

Devoir surveillé — Suites arithmétiques et fonctions affines

1re ens. sci. — 60 min

Durée : 60 min — Barème : 20 points. Calculatrice selon les consignes de l'énoncé. La rédaction et la clarté comptent.

Exercice 1 (5 points) — Une suite arithmétique

La suite (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n , par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + 7$$

1. Calculer u_1 et u_2 . (1 pt)
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison. (1 pt)
3. Exprimer u_n en fonction de n . (1 pt)
4. Calculer u_{30} . (0,5 pt)
5. Donner le sens de variation de la suite (u_n) , en justifiant la réponse. (0,5 pt)
6. Existe-t-il un entier naturel n tel que $u_n = 180$? Justifier par un calcul. (1 pt)

Corrigé

1. La relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 7$ permet de calculer chaque terme à partir du précédent. Pour $n = 0$:

$$u_1 = u_0 + 7 = 12 + 7 = 19$$

Puis, pour $n = 1$:

$$u_2 = u_1 + 7 = 19 + 7 = 26$$

On a donc $u_1 = 19$ et $u_2 = 26$.

2. Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n + 7$: on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre 7. Par définition, la suite (u_n) est donc une suite **arithmétique**, de raison $r = 7$.

3. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 12$ et de raison $r = 7$. D'après la formule du terme général, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr = 12 + 7n$$

4. On remplace n par 30 dans l'expression précédente :

$$u_{30} = 12 + 7 \times 30 = 12 + 210 = 222$$

5. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 7$. Or $7 > 0$, et une suite arithmétique de raison strictement positive est strictement croissante. La suite (u_n) est donc **croissante**. (On peut aussi le vérifier directement : pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 7 > 0$.)

6. On cherche s'il existe un entier naturel n tel que $u_n = 180$, c'est-à-dire tel que :

$$12 + 7n = 180$$

On soustrait 12 à chaque membre : $7n = 168$. On divise ensuite chaque membre par 7 : $n = \frac{168}{7} = 24$.

Le nombre 24 est bien un entier naturel : la réponse est donc **oui**. On vérifie : $u_{24} = 12 + 7 \times 24 = 12 + 168 = 180$. C'est au rang $n = 24$ que la suite prend la valeur 180.

Exercice 2 (5 points) — Location de vélos

Un loueur de vélos facture chaque location de la façon suivante : un forfait fixe de 3 €, auquel s'ajoutent 1,50 € par heure de location. Une location peut durer une durée quelconque, pas forcément un nombre entier d'heures.

On note $f(x)$ le prix, en euros, d'une location de x heures. On a donc, pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) = 1,5x + 3$$

1. Calculer le prix payé pour une location de 2 heures, puis pour une location de 3 h 30 min. (1,5 pt)
2. Quelle est la nature de la fonction f ? Donner son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine, puis interpréter chacun de ces deux nombres dans le contexte de l'exercice. (1,5 pt)
3. Un client a payé 12 € : combien de temps a duré sa location ? Justifier par la résolution d'une équation. (1 pt)
4. La grandeur « durée de location » est-elle discrète ou continue ? Expliquer pourquoi on a choisi de modéliser cette situation par une fonction plutôt que par une suite. (1 pt)

Corrigé

1. Pour une location de 2 heures, on calcule l'image de 2 par la fonction f :

$$f(2) = 1,5 \times 2 + 3 = 3 + 3 = 6$$

Une location de 2 heures coûte donc 6 €.

Pour une location de 3 h 30 min, il faut d'abord convertir la durée en heures : 30 minutes représentent une demi-heure, donc 3 h 30 min = 3,5 h (et non 3,3 h, erreur classique à éviter). On calcule alors :

$$f(3,5) = 1,5 \times 3,5 + 3 = 5,25 + 3 = 8,25$$

Une location de 3 h 30 min coûte donc 8,25 €.

2. La fonction f est définie par $f(x) = 1,5x + 3$: elle est de la forme $f(x) = mx + p$ avec $m = 1,5$ et $p = 3$. C'est donc une **fonction affine**, de coefficient directeur $m = 1,5$ et d'ordonnée à l'origine $p = 3$.

Interprétation dans le contexte :

- le coefficient directeur 1,5 représente l'augmentation du prix par heure de location : chaque heure supplémentaire coûte 1,50 € de plus ;
- l'ordonnée à l'origine 3 est le prix payé pour une durée nulle, c'est-à-dire le forfait fixe de 3 € facturé quelle que soit la durée de la location.

3. On cherche la durée x , en heures, telle que $f(x) = 12$, c'est-à-dire on résout l'équation :

$$1,5x + 3 = 12$$

On soustrait 3 à chaque membre : $1,5x = 9$. On divise ensuite chaque membre par 1,5 : $x = \frac{9}{1,5} = 6$.

La location de ce client a donc duré 6 heures. On vérifie : $f(6) = 1,5 \times 6 + 3 = 9 + 3 = 12$ €.

4. La durée de location est une grandeur **continue** : l'énoncé précise qu'une location peut durer une durée quelconque, pas forcément un nombre entier d'heures. La durée peut donc prendre n'importe quelle valeur réelle positive, comme 2,75 h ou 3,5 h.

C'est pourquoi on modélise cette situation par une fonction définie pour tout réel $x \geq 0$: elle permet de calculer le prix pour toutes les durées possibles. Une suite, elle, n'est définie que pour

des valeurs entières de la variable : elle ne donnerait le prix que pour des durées entières (1 h, 2 h, 3 h...) et ne permettrait pas de facturer une location de 3 h 30 min.

Exercice 3 (6 points) — Un plan d'épargne

Zoé ouvre un livret d'épargne avec un dépôt initial de 1 200 €. Elle décide ensuite d'y déposer 30 € à la fin de chaque mois. On note $c(n)$ le montant, en euros, présent sur le livret au bout de n mois. Ainsi $c(0) = 1\,200$.

1. Donner les valeurs de $c(0)$, $c(1)$ et $c(2)$. (1 pt)
2. Exprimer $c(n+1)$ en fonction de $c(n)$. En déduire la nature de la suite $(c(n))$ en précisant sa raison. (1,5 pt)
3. Exprimer $c(n)$ en fonction de n . (1 pt)
4. Quel montant y a-t-il sur le livret au bout d'un an ? (0,5 pt)
5. Zoé souhaite disposer d'au moins 1 500 € sur son livret. Traduire cette condition par une inéquation d'inconnue n , la résoudre, puis conclure par une phrase. (1,5 pt)
6. La grandeur modélisée par la suite $(c(n))$ est-elle discrète ou continue ? Justifier. (0,5 pt)

Corrigé

1. D'après l'énoncé, le dépôt initial est de 1 200 €, donc $c(0) = 1\,200$.

À la fin du premier mois, Zoé dépose 30 € : $c(1) = 1\,200 + 30 = 1\,230$.

À la fin du deuxième mois, elle dépose à nouveau 30 € : $c(2) = 1\,230 + 30 = 1\,260$.

Les montants sont donc $c(0) = 1\,200$ €, $c(1) = 1\,230$ € et $c(2) = 1\,260$ €.

2. Chaque mois, Zoé dépose 30 € sur son livret : le montant au bout de $n+1$ mois s'obtient en ajoutant 30 au montant au bout de n mois. Pour tout entier naturel n :

$$c(n+1) = c(n) + 30$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre 30 : la suite $(c(n))$ est donc **arithmétique**, de raison $r = 30$.

3. La suite $(c(n))$ est arithmétique de premier terme $c(0) = 1\,200$ et de raison $r = 30$. D'après la formule du terme général, pour tout entier naturel n :

$$c(n) = c(0) + nr = 1\,200 + 30n$$

4. Un an correspond à 12 mois. On calcule donc :

$$c(12) = 1\,200 + 30 \times 12 = 1\,200 + 360 = 1\,560$$

Au bout d'un an, il y a 1 560 € sur le livret.

5. Zoé souhaite disposer d'au moins 1 500 € : on cherche les entiers naturels n tels que $c(n) \geq 1\,500$, ce qui se traduit par l'inéquation :

$$1\,200 + 30n \geq 1\,500$$

On soustrait 1 200 à chaque membre : $30n \geq 300$. On divise ensuite chaque membre par 30, qui est un nombre **positif**, donc le sens de l'inégalité est conservé :

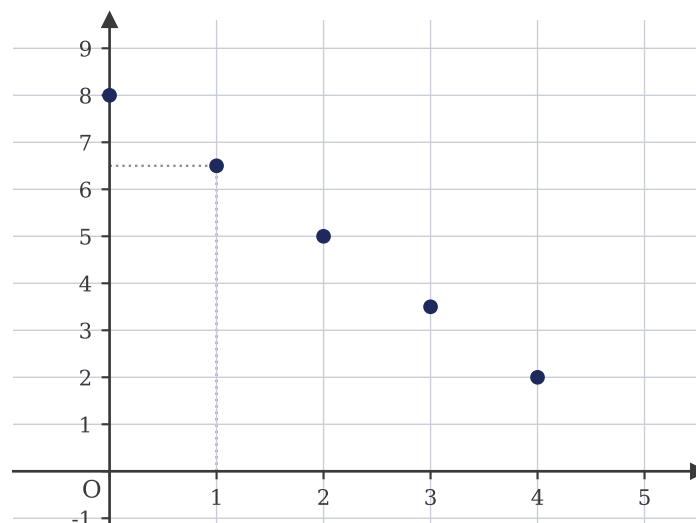
$$n \geq \frac{300}{30} = 10$$

Le plus petit entier naturel qui convient est $n = 10$. **Conclusion** : c'est au bout de 10 mois que Zoé dispose pour la première fois d'au moins 1 500 € sur son livret — elle possède alors exactement $c(10) = 1\,200 + 30 \times 10 = 1\,500$ €.

6. La grandeur modélisée est **discrète** : le montant du livret n'évolue qu'au moment de chaque dépôt, à la fin de chaque mois. La variable n compte un nombre entier de mois ; parler de $c(2,5)$ n'aurait pas de sens dans cette situation. C'est pourquoi on modélise cette situation par une suite, définie uniquement pour des valeurs entières de n .

Exercice 4 (4 points) — Lecture graphique

On a représenté graphiquement ci-dessous les cinq premiers termes d'une suite (w_n) : chaque point a pour coordonnées $(n ; w_n)$.



1. Lire graphiquement w_0 et w_2 . (1 pt)
2. Expliquer pourquoi ces points suggèrent que la suite (w_n) est arithmétique, et donner sa raison. (1 pt)
3. Exprimer w_n en fonction de n , puis donner le sens de variation de la suite (w_n) en justifiant. (1 pt)
4. À partir de quel rang n a-t-on $w_n < 0$? Justifier par un calcul. (1 pt)

Corrigé

1. Le point d'abscisse 0 a pour ordonnée 8 et le point d'abscisse 2 a pour ordonnée 5. On lit donc graphiquement :

$$w_0 = 8 \quad \text{et} \quad w_2 = 5$$

2. On lit sur le graphique les cinq premiers termes : $w_0 = 8$, $w_1 = 6,5$, $w_2 = 5$, $w_3 = 3,5$ et $w_4 = 2$. On calcule les écarts entre deux termes consécutifs :

$$w_1 - w_0 = 6,5 - 8 = -1,5 ; \quad w_2 - w_1 = 5 - 6,5 = -1,5 ; \quad w_3 - w_2 = -1,5 ; \quad w_4 - w_3 = -1,5$$

D'un rang au suivant, la valeur diminue toujours de la même quantité 1,5 : l'accroissement est constant, ce qui se traduit graphiquement par des points alignés. Ces points suggèrent donc que la suite (w_n) est **arithmétique**, de raison $r = -1,5$.

3. La suite (w_n) est arithmétique de premier terme $w_0 = 8$ et de raison $r = -1,5$. D'après la formule du terme général, pour tout entier naturel n :

$$w_n = w_0 + nr = 8 - 1,5n$$

La raison $r = -1,5$ est strictement négative, et une suite arithmétique de raison strictement négative est strictement décroissante. La suite (w_n) est donc **décroissante**.

4. On cherche les entiers naturels n tels que $w_n < 0$, c'est-à-dire on résout l'inéquation :

$$8 - 1,5n < 0$$

On soustrait 8 à chaque membre : $-1,5n < -8$. On divise ensuite chaque membre par 1,5, nombre positif, après avoir réécrit l'inéquation sous la forme $1,5n > 8$:

$$n > \frac{8}{1,5} = \frac{16}{3} \approx 5,3$$

Comme n est un entier naturel, le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{16}{3}$ est 6. **Conclusion :** on a $w_n < 0$ à partir du rang $n = 6$.

Vérification : $w_5 = 8 - 1,5 \times 5 = 8 - 7,5 = 0,5 > 0$ et $w_6 = 8 - 1,5 \times 6 = 8 - 9 = -1 < 0$.