

Suites arithmétiques et fonctions affines

Cours — 1re ens. sci.

Beaucoup de grandeurs évoluent au fil du temps : un capital placé à la banque, le nombre d'abonnés d'une chaîne de vidéos, la température d'un plat qui cuit, le niveau moyen des océans. Pour étudier ces **phénomènes d'évolution**, on distingue deux situations. Tantôt la grandeur ne prend de valeurs qu'à des instants séparés — chaque année, chaque mois, à chaque étape — et l'évolution est dite **discrète** : l'outil adapté est alors une **suite numérique**, notion nouvelle que ce chapitre introduit. Tantôt la grandeur varie sans interruption, à chaque instant, et l'évolution est dite **continue** : l'outil adapté est une **fonction**, notion déjà rencontrée en seconde. Ce chapitre étudie le plus simple de tous les modèles d'évolution : celui où la grandeur augmente (ou diminue) de **la même quantité à chaque pas**. Cet accroissement constant porte un nom : la **croissance linéaire**. Nous allons la découvrir sous ses deux visages — côté discret avec les suites arithmétiques, côté continu avec les fonctions affines — et constater qu'il s'agit en réalité d'un seul et même modèle.

1 Les suites numériques

Commençons par une situation concrète. Une chaîne de vidéos compte aujourd'hui 500 abonnés. On relève le nombre d'abonnés chaque mois : au bout d'un mois, puis de deux mois, puis de trois... On obtient une liste de nombres, un par mois. Pas de relevé « au bout d'un mois et demi » : la grandeur n'est observée qu'à des rangs entiers (0 mois, 1 mois, 2 mois...). C'est exactement ce que modélise une suite.

Définition

Une **suite numérique** u associe, à chaque entier naturel n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), un nombre réel noté $u(n)$.

- Le nombre $u(n)$ est appelé le **terme de rang n** de la suite ;
- $u(0)$ est le **premier terme** (on dit aussi le terme initial).

Cette notation $u(n)$ ressemble volontairement à la notation des fonctions : une suite fonctionne comme une fonction, mais qui n'accepte que des entiers naturels en entrée. Ainsi $u(3)$ est le nombre associé au rang 3, exactement comme $f(3)$ est l'image de 3 par une fonction f .

Remarque (notation indicielle). Le terme de rang n se note aussi u_n , avec le rang en indice : c'est la **notation indicielle**, la plus courante dans les livres et les sujets. Les deux écritures $u(n)$ et u_n désignent exactement la même chose, et nous utiliserons librement l'une ou l'autre.

Comment décrire une suite ? Deux modes de génération existent, et il est essentiel de bien les distinguer.

Premier mode : par une relation de récurrence. On donne le premier terme, et une règle qui permet de passer de chaque terme au suivant.

Exemple

La chaîne de vidéos compte 500 abonnés et en gagne 30 chaque mois. En notant $u(n)$ le nombre d'abonnés au bout de n mois, on a :

$$u(0) = 500 \quad \text{et} \quad u(n+1) = u(n) + 30 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On calcule alors les termes **de proche en proche** : $u(1) = 500 + 30 = 530$, puis $u(2) = 530 + 30 = 560$, puis $u(3) = 560 + 30 = 590$... Le défaut de ce mode de génération : pour connaître $u(24)$, il faut d'abord calculer tous les termes qui précèdent.

Second mode : par une formule explicite. On donne directement une formule qui exprime $u(n)$ en fonction de n , comme pour une fonction.

Exemple

On construit des motifs avec des jetons : à l'étape n , le motif est une ligne formée d'un jeton central et de n jetons de chaque côté, soit $u(n) = 2n + 1$ jetons au total. On peut calculer **directement** n'importe quel terme, sans passer par les précédents : $u(4) = 2 \times 4 + 1 = 9$ et $u(10) = 2 \times 10 + 1 = 21$. C'est tout l'intérêt d'une formule explicite.

Un des objectifs de ce chapitre est justement de passer du premier mode au second : pour les suites que nous allons étudier, nous saurons transformer la relation de récurrence en formule explicite.

2 Suites arithmétiques

Dans l'exemple des abonnés, on ajoute **toujours le même nombre** (30) pour passer d'un terme au suivant. Les suites qui évoluent ainsi, à accroissement constant, portent un nom.

Définition

Une suite u est **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n :

$$u(n+1) = u(n) + r.$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la suite : c'est la quantité, toujours la même, que l'on ajoute pour passer d'un terme au suivant.

Exemple

- Le nombre d'abonnés de la chaîne ($u(0) = 500$, on ajoute 30 chaque mois) est une suite arithmétique de premier terme 500 et de raison $r = 30$.
- La raison peut être **négative** : une citerne contient 200 litres d'eau et le potager en consomme 15 litres par semaine. La quantité d'eau restante au bout de n semaines est une suite arithmétique de premier terme $u(0) = 200$ et de raison $r = -15$: chaque semaine, on *ajoute* -15 , c'est-à-dire qu'on retire 15.

Calculons pour nous entraîner les six termes qui suivent le premier terme de la suite arithmétique définie par $u(0) = 3$ et $r = 2$:

a. $u(1) = 3 + 2 = 5$

c. $u(3) = 7 + 2 = 9$

e. $u(5) = 11 + 2 = 13$

b. $u(2) = 5 + 2 = 7$

d. $u(4) = 9 + 2 = 11$

f. $u(6) = 13 + 2 = 15$

Méthode

Reconnaître une suite arithmétique.

On calcule les différences entre termes consécutifs : $u(1)-u(0)$, puis $u(2)-u(1)$, puis $u(3)-u(2)$... Si ces différences sont **toutes égales** à un même nombre r , la suite est arithmétique de raison r . Si deux différences sont distinctes, la suite n'est **pas** arithmétique — une seule différence qui change suffit à conclure.

Exemple travaillé. Le budget « matériel » d'une association a valu successivement 1 200 €, 1 350 €, 1 500 € puis 1 650 € au fil des quatre dernières années. Les différences valent $1\,350 - 1\,200 = 150$, puis $1\,500 - 1\,350 = 150$, puis $1\,650 - 1\,500 = 150$: elles sont constantes. Ce poste budgétaire suit une croissance linéaire, modélisée par une suite arithmétique de premier terme 1 200 et de raison $r = 150$.

Contre-exemple. La suite dont les premiers termes sont 1 ; 4 ; 9 ; 16 n'est pas arithmétique : les différences valent $4 - 1 = 3$, puis $9 - 4 = 5$, puis $16 - 9 = 7$. Elles augmentent à chaque pas : l'accroissement n'est pas constant.

Revenons au défaut de la relation de récurrence : pour connaître $u(24)$, faut-il vraiment calculer les 23 termes précédents ? Non — et c'est le résultat central de ce chapitre.

Propriété

Terme de rang n d'une suite arithmétique. Si u est une suite arithmétique de premier terme $u(0)$ et de raison r , alors pour tout entier naturel n :

$$u(n) = u(0) + n \times r.$$

Justification. Partons de $u(0)$ et avançons de proche en proche : $u(1) = u(0) + r$, puis $u(2) = u(1) + r = u(0) + 2r$, puis $u(3) = u(2) + r = u(0) + 3r$... À chaque pas, on ajoute une fois de plus la raison. Pour atteindre le rang n , on effectue n pas depuis le rang 0, donc on a ajouté n fois la raison en tout : $u(n) = u(0) + n \times r$. $\square$

Remarque. Si la suite commence au rang 1 (premier terme $u(1)$), le même raisonnement s'applique : pour aller du rang 1 au rang n , on effectue $n - 1$ pas, donc $u(n) = u(1) + (n - 1) \times r$. Avant d'utiliser une formule, on vérifie toujours à quel rang commence la suite.

Exemple

Combien la chaîne de vidéos comptera-t-elle d'abonnés au bout de deux ans, c'est-à-dire 24 mois ? La suite est arithmétique de premier terme $u(0) = 500$ et de raison $r = 30$, donc sa formule explicite est $u(n) = 500 + 30n$. D'où, directement : $u(24) = 500 + 30 \times 24 = 500 + 720 = 1\,220$ abonnés. Aucun calcul de proche en proche n'a été nécessaire.

Une suite est dite **croissante** lorsque chaque terme est supérieur au précédent, **décroissante** lorsque chaque terme est inférieur au précédent. Pour une suite arithmétique, la réponse se lit sur la raison.

Propriété

Sens de variation d'une suite arithmétique. Soit u une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, la suite u est croissante.
- Si $r < 0$, la suite u est décroissante.
- Si $r = 0$, la suite u est constante.

Justification. Pour tout entier naturel n , on a $u(n+1) - u(n) = r$: le signe de cette différence — donc la comparaison entre un terme et le suivant — est exactement le signe de r . $\square$

Ainsi la suite des abonnés ($r = 30 > 0$) est croissante, tandis que la suite de la citerne ($r = -15 < 0$)

est décroissante.

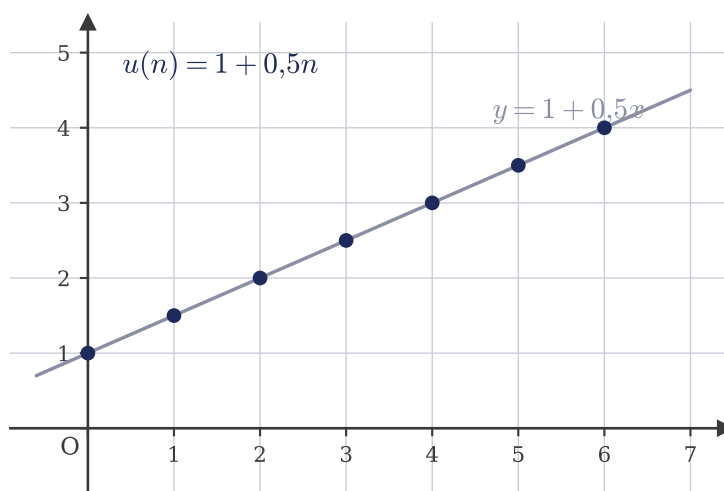
Exemple

Mettons tout en pratique — avec la notation indicielle, cette fois. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 12$ et de raison $r = -2,5$.

- *Formule explicite* : $u_n = u_0 + n \times r = 12 - 2,5n$ pour tout entier naturel n .
- *Calcul direct d'un terme* : $u_4 = 12 - 2,5 \times 4 = 12 - 10 = 2$.
- *Sens de variation* : $r = -2,5 < 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.
- *Premier terme négatif* : $u_5 = 12 - 12,5 = -0,5 < 0$, alors que $u_4 = 2 > 0$ — la suite devient négative à partir du rang 5. C'est déjà, sans le dire, un petit problème de seuil : nous y reviendrons dans la dernière section.

2.1 Représentation graphique

Comment représenter une suite ? Comme une suite n'est définie qu'aux rangs entiers, on place dans un repère les points de coordonnées $(n ; u(n))$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. On obtient des **points isolés** — surtout, on ne les relie pas : entre deux rangs entiers, la suite n'existe pas.



La figure représente la suite arithmétique $u(n) = 1 + 0,5n$ pour les rangs $n = 0$ à 6. Le caractère arithmétique **se voit** : d'un point au suivant, on avance de 1 vers la droite et on monte toujours de la même quantité, la raison 0,5. Résultat : les points sont **alignés**, posés sur la droite d'équation $y = 1 + 0,5x$. Ce n'est pas un hasard, et c'est justement cette droite qui fait le pont vers la deuxième partie du chapitre : les fonctions affines.

Propriété

Les points $(n ; u(n))$ représentant une suite arithmétique sont alignés. Réciproquement, si les points représentant une suite sont alignés, la suite est arithmétique : l'alignement des points est la signature graphique de l'accroissement constant.

3 Fonctions affines : le modèle continu

Toutes les grandeurs n'évoluent pas par paliers. La température d'un plat, la hauteur d'eau dans une baignoire qui se remplit, le prix d'une course en fonction de la distance parcourue : ces grandeurs varient **continûment**, et peuvent être évaluées en n'importe quelle valeur réelle, pas seulement aux entiers. L'outil adapté est une fonction — et quand l'accroissement est constant, c'est une fonction affine, déjà rencontrée en seconde. Remobilisons ces acquis.

Définition

Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

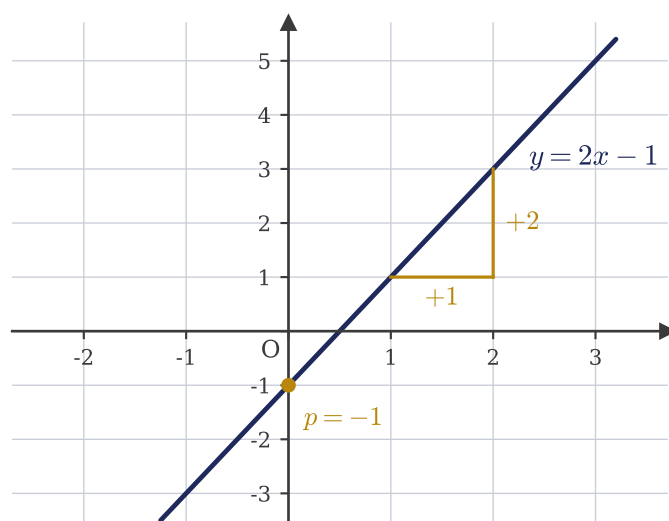
$$f(x) = mx + p,$$

où m et p sont deux nombres réels fixés.

- Le nombre m est le **coefficient directeur** ;
- le nombre p est l'**ordonnée à l'origine** : c'est la valeur de départ, car $f(0) = p$.

La représentation graphique de f est une **droite**, d'équation $y = mx + p$.

Remarque. Deux cas particuliers méritent d'être signalés : si $p = 0$, la fonction $f(x) = mx$ est dite *linéaire* et traduit une situation de proportionnalité ; si $m = 0$, la fonction $f(x) = p$ est *constante*.



La figure représente la fonction affine $f(x) = 2x - 1$. On y lit les deux paramètres : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; -1)$, donc $p = -1$; et le petit triangle montre que lorsque x augmente de 1, la valeur de $f(x)$ augmente de 2, donc $m = 2$. Ce « quand x avance de 1, y monte de m » est exactement l'analogue continu de la raison d'une suite arithmétique. La propriété suivante le confirme.

Propriété

Taux d'accroissement d'une fonction affine. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$. Pour tous réels $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m.$$

Le taux d'accroissement entre deux valeurs quelconques est **constant**, toujours égal au coefficient directeur : c'est la signature de la croissance linéaire continue.

Justification. On calcule la différence des images : $f(x_2) - f(x_1) = (mx_2 + p) - (mx_1 + p) = m(x_2 - x_1)$. Comme $x_2 - x_1 \neq 0$, on peut diviser : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$. $\square$

Cette propriété est très utile en pratique : elle permet de **retrouver** m à partir de deux valeurs de la fonction. Si l'on sait que $f(2) = 7$ et $f(5) = 16$, alors $m = \frac{16 - 7}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$, sans connaître l'expression de f .

Propriété

Sens de variation d'une fonction affine. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Le taux d'accroissement explique ce résultat : quand x augmente, $f(x)$ varie de m fois cette augmentation — il monte si $m > 0$, il descend si $m < 0$. Pour une fonction affine croissante ($m > 0$), le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Exemple

Degrés Celsius et degrés Fahrenheit. Aux États-Unis, la température se mesure en degrés Fahrenheit. La correspondance avec les degrés Celsius est donnée par la fonction affine

$$F(C) = 1,8C + 32.$$

On y lit tout ce qu'il faut savoir : l'ordonnée à l'origine 32 signifie que 0°C correspond à 32°F ; le coefficient directeur 1,8 signifie que chaque degré Celsius supplémentaire ajoute $1,8^\circ\text{F}$. La fonction est croissante ($m = 1,8 > 0$) : plus il fait chaud en Celsius, plus il fait chaud en Fahrenheit — heureusement ! Par exemple, 20°C correspondent à $F(20) = 1,8 \times 20 + 32 = 68^\circ\text{F}$, et l'eau bout à $F(100) = 180 + 32 = 212^\circ\text{F}$.

Remarque. Les fonctions affines sont partout dans la vie économique et sociale : un abonnement composé d'une part fixe et d'une part variable selon la consommation, les courbes d'offre et de demande en fonction du prix... Le barème de l'impôt sur le revenu, lui, est une fonction **affine par morceaux** : sur chaque tranche de revenu, l'impôt est donné par une fonction affine, mais le coefficient directeur change d'une tranche à l'autre.

4 Discret ou continu ? Le parallèle

Prenons du recul. Suites arithmétiques et fonctions affines racontent la même histoire — une grandeur qui varie à accroissement constant — dans deux décors différents : rangs entiers d'un côté, valeurs réelles de l'autre. Le tableau suivant met le parallèle en évidence.

	Suite arithmétique	Fonction affine
Variable	rang entier n (grandeur discrète)	réel x (grandeur continue)
Accroissement constant	raison r	coefficient directeur m
Valeur de départ	premier terme $u(0)$	ordonnée à l'origine $p = f(0)$
Expression	$u(n) = u(0) + nr$	$f(x) = p + mx$
Représentation graphique	points isolés alignés	droite
Sens de variation	signe de r	signe de m

Les deux formules $u(n) = u(0) + nr$ et $f(x) = p + mx$ sont mot pour mot les mêmes : valeur de départ, plus l'accroissement multiplié par le chemin parcouru. Face à une situation concrète, la seule vraie question est donc : la grandeur évolue-t-elle par paliers ou continûment ?

Méthode

Modéliser une situation de croissance linéaire.

1. **Repérer la nature de la grandeur.** Si elle évolue par paliers, à des rangs entiers (chaque année, chaque mois, à chaque étape), le modèle est **discret** : on choisit une suite. Si elle évolue continûment, mesurable à tout instant, le modèle est **continu** : on choisit une fonction.
2. **Vérifier l'accroissement constant.** Différences entre termes consécutifs constantes (discret) ou taux d'accroissement constant (continu). Sans cette vérification, le modèle linéaire n'est pas justifié.
3. **Écrire le modèle.** Identifier la valeur de départ ($u(0)$ ou p) et l'accroissement (r ou m), puis écrire $u(n) = u(0) + nr$ ou $f(x) = p + mx$. Terminer en précisant ce que représentent n ou x et l'unité de la grandeur.

Exemple

Placement à intérêts simples. Sofia place 2 000 € sur un livret à intérêts simples au taux annuel de 2,5 % : chaque année, la banque verse des intérêts calculés sur le capital de départ, soit $\frac{2,5}{100} \times 2\,000 = 50$ € par an. Modélisons le capital disponible.

1. *Nature de la grandeur.* Les intérêts sont versés une fois par an : le capital ne change qu'à des dates séparées, une par année. L'évolution est **discrète** : on choisit une suite, en notant $u(n)$ le capital (en euros) au bout de n années.
2. *Accroissement constant.* Chaque année, le capital augmente exactement de 50 € (les intérêts sont toujours calculés sur les 2 000 € de départ) : $u(n+1) = u(n) + 50$. La suite est arithmétique de raison $r = 50$.
3. *Modèle.* Avec $u(0) = 2\,000$, la formule explicite est $u(n) = 2\,000 + 50n$. Par exemple, au bout de dix ans : $u(10) = 2\,000 + 500 = 2\,500$ €.

À l'inverse, une grandeur comme le niveau moyen des océans, mesurable à tout instant et dont la montée est à peu près régulière sur quelques décennies, se modélise par une fonction affine du temps : même modèle linéaire, version continue.

5 Problèmes de seuil

Dernière compétence du chapitre, et l'une des plus utiles : répondre aux questions du type « **à partir de quand** la grandeur dépassera-t-elle telle valeur ? ». Cette valeur à atteindre s'appelle un **seuil**. Dans le cas d'une croissance linéaire, une inéquation du premier degré — outil de seconde — suffit à répondre.

Méthode

Résoudre un problème de seuil (croissance linéaire).

1. **Traduire** la question par une inéquation : la grandeur modélisée dépasse le seuil S s'écrit $u(0) + nr \geq S$ (modèle discret) ou $p + mx \geq S$ (modèle continu).
2. **Résoudre** cette inéquation du premier degré, d'inconnue n ou x .
3. **Conclure** en respectant la nature de la variable. Dans le cas discret, n est un **rang entier** : si la résolution donne par exemple $n \geq 8,6$, le premier rang qui convient est $n = 9$ — on arrondit **vers le haut**, jamais en tronquant.
4. **Vérifier numériquement** : calculer le terme au rang trouvé (il doit dépasser le seuil) et au rang précédent (il ne doit pas encore le dépasser).

Exemple

Nolan a déjà mis 220 € de côté et économise 45 € chaque mois. Au bout de combien de mois disposera-t-il d'au moins 580 € ?

1. *Traduction.* La somme disponible au bout de n mois est $u(n) = 220 + 45n$ (suite arithmétique : premier terme 220, raison 45). On cherche le plus petit entier n tel que $220 + 45n \geq 580$.
2. *Résolution.* On soustrait 220 aux deux membres : $45n \geq 360$. On divise par 45, qui est positif (le sens de l'inégalité ne change pas) : $n \geq 8$.
3. *Conclusion.* Le plus petit entier qui convient est $n = 8$: c'est au bout de 8 mois que Nolan disposera pour la première fois d'au moins 580 €.
4. *Vérification.* $u(8) = 220 + 360 = 580 \geq 580$, tandis que $u(7) = 220 + 315 = 535 < 580$: la réponse est confirmée.

Variante — attention à l'arrondi. S'il visait 700 €, l'inéquation $220 + 45n \geq 700$ donnerait $n \geq \frac{480}{45} \approx 10,7$. Le premier rang entier qui convient est alors $n = 11$ (et non 10!) : on vérifie que $u(11) = 715 \geq 700$ alors que $u(10) = 670 < 700$.

Deux autres approches permettent de résoudre un problème de seuil, et il faut savoir les mobiliser aussi :

- **par lecture graphique** : on trace la droite horizontale d'équation $y = S$ sur la représentation de la suite ou de la fonction, et on repère le premier point (ou la première abscisse) situé au-dessus ;
- **avec une table de valeurs** : à la calculatrice ou au tableur, on fait afficher les termes $u(n)$ les uns après les autres et on repère le premier rang où le seuil est franchi. C'est souvent le moyen le plus rapide de vérifier un calcul.

6 Conclusion

Le modèle linéaire — suites arithmétiques côté discret, fonctions affines côté continu — est le plus simple de tous les modèles d'évolution : une valeur de départ, un accroissement constant, et tout se calcule. Sa simplicité fait sa force, mais aussi sa limite : dans la réalité, beaucoup de grandeurs n'évoluent pas d'une quantité constante — une population ou une épidémie, par exemple, croissent d'autant plus vite qu'elles sont déjà grandes. D'autres modèles d'évolution, adaptés à ces situations, seront étudiés plus loin dans l'année.