconnaître une suite arithmétique

Notions : Suite arithmétique : définition par récurrence

Pour chacune des situations suivantes, dire si la suite est arithmétique. Si oui, donner sa raison ; sinon, expliquer pourquoi. Justifier dans chaque cas en calculant les différences entre termes consécutifs.

Voici les premiers termes de trois suites de nombres :

a. 5 ; 8 ; 11 ; 14

b. 1 ; 2 ; 4 ; 8

c. 20 ; 17,5 ; 15 ; 12,5

d. La suite u est définie par $u(0) = 10$ et, pour tout entier naturel n , $u(n+1) = u(n) - 4$.

e. La suite v est définie par $v(0) = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v(n+1) = 2v(n) + 1$. On pourra commencer par calculer $v(1)$ et $v(2)$.

Corrigé

Pour savoir si une suite est arithmétique, on calcule les différences entre termes consécutifs (chaque terme moins le précédent) : si elles sont toutes égales, la suite est arithmétique et cette différence commune est la raison r .

a. On calcule les différences entre termes consécutifs : $8 - 5 = 3$, puis $11 - 8 = 3$, puis $14 - 11 = 3$. Les différences sont toutes égales à 3, donc la suite est arithmétique, de raison $r = 3$.

b. On calcule les différences entre termes consécutifs : $2 - 1 = 1$, puis $4 - 2 = 2$, puis $8 - 4 = 4$. Les différences ne sont pas toutes égales (on trouve 1, puis 2, puis 4), donc la suite n'est pas arithmétique.

c. On calcule les différences entre termes consécutifs : $17,5 - 20 = -2,5$, puis $15 - 17,5 = -2,5$, puis $12,5 - 15 = -2,5$. Les différences sont toutes égales à $-2,5$, donc la suite est arithmétique, de raison $r = -2,5$. Une raison peut être négative : ici, chaque terme s'obtient en retranchant 2,5 au précédent.

d. La relation $u(n+1) = u(n) - 4$ signifie que, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre : -4 . C'est exactement la définition d'une suite arithmétique. La suite u est donc arithmétique, de raison $r = -4$.

e. On calcule les premiers termes : $v(1) = 2v(0) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$, puis $v(2) = 2v(1) + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$. On calcule alors les différences : $v(1) - v(0) = 3 - 1 = 2$ et $v(2) - v(1) = 7 - 3 = 4$. Elles ne sont pas égales : on n'ajoute pas toujours le même nombre, donc la suite v n'est pas arithmétique. Il suffit de trouver deux différences distinctes pour pouvoir conclure.

Exercice 2 ★ Calculer des termes de proche en proche

Notions : Suite arithmétique : définition par récurrence

1. La suite u est définie par $u(0) = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u(n+1) = u(n) + 5$. Calculer $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$ et $u(4)$.
2. La suite v est définie par $v(1) = 8$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v(n+1) = v(n) - 2$. Calculer $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.
3. Les suites u et v sont-elles arithmétiques ? Si oui, préciser leur raison.

Corrigé

1. La relation $u(n+1) = u(n) + 5$ signifie que chaque terme s'obtient en ajoutant 5 au terme précédent. On calcule donc de proche en proche, en partant de $u(0) = 3$:

$$u(1) = u(0) + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$u(2) = u(1) + 5 = 8 + 5 = 13$$

$$u(3) = u(2) + 5 = 13 + 5 = 18$$

$$u(4) = u(3) + 5 = 18 + 5 = 23$$

2. De même, la relation $v(n+1) = v(n) - 2$ signifie que chaque terme s'obtient en retranchant 2 au terme précédent. On part cette fois de $v(1) = 8$:

$$v(2) = v(1) - 2 = 8 - 2 = 6$$

$$v(3) = v(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$v(4) = v(3) - 2 = 4 - 2 = 2$$

3. Pour la suite u : d'après la relation $u(n+1) = u(n) + 5$, on ajoute toujours le même nombre, 5, pour passer d'un terme au suivant. La suite u est donc arithmétique, de raison $r = 5$.
Pour la suite v : d'après la relation $v(n+1) = v(n) - 2$, on ajoute toujours le même nombre, -2 (retrancher 2, c'est ajouter -2). La suite v est donc arithmétique, de raison $r = -2$.

Exercice 3 ★ Utiliser la formule du terme de rang n Notions : Terme de rang n (formule explicite)

1. La suite u est arithmétique de premier terme $u(0) = 7$ et de raison 4.
 - a. Exprimer $u(n)$ en fonction de n .
 - b. Calculer $u(10)$ et $u(25)$.
2. La suite w est définie, pour tout entier naturel n , par $w(n) = 5 + 3n$.
 - a. Donner $w(0)$ et la raison de cette suite arithmétique.
 - b. Calculer $w(12)$.
3. Existe-t-il un rang n tel que $w(n) = 92$? Justifier par un calcul.

Corrigé

1. a. La suite u est arithmétique, de premier terme $u(0) = 7$ et de raison $r = 4$. Or, pour une suite arithmétique, on a $u(n) = u(0) + nr$ pour tout entier naturel n . Donc :

$$u(n) = 7 + 4n$$

1. b. On remplace n par 10, puis par 25, dans la formule précédente : $u(10) = 7 + 4 \times 10 = 7 + 40 = 47$ et $u(25) = 7 + 4 \times 25 = 7 + 100 = 107$.

2. a. En remplaçant n par 0 dans l'expression donnée : $w(0) = 5 + 3 \times 0 = 5$. De plus, l'expression $w(n) = 5 + 3n$ est de la forme $w(0) + nr$ avec $w(0) = 5$ et $r = 3$: la suite w est donc arithmétique, de premier terme 5 et de raison $r = 3$.

2. b. $w(12) = 5 + 3 \times 12 = 5 + 36 = 41$.

3. On cherche un entier naturel n tel que $w(n) = 92$, c'est-à-dire tel que $5 + 3n = 92$. On résout cette équation : $3n = 92 - 5 = 87$, donc $n = \frac{87}{3} = 29$. Comme 29 est bien un entier naturel, la réponse est oui : c'est au rang $n = 29$ que la suite prend la valeur 92. Vérification : $w(29) = 5 + 3 \times 29 = 5 + 87 = 92$.

Exercice 4 ★ Discret ou continu ?

Notions : Reconnaître une croissance linéaire (discret / continu)

Pour chacune des situations suivantes, répondre aux trois questions :

- la grandeur étudiée est-elle **discrète** (elle évolue par paliers, valeur par valeur) ou **continue** (elle peut prendre toutes les valeurs intermédiaires) ?
- l'évolution est-elle **linéaire**, c'est-à-dire avec un accroissement constant ?
- lorsque c'est possible, proposer un modèle : une suite arithmétique (préciser le premier terme et la raison) ou une fonction affine (donner son expression).

- a. Le nombre d'adhérents d'un club de sport augmente de 12 chaque année. En 2026, le club compte 180 adhérents. On étudie le nombre d'adhérents n années après 2026.
- b. Pendant le remplissage d'une piscine, la hauteur d'eau monte de 1,5 cm par heure. Au début du remplissage, la hauteur d'eau est de 20 cm. On étudie la hauteur d'eau (en cm) en fonction du temps écoulé (en heures).
- c. Un capital placé sur un compte double chaque année. On étudie le capital au bout de n années.
- d. Une course de taxi coûte 2,60 € de prise en charge, plus 1,80 € par kilomètre parcouru. On étudie le prix de la course (en €) en fonction de la distance parcourue (en km).

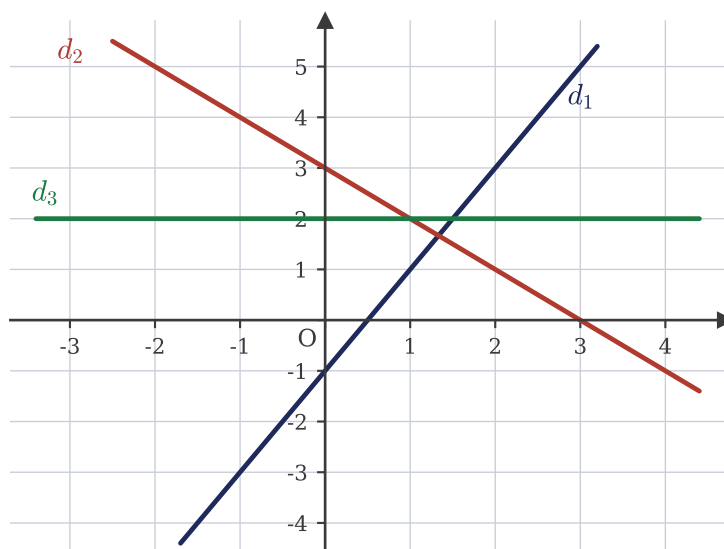
Corrigé

- a. Le nombre d'adhérents est un nombre entier que l'on relève année après année : la grandeur est **discrète**. Chaque année, ce nombre augmente du même nombre, 12 : l'accroissement est constant, donc l'évolution est **linéaire**. Comme la grandeur est discrète, on la modélise par une suite arithmétique u , de premier terme $u(0) = 180$ (le nombre d'adhérents en 2026) et de raison 12. Pour tout entier naturel n , on a alors $u(n) = 180 + 12n$.
- b. Le temps s'écoule sans saut et la hauteur d'eau passe par toutes les valeurs intermédiaires : la grandeur est **continue**. La hauteur augmente de 1,5 cm à chaque heure : l'accroissement est constant, donc l'évolution est **linéaire**. Comme la grandeur est continue, on la modélise par une fonction affine : $h(t) = 20 + 1,5t$, où t est le temps écoulé en heures et $h(t)$ la hauteur d'eau en cm (20 est la hauteur initiale et 1,5 le coefficient directeur).
- c. Le capital est relevé au bout de 1, 2, 3, ... années : la grandeur est **discrète**. En revanche, l'évolution n'est **pas linéaire**, car l'accroissement n'est pas constant. Par exemple, pour un capital initial de 1 000 €, le capital gagne 1 000 € la première année (il passe de 1 000 à 2 000 €), puis 2 000 € la deuxième année (de 2 000 à 4 000 €). Comme on n'ajoute pas toujours le même montant, on ne peut pas modéliser cette situation par une suite arithmétique.
- d. La distance parcourue peut prendre n'importe quelle valeur (par exemple 3,7 km) : la grandeur est **continue**. Chaque kilomètre supplémentaire coûte le même montant, 1,80 € : l'accroissement est constant, donc l'évolution est **linéaire**. On modélise le prix par une fonction affine : $f(x) = 1,80x + 2,60$, où x est la distance en km et $f(x)$ le prix en euros. L'ordonnée à l'origine 2,60 correspond à la prise en charge, et le coefficient directeur 1,80 au prix d'un kilomètre.

Exercice 5 ★ Lire des équations de droites

Notions : Fonctions affines : coefficient directeur et variations, Représentations graphiques (points alignés, droites)

On a tracé trois droites d_1 , d_2 et d_3 dans un repère.



1. Pour chacune des trois droites, lire graphiquement l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur.
2. En déduire l'équation réduite de chacune des trois droites.
3. Chaque droite représente une fonction affine. Donner le sens de variation de chacune de ces fonctions, en justifiant par le signe du coefficient directeur.

Corrigé

1. L'ordonnée à l'origine se lit à l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées ; le coefficient directeur se lit en observant de combien varie y quand x augmente de 1.

Pour la droite d_1 : elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0 ; -1)$, donc son ordonnée à l'origine est -1 . Quand x augmente de 1, y augmente de 2 (en partant du point $(0 ; -1)$, on arrive au point $(1 ; 1)$ de la droite) : son coefficient directeur est 2.

Pour la droite d_2 : elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0 ; 3)$, donc son ordonnée à l'origine est 3. Quand x augmente de 1, y diminue de 1 (on passe du point $(0 ; 3)$ au point $(1 ; 2)$) : son coefficient directeur est -1 .

Pour la droite d_3 : elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0 ; 2)$, donc son ordonnée à l'origine est 2. La droite est horizontale : quand x augmente de 1, y ne varie pas, donc son coefficient directeur est 0.

2. L'équation réduite d'une droite est de la forme $y = mx + p$, où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine. Avec les lectures de la question précédente :

$$d_1 : y = 2x - 1 \quad d_2 : y = -x + 3 \quad d_3 : y = 2$$

3. Le sens de variation d'une fonction affine est donné par le signe de son coefficient directeur. La droite d_1 représente la fonction $x \mapsto 2x - 1$, de coefficient directeur $2 > 0$: cette fonction est croissante.

La droite d_2 représente la fonction $x \mapsto -x + 3$, de coefficient directeur $-1 < 0$: cette fonction est décroissante.

La droite d_3 représente la fonction $x \mapsto 2$, de coefficient directeur 0 : cette fonction est constante

(elle prend la même valeur 2 pour tout x).

Exercice 6 ★★ Un placement à intérêts simples

Notions : Suite arithmétique : définition par récurrence, Terme de rang n (formule explicite)

On place 800 € sur un livret à **intérêts simples** : chaque année, la banque verse des intérêts égaux à 3 % du capital **initial**, soit 24 € par an. On note $u(n)$ le capital total, en euros, au bout de n années.

1. Justifier que $u(0) = 800$, puis calculer $u(1)$ et $u(2)$.
2. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$. Quelle est la nature de la suite u ?
3. Exprimer $u(n)$ en fonction de n .
4. Quel est le capital disponible au bout de 10 ans ?
5. Expliquer pourquoi un placement à intérêts simples produit une croissance linéaire du capital.

Corrigé

1. $u(0)$ est le capital au bout de 0 année, c'est-à-dire le capital placé au départ, avant tout versement d'intérêts : on a donc $u(0) = 800$.

Chaque année, la banque verse des intérêts égaux à 3 % du capital initial, soit $0,03 \times 800 = 24$ €. Au bout d'un an : $u(1) = u(0) + 24 = 800 + 24 = 824$. Au bout de deux ans : $u(2) = u(1) + 24 = 824 + 24 = 848$. Le capital vaut donc 824 € au bout d'un an et 848 € au bout de deux ans.

2. D'une année à la suivante, le capital augmente toujours du même montant, 24 € (les intérêts sont calculés sur le capital initial, donc ils ne changent jamais). Pour tout entier naturel n , on a donc :

$$u(n+1) = u(n) + 24$$

On ajoute toujours le même nombre pour passer d'un terme au suivant : la suite u est arithmétique, de premier terme $u(0) = 800$ et de raison $r = 24$.

3. La suite u est arithmétique de premier terme $u(0) = 800$ et de raison $r = 24$, donc $u(n) = u(0) + nr$ pour tout entier naturel n , c'est-à-dire :

$$u(n) = 800 + 24n$$

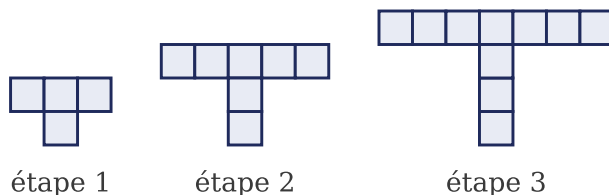
4. Le capital au bout de 10 ans est $u(10)$. D'après la formule précédente : $u(10) = 800 + 24 \times 10 = 800 + 240 = 1\,040$. Le capital disponible au bout de 10 ans est donc de 1 040 €.

5. Avec des intérêts simples, les intérêts sont toujours calculés sur le capital **initial** (800 €), et non sur le capital de l'année en cours : le versement annuel est donc constant, égal à 24 €. Comme le capital augmente du même montant chaque année, son évolution est linéaire : la suite u est arithmétique et, si on place les points $(n; u(n))$ dans un repère, ils sont alignés sur une droite.

Exercice 7 ★★ Des motifs en T

Notions : Reconnaître une croissance linéaire (discret / continu), Terme de rang n (formule explicite)

On construit des motifs en forme de T avec des carrés identiques. À chaque étape, le motif est formé d'une barre horizontale surmontant une colonne centrale, et il grandit selon une règle régulière.



On note $t(n)$ le nombre de carrés du motif de l'étape n .

1. Compter le nombre de carrés des motifs des étapes 1, 2 et 3.
2. Combien de carrés supplémentaires faut-il pour passer d'une étape à la suivante ? En déduire la nature de la suite t .
3. À l'étape n , la barre horizontale compte $2n+1$ carrés et la colonne centrale en compte n . Justifier, à partir de cette construction, que $t(n) = 3n + 1$.
4. Combien de carrés compte le motif de l'étape 25 ?
5. Existe-t-il une étape dont le motif compte exactement 100 carrés ? Justifier par un calcul.

Corrigé

1. On compte les carrés sur la figure. À l'étape 1, la barre horizontale compte 3 carrés et la colonne 1 carré : $t(1) = 4$. À l'étape 2, la barre compte 5 carrés et la colonne 2 carrés : $t(2) = 7$. À l'étape 3, la barre compte 7 carrés et la colonne 3 carrés : $t(3) = 10$.

2. On calcule les différences entre étapes consécutives : $t(2) - t(1) = 7 - 4 = 3$ et $t(3) - t(2) = 10 - 7 = 3$. Il faut donc 3 carrés supplémentaires pour passer d'une étape à la suivante : un carré de plus à chaque extrémité de la barre horizontale (soit deux carrés) et un carré de plus dans la colonne centrale. Comme on ajoute toujours le même nombre de carrés, la suite t est arithmétique, de raison $r = 3$.

3. À l'étape n , le motif est constitué de deux parties qui ne se chevauchent pas : la barre horizontale, qui compte $2n + 1$ carrés, et la colonne centrale, qui en compte n . Le nombre total de carrés est donc la somme des deux :

$$t(n) = (2n + 1) + n = 3n + 1$$

On peut vérifier avec la figure : $t(1) = 3 \times 1 + 1 = 4$, ce qui est bien le nombre de carrés compté à l'étape 1.

4. On remplace n par 25 dans la formule : $t(25) = 3 \times 25 + 1 = 75 + 1 = 76$. Le motif de l'étape 25 compte donc 76 carrés.

5. On cherche un entier naturel n tel que $t(n) = 100$, c'est-à-dire tel que $3n + 1 = 100$. On résout cette équation : $3n = 100 - 1 = 99$, donc $n = \frac{99}{3} = 33$. Comme 33 est bien un entier naturel, la réponse est oui : le motif de l'étape 33 compte exactement 100 carrés. Vérification : $t(33) = 3 \times 33 + 1 = 99 + 1 = 100$.

Exercice 8 ★★ Croissante ou décroissante ?

Notions : Sens de variation d'une suite arithmétique

- Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes, en justifiant par le signe de la raison :
 - la suite u définie, pour tout entier naturel n , par $u(n) = 12 - 5n$;
 - la suite v définie par $v(0) = -3$ et, pour tout entier naturel n , $v(n+1) = v(n) + 0,5$;
 - la suite w définie, pour tout entier naturel n , par $w(n) = 4n - 9$.
- La suite t est définie, pour tout entier naturel n , par $t(n) = n^2$. Calculer $t(1) - t(0)$ et $t(2) - t(1)$. La suite t est-elle arithmétique ? Peut-on utiliser le signe de la raison pour donner son sens de variation ?

Corrigé

1. On utilise la propriété du cours : une suite arithmétique de raison r est croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.

1. **a.** L'expression $u(n) = 12 - 5n$ peut s'écrire $u(n) = 12 + n \times (-5)$: elle est de la forme $u(0) + nr$ avec $u(0) = 12$ et $r = -5$. La suite u est donc arithmétique de raison -5 . Comme $-5 < 0$, la suite u est décroissante.

1. **b.** La relation $v(n+1) = v(n) + 0,5$ signifie qu'on ajoute toujours le même nombre, 0,5, pour passer d'un terme au suivant : la suite v est arithmétique de raison 0,5. Comme $0,5 > 0$, la suite v est croissante.

1. **c.** L'expression $w(n) = 4n - 9$ peut s'écrire $w(n) = -9 + 4n$: elle est de la forme $w(0) + nr$ avec $w(0) = -9$ et $r = 4$. La suite w est donc arithmétique de raison 4. Comme $4 > 0$, la suite w est croissante.

2. On calcule les termes demandés : $t(0) = 0^2 = 0$, $t(1) = 1^2 = 1$ et $t(2) = 2^2 = 4$. Donc $t(1) - t(0) = 1 - 0 = 1$ et $t(2) - t(1) = 4 - 1 = 3$.

Les différences entre termes consécutifs ne sont pas toutes égales (1 puis 3) : on n'ajoute pas toujours le même nombre, donc la suite t n'est **pas** arithmétique.

Attention au piège : la propriété « raison positive donc croissante, raison négative donc décroissante » ne s'applique qu'aux suites **arithmétiques**. Comme t n'est pas arithmétique, elle n'a pas de raison, et on ne peut donc pas utiliser cette propriété pour donner son sens de variation. (En observant les premiers termes 0, 1, 4, 9, ..., on constate que la suite t semble croissante, mais il faudrait le justifier par une autre méthode.)

Exercice 9 ★★ Degrés Celsius et degrés Fahrenheit

Notions : Fonctions affines : coefficient directeur et variations

Aux États-Unis, les températures sont exprimées en degrés Fahrenheit (°F). La température F en degrés Fahrenheit s'obtient à partir de la température x en degrés Celsius (°C) grâce à la fonction affine définie par :

$$F(x) = 1,8x + 32$$

1. Convertir en degrés Fahrenheit les températures de 20 °C et de 100 °C.
2. Aux États-Unis, la température corporelle de référence est 98,6 °F. Retrouver la valeur correspondante en degrés Celsius en résolvant une équation.
3. Interpréter concrètement le coefficient directeur 1,8 de la fonction F .
4. Vrai ou faux ? Justifier : « si la température en degrés Celsius double, alors la température en degrés Fahrenheit double aussi ».

Corrigé

1. Pour convertir une température, on calcule son image par la fonction F .

Pour 20 °C : $F(20) = 1,8 \times 20 + 32 = 36 + 32 = 68$.

Pour 100 °C : $F(100) = 1,8 \times 100 + 32 = 180 + 32 = 212$.

Une température de 20 °C correspond donc à 68 °F, et une température de 100 °C correspond à 212 °F.

2. On cherche la température x , en degrés Celsius, dont l'image par F vaut 98,6. On résout donc l'équation :

$$1,8x + 32 = 98,6$$

On soustrait 32 aux deux membres : $1,8x = 66,6$. On divise ensuite les deux membres par 1,8, qui est non nul :

$$x = \frac{66,6}{1,8} = 37$$

La température corporelle de référence de 98,6 °F correspond donc à 37 °C — on retrouve bien la valeur usuelle en France.

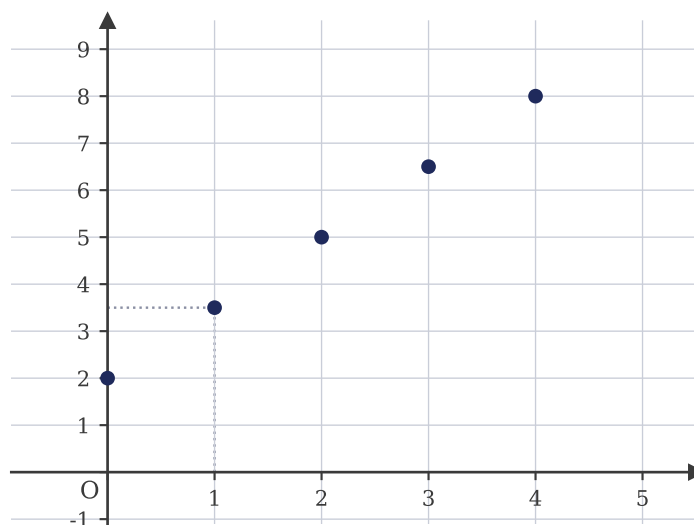
3. Pour une fonction affine, le coefficient directeur est le taux d'accroissement : lorsque la variable augmente de 1, l'image augmente toujours du coefficient directeur, quel que soit le point de départ. Concrètement : chaque fois que la température augmente de 1 °C, la température exprimée en degrés Fahrenheit augmente de 1,8 °F, que l'on parte de 0 °C, de 20 °C ou de n'importe quelle autre température.

4. **Faux.** Contre-exemple : pour 10 °C, on a $F(10) = 1,8 \times 10 + 32 = 50$, soit 50 °F ; en doublant la température, pour 20 °C, on a $F(20) = 68$ °F, et non $2 \times 50 = 100$ °F. L'affirmation reviendrait à dire que la température en degrés Fahrenheit est proportionnelle à la température en degrés Celsius, ce qui correspondrait à une fonction linéaire de la forme $F(x) = ax$. Or F est affine avec une ordonnée à l'origine non nulle ($32 \neq 0$) : il n'y a pas proportionnalité entre les deux échelles de température.

Exercice 10 ★★ Lire la représentation graphique d'une suite

Notions : Représentations graphiques (points alignés, droites), Sens de variation d'une suite arithmétique

On a représenté ci-dessous les cinq premiers termes d'une suite u : chaque point a pour coordonnées $(n; u_n)$.



1. Lire graphiquement u_0 et u_3 .
2. Justifier graphiquement que cette suite semble arithmétique, puis donner sa raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Quel est le sens de variation de la suite u ? Justifier.
5. Calculer u_{12} . Pouvait-on lire cette valeur sur le graphique ? Quel est l'intérêt de la formule obtenue à la question 3 ?

Corrigé

1. Le terme u_0 est l'ordonnée du point d'abscisse 0 : on lit $u_0 = 2$. Le terme u_3 est l'ordonnée du point d'abscisse 3 : on lit $u_3 = 6,5$.

2. Sur le graphique, on lit les cinq premiers termes : $u_0 = 2$, $u_1 = 3,5$, $u_2 = 5$, $u_3 = 6,5$ et $u_4 = 8$. On calcule les écarts entre deux termes consécutifs :

$$u_1 - u_0 = 1,5 \quad u_2 - u_1 = 1,5 \quad u_3 - u_2 = 1,5 \quad u_4 - u_3 = 1,5$$

D'un rang au suivant, l'ordonnée augmente toujours de la même quantité — c'est ce qui explique que les cinq points paraissent alignés et régulièrement espacés. La suite u semble donc arithmétique, de raison $r = 1,5$.

3. Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , on a, pour tout entier naturel n , la formule $u_n = u_0 + nr$. Ici, $u_0 = 2$ et $r = 1,5$, donc pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 + 1,5n$$

4. La suite u est arithmétique de raison $r = 1,5$, strictement positive : pour passer d'un terme au suivant, on ajoute 1,5, donc chaque terme dépasse le précédent. La suite u est donc croissante — ce que confirme le graphique, où les points montent régulièrement de gauche à droite.

5. Grâce à la formule de la question 3 : $u_{12} = 2 + 1,5 \times 12 = 2 + 18 = 20$. Non, on ne pouvait pas

lire cette valeur sur le graphique : seuls les termes de u_0 à u_4 y sont représentés, et le rang 12 est bien au-delà. C'est tout l'intérêt de la formule explicite : elle permet de calculer directement n'importe quel terme de la suite, même de rang élevé, sans prolonger la figure ni calculer un à un tous les termes intermédiaires.

Exercice 11 ★★★ Retrouver la raison et le premier terme

Notions : Terme de rang n (formule explicite)

- Une suite arithmétique u vérifie $u_3 = 11$ et $u_7 = 23$.
 - Combien de fois ajoute-t-on la raison r pour passer de u_3 à u_7 ? En déduire une égalité reliant u_7 , u_3 et r .
 - En déduire la valeur de la raison r .
 - Calculer u_0 , puis exprimer u_n en fonction de n .
 - Calculer u_{20} .
- Une suite arithmétique v vérifie $v_5 = 40$ et $v_{10} = 25$. En procédant de la même manière, déterminer la raison et le premier terme v_0 de cette suite. La suite v est-elle croissante ou décroissante ?

Corrigé

1. a. La suite u est arithmétique de raison r : pour passer d'un terme au terme suivant, on ajoute r . Pour passer de u_3 à u_7 , on avance de $7 - 3 = 4$ rangs, donc on ajoute 4 fois la raison. On en déduit l'égalité :

$$u_7 = u_3 + 4r$$

1. b. On remplace u_7 et u_3 par leurs valeurs : $23 = 11 + 4r$. On soustrait 11 aux deux membres : $4r = 12$. On divise par 4 : $r = 3$. La raison de la suite u vaut donc 3.

1. c. De même, pour passer de u_0 à u_3 , on ajoute 3 fois la raison : $u_3 = u_0 + 3r$. On en déduit :

$$u_0 = u_3 - 3r = 11 - 3 \times 3 = 11 - 9 = 2$$

La suite u est donc arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$; d'après la formule $u_n = u_0 + nr$, on a, pour tout entier naturel n : $u_n = 2 + 3n$.

1. d. Avec la formule de la question précédente : $u_{20} = 2 + 3 \times 20 = 2 + 60 = 62$.

2. On procède comme à la question 1. Pour passer de v_5 à v_{10} , on avance de $10 - 5 = 5$ rangs, donc on ajoute 5 fois la raison : $v_{10} = v_5 + 5r$. En remplaçant par les valeurs données : $25 = 40 + 5r$, donc $5r = 25 - 40 = -15$, et en divisant par 5 : $r = -3$.

Pour remonter au premier terme : $v_5 = v_0 + 5r$, donc $v_0 = v_5 - 5r = 40 - 5 \times (-3) = 40 + 15 = 55$. La suite v est arithmétique de premier terme $v_0 = 55$ et de raison $r = -3$. Sa raison est strictement négative : d'un terme au suivant, on retranche 3, donc la suite v est décroissante.

Exercice 12 ★★ Atteindre un objectif d'épargne

Notions : Problèmes de seuil

Léa possède 150 € sur son livret d'épargne. À la fin de chaque mois, elle y ajoute 35 €. On note u_n le montant, en euros, de ses économies au bout de n mois.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 150 + 35n$.
2. Combien Léa possède-t-elle au bout de 6 mois ?
3. Léa souhaite s'offrir un vélo à 500 €. Traduire la phrase « ses économies atteignent 500 € » par une inéquation d'inconnue n , puis la résoudre. Au bout de combien de mois Léa pourra-t-elle acheter son vélo ?
4. Même question pour un objectif de 1 000 €.

Corrigé

1. Au départ, c'est-à-dire au bout de 0 mois, Léa possède 150 €, donc $u_0 = 150$. Ensuite, chaque mois, ses économies augmentent de la même somme, 35 € : on passe de u_n à u_{n+1} en ajoutant 35. La suite u est donc arithmétique, de premier terme $u_0 = 150$ et de raison $r = 35$. D'après la formule du terme de rang n d'une suite arithmétique, $u_n = u_0 + nr$, on obtient bien, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 150 + 35n$$

2. On calcule $u_6 = 150 + 35 \times 6 = 150 + 210 = 360$. Au bout de 6 mois, Léa possède 360 €.

3. *Mise en inéquation.* « Ses économies atteignent 500 € » se traduit par $u_n \geq 500$, c'est-à-dire :

$$150 + 35n \geq 500$$

Résolution. On soustrait 150 aux deux membres : $35n \geq 350$. On divise ensuite les deux membres par 35, qui est strictement positif, donc le sens de l'inégalité est conservé : $n \geq 10$.

Conclusion. Le plus petit entier solution est $n = 10$: Léa pourra acheter son vélo au bout de 10 mois d'épargne.

Vérification. $u_9 = 150 + 35 \times 9 = 465 < 500$ et $u_{10} = 150 + 35 \times 10 = 500$: au bout de 9 mois il manque encore 35 €, et au bout de 10 mois Léa atteint exactement les 500 € nécessaires.

4. *Mise en inéquation.* L'objectif « atteindre 1 000 € » se traduit par $u_n \geq 1\,000$, c'est-à-dire :

$$150 + 35n \geq 1\,000$$

Résolution. On soustrait 150 aux deux membres : $35n \geq 850$. On divise par 35, strictement positif, donc le sens de l'inégalité est conservé : $n \geq \frac{850}{35} \approx 24,3$.

Conclusion. Le nombre de mois n est un entier : le plus petit entier solution est donc 25 (on arrondit à l'entier supérieur, car au bout de 24 mois l'objectif n'est pas encore atteint). Il faudra 25 mois à Léa pour atteindre 1 000 € d'économies.

Vérification. $u_{24} = 150 + 35 \times 24 = 990 < 1\,000$ et $u_{25} = 150 + 35 \times 25 = 1\,025 \geq 1\,000$: c'est bien entre le 24e et le 25e mois que le seuil de 1 000 € est franchi.

Exercice 13 ★★★ La montée du niveau des océans

Notions : Reconnaître une croissance linéaire (discret / continu), Problèmes de seuil

Depuis l'année 2000, les mesures satellitaires montrent que le niveau moyen des océans monte d'environ 3,5 mm par an. On admet dans cet exercice un modèle linéaire : on note $N(x)$ l'élévation du niveau moyen des océans, en millimètres, x années après 2000, avec :

$$N(x) = 3,5x$$

1. La grandeur modélisée évolue-t-elle de façon discrète ou continue ? Pourquoi a-t-on choisi de la modéliser par une fonction plutôt que par une suite ?
2. Calculer l'élévation du niveau moyen prévue par ce modèle en 2026. Exprimer le résultat en millimètres puis en centimètres.
3. Selon ce modèle, à partir de quelle année (entière) l'élévation dépassera-t-elle 150 mm ? Justifier par la résolution d'une inéquation.
4. Ce modèle suppose que le niveau des océans monte au même rythme chaque année. Or les mesures récentes indiquent plutôt une accélération de la montée des eaux. Que penser alors de la prévision obtenue à la question 3 ?

Corrigé

1. Le niveau des océans évolue à chaque instant, sans palier ni saut : entre deux mesures, il prend toutes les valeurs intermédiaires. C'est donc une grandeur qui évolue de façon **continu**. Une suite ne donnerait des valeurs qu'aux rangs entiers ($n = 0, 1, 2, \dots$), c'est-à-dire une fois par an ; on choisit donc une fonction, définie pour tout réel $x \geq 0$, qui permet de décrire l'élévation à n'importe quel instant, y compris en cours d'année.

2. L'année 2026 se situe 26 ans après l'année 2000, elle correspond donc à $x = 26$. On calcule :

$$N(26) = 3,5 \times 26 = 91$$

Selon ce modèle, l'élévation du niveau moyen des océans en 2026 est de 91 mm, soit 9,1 cm.

3. *Mise en inéquation.* « L'élévation dépasse 150 mm » se traduit par $N(x) > 150$, c'est-à-dire :

$$3,5x > 150$$

Résolution. On divise les deux membres par 3,5, qui est strictement positif, donc le sens de l'inégalité est conservé :

$$x > \frac{150}{3,5} \approx 42,9$$

Conclusion. La première année entière qui vérifie l'inéquation est $x = 43$, ce qui correspond à l'année $2000 + 43 = 2043$. Selon ce modèle, l'élévation du niveau moyen des océans dépassera 150 mm à partir de 2043.

Vérification. $N(42) = 3,5 \times 42 = 147 < 150$ et $N(43) = 3,5 \times 43 = 150,5 > 150$: le seuil de 150 mm est bien franchi entre la 42e et la 43e année après 2000.

4. Le modèle utilisé est linéaire : il suppose que le rythme de montée observé depuis 2000, environ 3,5 mm par an, restera constant pendant plus de quarante ans. Or les mesures récentes indiquent que la montée des eaux s'accélère : le rythme réel des prochaines décennies sera vraisemblablement supérieur à 3,5 mm par an. Le modèle linéaire sous-estime donc l'élévation future, et le seuil de 150 mm serait en réalité atteint avant 2043. La prévision de la question

3 doit ainsi être considérée comme une estimation optimiste plutôt que comme une date fiable. Plus généralement, extrapoler un modèle construit sur des données passées aussi loin de la période d'observation demande beaucoup de prudence.

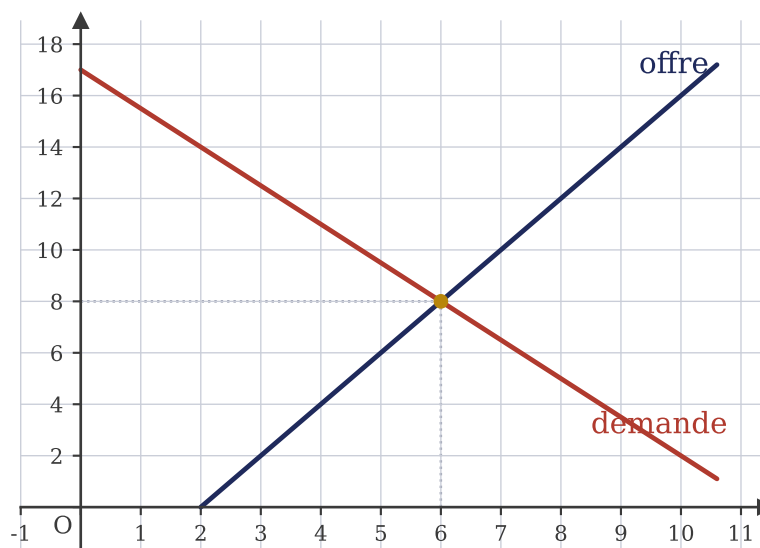
Exercice 14 ★★★ Offre et demande

Notions : Fonctions affines : coefficient directeur et variations, Représentations graphiques (points alignés, droites)

Sur un marché, pour un prix unitaire p (en euros), la quantité offerte par les producteurs et la quantité demandée par les consommateurs, en milliers d'unités, sont modélisées par les fonctions affines :

$$O(p) = 2p - 4 \quad (\text{pour } p \geq 2) \quad \text{et} \quad D(p) = -1,5p + 17$$

Ces deux fonctions sont représentées ci-dessous.



1. Lire graphiquement les quantités offerte et demandée pour un prix de 4 €. Ce prix est-il adapté au marché ?
2. Donner le sens de variation de chacune des deux fonctions et interpréter ces résultats du point de vue économique.
3. Le prix d'équilibre est le prix pour lequel la quantité offerte est égale à la quantité demandée. Déterminer ce prix par le calcul, ainsi que la quantité échangée correspondante.
4. Vérifier la cohérence du résultat de la question 3 avec le graphique.

Corrigé

1. Sur le graphique, on repère l'abscisse $p = 4$ et on lit les ordonnées des points correspondants sur chacune des deux droites : sur la droite croissante (l'offre), on lit $O(4) = 4$; sur la droite décroissante (la demande), on lit $D(4) = 11$. Ainsi, pour un prix de 4 €, les producteurs offrent 4 milliers d'unités alors que les consommateurs en demandent 11 milliers. La demande dépasse largement l'offre : à ce prix, il y a pénurie, et ce prix n'est donc pas adapté au marché. (On peut vérifier par le calcul : $O(4) = 2 \times 4 - 4 = 4$ et $D(4) = -1,5 \times 4 + 17 = 11$.)

2. La fonction O est affine de coefficient directeur 2, strictement positif : elle est donc croissante. Interprétation économique : plus le prix de vente est élevé, plus les producteurs sont incités à produire et à mettre d'unités sur le marché.

La fonction D est affine de coefficient directeur $-1,5$, strictement négatif : elle est donc décroissante. Interprétation économique : plus le prix est élevé, moins les consommateurs sont disposés à acheter, et la quantité demandée diminue.

3. Le prix d'équilibre est le prix p pour lequel $O(p) = D(p)$. On résout donc l'équation :

$$2p - 4 = -1,5p + 17$$

On ajoute $1,5p$ aux deux membres : $3,5p - 4 = 17$. On ajoute 4 aux deux membres : $3,5p = 21$. On divise enfin par 3,5, qui est non nul :

$$p = \frac{21}{3,5} = 6$$

Le prix d'équilibre est donc de 6 €. La quantité échangée correspondante vaut $O(6) = 2 \times 6 - 4 = 8$; on vérifie que $D(6) = -1,5 \times 6 + 17 = 8$ donne bien la même valeur. À l'équilibre, 8 milliers d'unités sont échangées au prix de 6 € l'unité.

4. Sur le graphique, les deux droites se coupent au point marqué en pointillés, de coordonnées $(6 ; 8)$: abscisse 6 (le prix d'équilibre, en euros) et ordonnée 8 (la quantité échangée, en milliers d'unités). La lecture graphique est donc parfaitement cohérente avec le résultat obtenu par le calcul à la question 3.

Exercice 15 ★★★★★ Un barème d'impôt par tranches

Notions : Fonctions affines : coefficient directeur et variations

On étudie un barème d'impôt **simplifié et fictif**, à visée pédagogique (ce n'est pas le barème réel). L'impôt est calculé par tranches sur le revenu annuel :

- 0 % sur la partie du revenu inférieure à 10 000 € ;
- 10 % sur la partie du revenu comprise entre 10 000 € et 30 000 € ;
- 30 % sur la partie du revenu au-delà de 30 000 €.

On note $I(x)$ l'impôt dû, en euros, pour un revenu annuel de x euros.

1. Calculer l'impôt dû pour des revenus annuels de 8 000 €, de 25 000 € et de 40 000 €.
2. Justifier que, pour x appartenant à $]10\,000; 30\,000]$, on a $I(x) = 0,10x - 1\,000$. Déterminer de même l'expression de $I(x)$ pour x appartenant à $]30\,000; +\infty[$. Comment qualifier la fonction I ?
3. Pour un revenu de 40 000 € : donner le taux marginal (le taux appliqué à la dernière tranche) et calculer le taux moyen d'imposition $\frac{I(x)}{x}$. Expliquer la différence entre ces deux taux.
4. Vrai ou faux ? Justifier : « dès qu'on dépasse 30 000 € de revenu, on paie 30 % d'impôt sur tout le revenu ».

Corrigé

1. Le principe du calcul par tranches : chaque taux ne s'applique qu'à la **partie** du revenu située dans la tranche correspondante.

Pour un revenu de 8 000 € : tout le revenu est inférieur à 10 000 €, il est donc entièrement dans la première tranche, taxée à 0 %. Ainsi $I(8\,000) = 0$ € : aucun impôt n'est dû.

Pour un revenu de 25 000 € : les premiers 10 000 € ne sont pas taxés ; la partie comprise entre 10 000 € et 25 000 €, soit $25\,000 - 10\,000 = 15\,000$ €, est taxée à 10 %. D'où :

$$I(25\,000) = 0,10 \times 15\,000 = 1\,500$$

L'impôt dû est de 1 500 €.

Pour un revenu de 40 000 € : les premiers 10 000 € ne sont pas taxés ; la tranche de 10 000 € à 30 000 €, soit 20 000 €, est taxée à 10 % ; la partie au-delà de 30 000 €, soit $40\,000 - 30\,000 = 10\,000$ €, est taxée à 30 %. D'où :

$$I(40\,000) = 0,10 \times 20\,000 + 0,30 \times 10\,000 = 2\,000 + 3\,000 = 5\,000$$

L'impôt dû est de 5 000 €.

2. Soit x un revenu appartenant à $]10\,000; 30\,000]$. Les premiers 10 000 € ne sont pas taxés, et la partie taxée à 10 % est la partie du revenu qui dépasse 10 000 €, c'est-à-dire $x - 10\,000$. On a donc :

$$I(x) = 0,10 \times (x - 10\,000) = 0,10x - 1\,000$$

Soit maintenant x un revenu appartenant à $]30\,000; +\infty[$. La deuxième tranche est entièrement remplie et rapporte $0,10 \times 20\,000 = 2\,000$ € d'impôt ; la partie au-delà de 30 000 €, c'est-à-dire $x - 30\,000$, est taxée à 30 %. On a donc :

$$I(x) = 2\,000 + 0,30 \times (x - 30\,000) = 2\,000 + 0,30x - 9\,000 = 0,30x - 7\,000$$

Sur chacun des trois intervalles, la fonction I est donnée par une expression affine (avec des coefficients différents d'un intervalle à l'autre) : on dit que I est **affine par morceaux**.

3. Pour un revenu de 40 000 €, la dernière tranche atteinte est celle au-delà de 30 000 € : le taux marginal est donc de 30 %. C'est le taux qui s'appliquerait à tout euro supplémentaire gagné.

Le taux moyen d'imposition vaut :

$$\frac{I(40\,000)}{40\,000} = \frac{5\,000}{40\,000} = 0,125 = 12,5\%$$

Ces deux taux ne mesurent pas la même chose : le taux marginal (30 %) ne concerne que les derniers euros du revenu, ceux situés dans la tranche la plus haute, tandis que le taux moyen (12,5 %) rapporte l'impôt total à l'ensemble du revenu. Le taux moyen est nettement plus faible, car les premiers 10 000 € ne sont pas taxés du tout et la tranche suivante ne l'est qu'à 10 %.

4. Faux. Le taux de 30 % ne s'applique qu'à la partie du revenu **au-delà** de 30 000 €, et non à la totalité du revenu. Par exemple, pour un revenu de 40 000 €, l'impôt réellement dû est $I(40\,000) = 5\,000$ €, alors que 30 % de tout le revenu représenterait $0,30 \times 40\,000 = 12\,000$ € — plus du double.

On peut aussi le voir en observant qu'il n'y a pas de « saut » d'impôt au passage d'une tranche : pour $x = 30\,000$, les deux expressions de la question 2 donnent le même montant, $0,10 \times 30\,000 - 1\,000 = 2\,000$ € et $0,30 \times 30\,000 - 7\,000 = 2\,000$ €. Gagner un euro de plus que 30 000 € n'augmente l'impôt que de 30 centimes : franchir une tranche ne pénalise jamais brutalement le contribuable.

Exercice 16 ★★★★★ Synthèse — quelle salle de sport choisir ?

Notions : Reconnaître une croissance linéaire (discret / continu), Terme de rang n (formule explicite), Fonctions affines : coefficient directeur et variations, Problèmes de seuil

Deux salles de sport proposent des abonnements différents :

- la salle A demande 40 € de frais d'inscription, puis 25 € par mois ;
- la salle B ne demande aucun frais d'inscription, mais 32 € par mois.

On note a_n et b_n les coûts totaux, en euros, au bout de n mois d'abonnement dans la salle A et dans la salle B.

1. Calculer le coût de 3 mois d'abonnement dans chaque salle.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_n = 40 + 25n$ et $b_n = 32n$. Préciser la nature des deux suites ainsi définies. Pourquoi une suite (plutôt qu'une fonction) est-elle ici le bon outil de modélisation ?
3. Représenter dans un même repère les premiers termes des deux suites, c'est-à-dire les points de coordonnées $(n; a_n)$ et $(n; b_n)$ pour n allant de 0 à 8. Échelles conseillées : 1 cm pour 1 mois en abscisse, 1 cm pour 25 € en ordonnée.
4. À partir de combien de mois la salle A devient-elle la moins chère ? Traduire la question par une inéquation, puis la résoudre.
5. Vérifier numériquement le résultat de la question 4 en calculant a_5 , b_5 , a_6 et b_6 , puis interpréter concrètement la réponse.

Corrigé

1. Pour la salle A, on paie 40 € d'inscription puis 3 mois à 25 € : $a_3 = 40 + 3 \times 25 = 40 + 75 = 115$. Pour la salle B, on paie simplement 3 mois à 32 € : $b_3 = 3 \times 32 = 96$. Trois mois d'abonnement coûtent donc 115 € dans la salle A et 96 € dans la salle B : sur cette durée, la salle B est la moins chère.

2. Pour la salle A : au bout de 0 mois, on a déjà payé les frais d'inscription, donc $a_0 = 40$; puis chaque mois supplémentaire ajoute 25 € au coût total. La suite a est donc arithmétique de premier terme $a_0 = 40$ et de raison 25, et la formule $a_n = a_0 + nr$ donne $a_n = 40 + 25n$. Pour la salle B : il n'y a aucun frais d'inscription, donc $b_0 = 0$; chaque mois ajoute 32 € au coût total. La suite b est donc arithmétique de premier terme $b_0 = 0$ et de raison 32, d'où $b_n = 0 + 32n = 32n$.

La grandeur étudiée est **discrète** : on paie mois par mois, et le coût total n'a de sens que pour un nombre entier de mois. C'est pourquoi une suite, définie uniquement sur les entiers naturels, est ici le bon outil de modélisation — une fonction définie sur les réels donnerait des valeurs comme « le coût au bout de 2,7 mois », qui ne correspondent à rien dans ce contexte.

3. On calcule d'abord les valeurs à placer :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	40	65	90	115	140	165	190	215	240
b_n	0	32	64	96	128	160	192	224	256

Le tracé attendu comporte deux familles de **points isolés** (on ne relie pas les points : la suite n'est définie que pour les valeurs entières de n). Les points $(n; a_n)$ partent de $(0; 40)$ et montent régulièrement de 25 en 25 ; les points $(n; b_n)$ partent de l'origine et montent de 32 en 32. Chaque famille de points est alignée, car les deux suites sont arithmétiques. Au début, les points de b

sont en dessous de ceux de a ; comme ils montent plus vite, ils finissent par passer au-dessus : le croisement se produit entre $n = 5$ et $n = 6$.

4. *Mise en inéquation.* « La salle A est la moins chère » se traduit par $a_n < b_n$, c'est-à-dire :

$$40 + 25n < 32n$$

Résolution. On soustrait $25n$ aux deux membres : $40 < 7n$. On divise ensuite les deux membres par 7, qui est strictement positif, donc le sens de l'inégalité est conservé :

$$n > \frac{40}{7} \approx 5,7$$

Conclusion. Le nombre de mois n est un entier : le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{40}{7}$ est 6. La salle A devient donc la moins chère à partir de 6 mois d'abonnement.

5. *Vérification.* On calcule les termes de rangs 5 et 6 :

$$a_5 = 40 + 25 \times 5 = 165 \quad b_5 = 32 \times 5 = 160$$

$$a_6 = 40 + 25 \times 6 = 190 \quad b_6 = 32 \times 6 = 192$$

Au bout de 5 mois, $a_5 = 165 > b_5 = 160$: la salle B est encore la moins chère. Au bout de 6 mois, $a_6 = 190 < b_6 = 192$: la salle A est passée devant. La bascule a bien lieu entre le 5e et le 6e mois, ce qui confirme le résultat de la question 4 et le croisement observé sur le graphique.

Interprétation. Pour un abonnement de courte durée (jusqu'à 5 mois), mieux vaut choisir la salle B, qui n'a pas de frais d'inscription. Dès que l'on compte s'entraîner 6 mois ou plus, les 40 € d'inscription de la salle A sont compensés par ses mensualités plus faibles (7 € de moins par mois), et la salle A devient le choix le plus économique.